УДК 517.938; 517.977

А. Н. Канатников

ЛОКАЛИЗАЦИЯ РОБАСТНО ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Для дискретных систем с возмущениями предложены методы локализации робастно инвариантных компактов. Описаны свойства соответствующих локализирующих множеств. Указаны условия существования максимальных робастно инвариантных компактов.

E-mail: Skipper@bmstu.ru

Ключевые слова: инвариантное множество, дискретная система, система с возмущениями, локализирующее множество, максимальный инвариантный компакт.

В теории управления важную роль играют системы, в которых те или иные компоненты имеют неопределенный характер. Причины такой неопределенности могут быть разными: неточная математическая модель процесса, погрешности определения параметров системы, неточности в реализации управления и т.п.

Например, динамическая система может возникнуть как система, замкнутая стабилизирующим управлением в задаче стабилизации положения равновесия. В отсутствие возмущений положение равновесия такой системы асимптотически устойчиво. Наличие возмущений может привести к тому, что траектория замкнутой системы попадает в некоторую окрестность положения равновесия, но к самому положению равновесия не стремится. Возникает задача оценки такой окрестности, а также оценки области притяжения этой окрестности. Решение указанных задач можно вести в рамках исследования инвариантных компактов и положительно инвариантных компактов замкнутой системы [1–4].

Рассмотрим дискретную систему с возмущениями

$$x_{n+1} = F(x_n, w_n), \tag{1}$$

где $F\colon X \times W \to X$ — непрерывное отображение; X — фазовое пространство динамической системы; W — область значений возмущения системы.

1. Робастно положительно инвариантные компакты. Множество M в фазовом пространстве X системы (1) назовем робастно положительно инвариантным или просто положительно инвариантным [1, 2], если для любых $x \in M$ и $w \in W$ выполняется условие

$F(x, w) \in M$. Данное определение можно переформулировать следующим образом: множество M положительно инвариантно, если $F(M \times W) \subset M$. Непосредственно из определения вытекает, что если $x_0 \in X$ принадлежит положительно инвариантному множеству $M \subset X$, то при любых возмущениях $w_n \in W$ траектория $\{x_n\}$ системы, определяемая соотношениями $x_{n+1} = F(x_n, w_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, целиком содержится в множестве M.

Ограничимся изучением положительно инвариантных компактов — робастно положительно инвариантных множеств с дополнительным свойством компактности. Поставим задачу оценки положения положительно инвариантных компактов систем с возмущениями, понимая под этим построение таких множеств в фазовом пространстве системы, которые включают в себя все положительно инвариантные компакты. Подобные множества называют локализирующими [5–8].

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. Введем множества

$$\Sigma_\varphi^+ = \Big\{x \in X\colon \inf_{w \in W} \varphi(F(x, w)) - \varphi(x) \geq 0\Big\},$$
$$\Sigma_\varphi^- = \Big\{x \in X\colon \sup_{w \in W} \varphi(F(x, w)) - \varphi(x) \leq 0\Big\}.$$

Для произвольного множества $Q \subset X$ положим

$$\varphi_{\inf}^r(Q) = \inf_{x \in \Sigma_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x), \qquad \varphi_{\sup}^r(Q) = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x).$$

Если $Q = X$, то вместо $\varphi_{\inf}^r(Q)$ и $\varphi_{\sup}^r(Q)$ будем использовать обозначения $\varphi_{\inf}^r$ и $\varphi_{\sup}^r$.

Теорема 1. *Любой положительно инвариантный компакт системы* (1)*, содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве*

$$\Omega_\varphi^r(Q) = \{x \in Q\colon \varphi_{\inf}^r(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}^r(Q)\}.$$

Доказательство. Пусть K — положительно инвариантный компакт, содержащийся в Q. Функция φ достигает на этом компакте наибольшего значения в некоторой точке $x^* \in K$. Тогда для любого значения $w \in W$ имеем $F(x^*, w) \in K$ (в силу условия положительной инвариантности), откуда $\varphi(F(x^*, w)) \leq \varphi(x^*)$. Следовательно, $x^* \in \Sigma_\varphi^-$ и для любой точки $x \in K$

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^*) \leq \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x) = \varphi_{\sup}^r(Q).$$

Аналогично доказывается неравенство $\varphi(x) \geq \varphi_{\inf}^r(Q)$, $x \in K$. Оба неравенства означают, что $K \subset \Omega_\varphi^r(Q)$.

2. Робастно отрицательно инвариантные компакты. Для системы (1) множество $M \subset X$ называется робастно отрицательно инвариантным или просто отрицательно инвариантным, если для любой точки $x \in M$ любая возможная отрицательная полуорбита этой точки целиком содержится в M, т.е. для любой точки $z \in X$, удовлетворяющей условию $F(z, w) = x$ при некотором $w \in W$, выполняется условие $z \in M$.

Для произвольного множества G введем обозначение

$$\breve{F}^{-1}(G) = \bigcup_{w \in W} F_w^{-1}(G),$$

где $F_w^{-1}(G)$ — полный прообраз множества G при фиксированном значении w.

Условие отрицательной инвариантности можно сформулировать следующим образом: множество $M \subset X$ отрицательно инвариантно для системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\breve{F}^{-1}(M) \subset M.$$

Введем в рассмотрение множества

$$\check{\Sigma}_\varphi^+ = \Bigl\{x \in X\colon \sup_{z \in \breve{F}^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \leq 0\Bigr\},$$

$$\check{\Sigma}_\varphi^- = \Bigl\{x \in X\colon \inf_{z \in \breve{F}^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \geq 0\Bigr\}.$$

Для произвольного множества $Q \subset X$ положим

$$\varphi_{\inf}^l(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^- \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^l(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x).$$

Если $Q = X$, то вместо $\varphi_{\inf}^l(Q)$ и $\varphi_{\sup}^l(Q)$ будем использовать обозначения $\varphi_{\inf}^l$ и $\varphi_{\sup}^l$.

Теорема 2. *Любой отрицательно инвариантный компакт системы* (1)*, содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве*

$$\Omega_\varphi^l(Q) = \Bigl\{x \in Q\colon \varphi_{\inf}^l(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}^l(Q)\Bigr\}.$$

Доказательство. Пусть $K \subset Q$ — отрицательно инвариантный компакт. Тогда непрерывная функция φ достигает на K своего наименьшего значения в точке $x_* \in K$, а своего наибольшего значения в точке $x^* \in K$. Поскольку K — отрицательно инвариантное множество, $\breve{F}^{-1}(x^*) \subset K$. Следовательно,

$$\sup_{z \in \breve{F}^{-1}(x^*)} \varphi(x) \leq \sup_{z \in K} \varphi(x) = \varphi(x^*)$$

и точка x^* принадлежит множеству $\check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q$. Поэтому для каждой точки $x \in K$ выполняются соотношения

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^*) \leq \sup_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x) = \varphi_{\sup}^l(Q).$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(x) \geq \varphi(x_*) \geq \varphi_{\inf}^l(Q)$, $x \in K$.

Таким образом, для каждой точки $x \in K$ верно двойное неравенство $\varphi_{\inf}^l(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}^l(Q)$, означающее, что $x \in \Omega_\varphi^l(Q)$. Тем самым доказано, что произвольно выбранный отрицательно инвариантный компакт K целиком содержится в $\Omega_\varphi^l(Q)$.

Предположим, что отображение $F\colon X \times W \to X$, задающее систему (1), для каждого фиксированного значения $w \in W$ является гомеоморфизмом. В этом случае систему (1) будем называть обратимой. Обозначим через F^{-1} отображение, определяемое равенством $F^{-1}(F(x,w),w) = x$ (т.е. F^{-1} — отображение, обратное $F(x,w)$ при фиксированном w). Систему

$$x_{n+1} = F^{-1}(x_n, w_n) \tag{2}$$

назовем системой, обратной системе (1). Отметим, что при этом система (1) является обратной системе (2).

Множество K есть положительно (отрицательно) инвариантный компакт системы (1) тогда и только тогда, когда оно есть отрицательно (положительно) инвариантный компакт обратной системы (2). В самом деле, положив $H(x,w) = F^{-1}(x,w)$, заключаем, что $F(K \times W) = \breve{H}^{-1}(K)$ и $H(K \times W) = \breve{F}^{-1}(K)$. Поэтому условие $F(K \times W) \subset K$ положительной инвариантности K для системы (1) совпадает с условием $\breve{H}^{-1}(K) \subset K$ отрицательной инвариантности K для системы (2), а условие $\breve{F}^{-1}(K) \subset K$ отрицательной инвариантности K для системы (1) совпадает с условием $H(K \times W) \subset K$ положительной инвариантности обратной системы.

3. Робастно инвариантные компакты. Для системы (1) множество $M \subset X$ назовем робастно инвариантным или просто инвариантным, если оно одновременно и робастно положительно инвариантно, и робастно отрицательно инвариантно, т.е. выполняются соотношения

$$F(M \times W) \subset M, \quad \breve{F}^{-1}(M) \subset M.$$

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ и произвольного множества $Q \subset X$ положим

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^- \cap \Sigma_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x).$$

Теорема 3. *Любой инвариантный компакт системы* (1)*, содержащийся в множестве* $Q \subset X$*, содержится в множестве*

$$\Omega_\varphi(Q) = \Big\{ x \in X : \varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q) \Big\}.$$

Доказательство. Пусть $K \subset Q$ — инвариантный компакт. Функция φ достигает на этом компакте наибольшего значения в некоторой точке $x^* \in K$. Тогда для любого значения $w \in W$ имеем $F(x^*, w) \in K$ (в силу условия положительной инвариантности), откуда $\varphi(F(x^*, w)) \leq \varphi(x^*)$. Следовательно, $x^* \in \Sigma_\varphi^-$. Кроме того, для любой пары $z \in X$ и $w \in W$, удовлетворяющей условию $F(z, w) = x^*$, имеем $z \in K$ (в силу условия отрицательной инвариантности) и $\varphi(z) \leq \varphi(x^*)$. Поэтому $x^* \in \check{\Sigma}^+{}_\varphi$. Отсюда вытекает, что для любой точки $x \in K$

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^*) \leq \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x) = \varphi_{\sup}(Q).$$

Аналогично доказывается неравенство $\varphi(x) \geq \varphi_{\inf}(Q)$, $x \in K$. Оба неравенства означают, что $K \subset \Omega_\varphi(Q)$.

4. Свойства локализирующих множеств. Свойства локализирующих множеств для робастно инвариантных компактных множеств дискретных систем с возмущениями во многом схожи со свойствами локализирующих множеств для непрерывных и дискретных систем без возмущений [6, 8, 9]. Установим основные свойства.

Свойство 1. *Пусть функция* φ *непрерывна на* X *и* $\psi(x) = h(\varphi(x))$*,* $x \in X$*, где* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— строго монотонная функция. Тогда для любого множества* $Q \subset X$ *имеем* $\Omega^r_\varphi(Q) = \Omega^r_\psi(Q)$*,* $\Omega^l_\varphi(Q) = \Omega^l_\psi(Q)$*,* $\Omega_\varphi(Q) = \Omega_\psi(Q)$*. В частности, это верно, если* $h(t) = at + b$*,* $a \neq 0$*.*

Доказательство. Доказательства всех трех случаев утверждения различаются незначительно. Поэтому ограничимся доказательством в случае положительно инвариантных компактов.

Если функция h возрастающая, то неравенство $\psi(x_1) \leq \psi(x_2)$ эквивалентно неравенству $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. Следовательно, эквивалентны неравенства

$$\sup_{w \in W} \psi(F(x, w)) \leq \psi(x) \quad \text{и} \quad \sup_{w \in W} \varphi(F(x, w)) \leq \varphi(x).$$

Это означает, что множества Σ_φ^- и Σ_ψ^- совпадают. Поэтому

$$\psi^r_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \Sigma_\psi^- \cap Q} \psi(x) = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} h(\varphi(x)) =$$

$$= h\Big(\sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x) \Big) = h\big(\varphi^r_{\sup}(Q)\big).$$

Аналогично $\psi^r_{\inf}(Q) = h\bigl(\varphi^r_{\inf}(Q)\bigr)$. Таким образом, неравенства $\psi^r_{\inf}(Q) \le \psi(x) \le \psi^r_{\sup}(Q)$ эквивалентны неравенствам $\varphi^r_{\inf}(Q) \le$ $\le \varphi(x) \le \varphi^r_{\sup}(Q)$. Тем самым доказано, что в случае возрастающей функции h множества $\Omega^r_\psi(Q)$ и $\Omega^r_\varphi(Q)$ совпадают.

Если функция h убывает, то неравенство $\psi(x_1) \le \psi(x_2)$ эквивалентно неравенству $\varphi(x_1) \ge \varphi(x_2)$. В силу этого эквивалентны неравенства

$$\sup_{w\in W} \psi(F(x,w)) \le \psi(x) \quad \text{и} \quad \inf_{w\in W} \varphi(F(x,w)) \ge \varphi(x).$$

Таким образом, $\Sigma^-_\psi = \Sigma^+{}_\varphi$ и

$$\psi^r_{\sup}(Q) = \sup_{x\in\Sigma^-_\psi\cap Q} \psi(x) = \sup_{x\in\Sigma^+{}_\varphi\cap Q} h(\varphi(x)) =$$

$$= h\Bigl(\inf_{x\in\Sigma^+_\varphi\cap Q} \varphi(x)\Bigr) = h\bigl(\varphi^r_{\inf}(Q)\bigr).$$

Аналогично $\psi^r_{\inf}(Q) = h\bigl(\varphi^r_{\sup}(Q)\bigr)$. В результате неравенства $\psi^r_{\inf}(Q) \le$ $\le \psi(x) \le \psi^r_{\sup}(Q)$ можно переписать в виде $h\bigl(\varphi^r_{\sup}(Q)\bigr) \le h(\varphi(x)) \le$ $\le h\bigl(\varphi^r_{\inf}(Q)\bigr)$, что эквивалентно неравенствам $\varphi^r_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi^r_{\sup}(Q)$. Тем самым совпадение множеств Ω^r_ψ и Ω^r_φ доказано и в случае убывающей функции h.

Свойство 2. *Если непрерывная функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ достигает на X точной верхней грани в некоторой точке $x^* \in Q$, то $\varphi^r_{\sup}(Q) = \varphi^l_{\sup}(Q) = \varphi_{\sup}(Q) = \varphi(x^*)$. Если функция φ достигает на X точной нижней грани в некоторой точке $x_* \in Q$, то $\varphi^r_{\inf}(Q) = \varphi^l_{\inf}(Q) = \varphi_{\inf}(Q) = \varphi(x_*)$.*

Доказательство. Второе утверждение сводится к первому, если поменять знак локализирующей функции. Кроме того, доказательства для значений $\varphi^r_{\sup}(Q)$, $\varphi^l_{\sup}(Q)$, $\varphi_{\sup}(Q)$ аналогичны. Поэтому ограничимся лишь первым из них. Если функция φ достигает на X точной верхней грани в некоторой точке $x^* \in Q$, то для любого $w \in W$ выполняется неравенство $\varphi(F(x^*,w)) \le \varphi(x^*)$. Следовательно,

$$\sup_{w\in W} \varphi(F(x^*,w)) - \varphi(x^*) \le 0$$

и точка x^* принадлежит множеству $\Sigma^-_\varphi \cap Q$. Ясно, что

$$\varphi^r_{\sup}(Q) = \sup_{x\in\Sigma^-_\varphi\cap Q} \varphi(x) \ge \varphi(x^*).$$

Но верно и противоположное неравенство, поскольку $\varphi(x^*)$ — точная верхняя грань функции φ на X. Значит, $\varphi^r_{\sup}(Q) = \varphi(x^*)$.

Для систем с возмущениями существуют аналоги свойств, установленных для дискретных систем без возмущений и связанных со сдвигами локализирующих множеств вдоль траекторий системы [6, 8].

Для произвольного множества $G \subset X$ введем обозначение

$$\overset{\frown}{F}{}^{-1}(G) = \bigcap_{w \in W} F_w^{-1}(G).$$

Свойство 3. *Любой положительно инвариантный компакт, содержащийся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $\overset{\frown}{F}{}^{-1}(G)$. В частности, если множество G содержит все положительно инвариантные компакты системы* (1), *то и множество $\overset{\frown}{F}{}^{-1}(G)$ содержит все положительно инвариантные компакты системы.*

Доказательство. Пусть $K \subset G$ — положительно инвариантный компакт и $x \in K$. Согласно определению положительно инвариантного множества, для произвольного $w \in W$ имеет место условие $F(x, w) \in K \subset G$. Это условие означает, что $x \in F_w^{-1}(G)$. Отсюда приходим к выводу, что $x \in \bigcap\limits_{w \in W} F_w^{-1}(G) = \overset{\frown}{F}{}^{-1}(G)$. Тем самым доказано, что $K \subset \overset{\frown}{F}{}^{-1}(G)$, т.е. любой положительно инвариантный компакт K, содержащийся в G, содержится в множестве $\overset{\frown}{F}{}^{-1}(G)$.

Для произвольного множества $G \subset X$ введем обозначение

$$\hat{F}(G) = \Bigl\{ y \in X \colon \overset{\smile}{F}{}^{-1}(y) \subset G \Bigr\}.$$

Множество $\hat{F}(G)$ представляет собой часть множества $F(G \times W)$ с добавлением тех точек $y \in X$, для которых прообраз $\overset{\smile}{F}{}^{-1}(y)$ пуст.

Множество $\hat{F}(G)$ можно определить следующим образом:

$$\hat{F}(G) = X \setminus F((X \setminus G) \times W).$$

Действительно, условие $\overset{\smile}{F}{}^{-1}(y) \subset G$ равносильно тому, что для любого $x \in X \setminus G$ и для любого $w \in W$ выполняется условие $F(x, w) \neq y$. Другими словами, включение $\overset{\smile}{F}{}^{-1}(y) \subset G$ эквивалентно условию $y \notin F((X \setminus G) \times W)$.

Свойство 4. *Любой отрицательно инвариантный компакт, содержащийся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $\hat{F}(G)$. В частности, если множество G содержит все отрицательно инвариантные компакты системы* (1), *то и множество $\hat{F}(G)$ содержит все отрицательно инвариантные компакты системы.*

Доказательство. Пусть $K \subset G$ — отрицательно инвариантный компакт и $x \in K$. Поскольку K — отрицательно инвариантное множество, выполняется соотношение $\overset{\smile}{F}{}^{-1}(x) \subset K \subset G$. Следовательно, $x \in \hat{F}(G)$. Тем самым доказано, что любой отрицательно инвариантный компакт $K \subset G$ содержится в множестве $\hat{F}(G)$.

Свойство 5. *Любой инвариантный компакт, содержащийся в множестве $G \subset X$, содержится и в множествах $\widehat{F}^{-1}(G)$ и $\hat{F}(G)$. В частности, если множество G содержит все инвариантные компакты системы* (1), *то множества $\widehat{F}^{-1}(G)$, $\hat{F}(G)$ и $\widehat{F}^{-1}(G) \cap \hat{F}(G)$ также содержат все инвариантные компакты системы.*

Доказательство. Если инвариантный компакт $K \subset X$ содержится в множестве G, то он как положительно инвариантный компакт содержится в множестве $\widehat{F}^{-1}(G)$ (свойство 3), а как отрицательно инвариантный компакт — в множестве $\hat{F}(G)$ (свойство 4). В частности, компакт K содержится в пересечении этих множеств $\widehat{F}^{-1}(G) \cap \hat{F}(G)$.

5. Максимальные робастно инвариантные компакты. Любое множество $G \subset X$ в фазовом пространстве X системы (1) порождает множества

$$G_0 = G, \quad G_k = G_{k-1} \cap \widehat{F}^{-1}(G_{k-1}), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots, \tag{3}$$

и их пересечение

$$G_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} G_k.$$

Теорема 5. *Для любого множества $G \subset X$ соответствующее множество G_∞ является положительно инвариантным для системы* (1).

Доказательство. Пусть $x \in G_\infty$. Тогда для произвольного $k \geq 1$ имеем $x \in G_k$. Следовательно, для любого $w \in W$ выполняется включение $x \in F_w^{-1}(G_{k-1})$, означающее, что $F(x, w) \in G_{k-1}$. Таким образом, для любого $w \in W$ имеем $F(x, w) \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_{k-1} = G_\infty$. Согласно определению, множество G_∞ положительно инвариантно.

Теорема 5. *Если множество G компактно, то соответствующее множество G_∞ — максимальный положительно инвариантный компакт системы* (1) *среди содержащихся в G положительно инвариантных компактов. В частности, если G содержит все положительно инвариантные компакты системы, то G_∞ — максимальный положительно инвариантный компакт системы.*

Доказательство. Так как множество G компактно, то все множества G_k замкнуты. Значит, множество G_∞ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. С учетом $G_\infty \subset G$ заключаем, что G_∞ — компакт. Согласно теореме 4 это множество есть положительно инвариантный компакт.

Согласно свойству 3 множество $G_1 = G_0 \cap \widehat{F}^{-1}(G_0)$ содержит все положительно инвариантные компакты рассматриваемой системы, содержащиеся в множестве G. Повторяя это умозаключение, делаем вывод, что все множества G_k являются локализирующими для положительно инвариантных компактов, содержащихся в множестве G. Таким образом, компакт G_∞ — пересечение всех множеств G_k — содержит все положительно инвариантные компакты, содержащиеся в G. Значит, это множество есть максимальный положительно инвариантный компакт среди содержащихся в G. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что согласно определению пустое множество является положительно инвариантным. Если для данного множества G соответствующее множество G_∞ оказалось пустым, то утверждение теоремы следует трактовать как отсутствие в G положительно инвариантных компактов рассматриваемой системы.

Любое множество $G \subset X$ в фазовом пространстве X системы (1) порождает множества

$$U_0 = G, \quad U_k = U_{k-1} \cap \hat{F}(G_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и их пересечение

$$U_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k.$$

Теорема 6. *Для любого множества $G \subset X$ соответствующее множество U_∞ для системы* (1) *является отрицательно инвариантным.*

Доказательство. Пусть $x \in U_\infty$. Тогда для произвольного $k \geq 1$ имеем $x \in U_k$. Следовательно, $x \in \hat{F}(U_{k-1})$. Последнее, согласно определению множества $\hat{F}(U_{k-1})$, означает, что $\breve{F}^{-1}(x) \subset U_{k-1}$. Таким образом, $\breve{F}^{-1}(x) \subset \bigcap\limits_{k \geq 1} U_{k-1} = U_\infty$. Итак, из соотношения $x \in U_\infty$ вытекает, что $\breve{F}^{-1}(x) \subset U_\infty$. В соответствии с определением приходим к выводу, что U_∞ — отрицательно инвариантное множество.

Теорема 7. *Если отображение F при любом фиксированном $w \in W$ является открытым, а множество G компактно, то соответствующее множество U_∞ — максимальный отрицательно инвариантный компакт системы* (1) *среди содержащихся в G. В частности, если G содержит все отрицательно инвариантные компакты системы, то U_∞ — максимальный отрицательно инвариантный компакт системы.*

Доказательство. Так как множество $U_0 = G$ компактно, то множество $\hat{F}(U_0)$ замкнуто. Действительно, в этом случае множество $X \setminus U_0$ открыто (в относительной топологии на X). Следовательно, при любом $w \in W$ множество $F(X \setminus U_0, w)$ открыто. Поэтому множество

$$F\big((X \setminus U_0) \times W\big) = \bigcup_{w \in W} F(X \setminus U_0, w)$$

открыто, а множество $\hat{F}(U_0) = X \setminus F\big((X \setminus U_0) \times W\big)$ замкнуто. Отсюда вытекает, что множество $U_1 = U_0 \cap \hat{F}(U_0)$ замкнуто. Повторяя рассуждения, заключаем, что все множества U_k замкнуты, а следовательно, и их пересечение U_∞ замкнуто.

Поскольку U_∞ — замкнутое подмножество компакта G, то U_∞ — компакт. Таким образом, согласно теореме 6 множество U_∞ — отрицательно инвариантный компакт.

Согласно свойству 4 множество U_1 включает все отрицательно инвариантные компакты рассматриваемой системы, содержащиеся в G. Повторяя это умозаключение, делаем вывод, что все множества U_k являются локализирующими для отрицательно инвариантных компактов, содержащихся в G. Таким образом, множество U_∞ — пересечение всех множеств U_k — содержит все отрицательно инвариантные компакты, содержащиеся в G. Значит, это множество есть максимальный отрицательно инвариантный компакт среди содержащихся в G.

Замечание 2. Если множество U_∞ пустое, то утверждение теоремы 7 следует трактовать так: система вообще не имеет отрицательно инвариантных компактов, содержащихся в множестве G.

Любое множество $G \subset X$ в фазовом пространстве X системы (1) порождает последовательность множеств

$$V_0 = G, \quad V_k = V_{k-1} \cap \widehat{F}^{-1}(V_{k-1}) \cap \hat{F}(V_{k-1}), \quad k = 1,\,2,\,\ldots, \tag{5}$$

и их пересечение

$$V_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Теорема 8. *Для любого множества $G \subset X$ соответствующее множество V_∞ для системы (1) является инвариантным.*

Доказательство. Пусть $x \in V_\infty$. Тогда $x \in V_k$ для всех $k \geq 1$. Значит, $x \in \widehat{F}^{-1}(V_{k-1})$ и для любого $w \in W$ имеем $x \in F_w^{-1}(V_{k-1})$. Последнее включение означает, что $F(x, w) \in V_{k-1}$. Таким образом, $F(V_\infty \times W) \subset V_{k-1}$, $k \geq 1$, т.е. $F(V_\infty \times W) \subset V_\infty$ и множество V_∞ положительно инвариантно.

Из условия $x \in V_\infty$ вытекает, что $x \in \hat{F}(V_{k-1})$, $k \geq 1$. Значит, $\smile{F}^{-1}(x) \subset V_{k-1}$, $k \geq 1$, откуда $\smile{F}^{-1}(x) \subset V_\infty$. Таким образом, $\smile{F}^{-1}(V_\infty) \in V_\infty$ и множество V_∞ — отрицательно инвариантный компакт. Теорема доказана.

Теорема 9. *Если отображение F при любом фиксированном $w \in W$ является открытым, а множество G компактно, то множество V_∞ — максимальный инвариантный компакт системы (1) среди содержащихся в G. В частности, если G включает все инвариантные* *компакты системы, то V_∞ — максимальный инвариантный компакт этой системы.*

Доказательство. Если множество V замкнуто, то множества $\widehat{F}^{-1}(V)$ и $\hat{F}(V)$ замкнуты (см. доказательства теорем 5 и 7). Учитывая, что $V_0 = G$ — компакт, заключаем, что все множества V_k, $k \geq 1$, замкнуты. Следовательно, и множество V_∞ замкнуто. А поскольку V_∞ есть замкнутое подмножество компакта G, делаем вывод, что V_∞ — компакт. Согласно теореме 8 множество V_∞ — инвариантный компакт.

Согласно свойству 5 каждое из множеств V_k, $k \geq 0$, включает все инвариантные компакты рассматриваемой системы, содержащиеся в множестве G. Поэтому и множество V_∞, как пересечение локализирующих множеств, содержит все инвариантные компакты, содержащиеся в G, т.е. является максимальным в G инвариантным компактом. Теорема доказана.

Замечание 3. Если множество V_∞ оказалось пустым, то утверждение теоремы 9 следует трактовать так: в множестве G вообще нет инвариантных компактов системы.

Отметим, что последовательность $\{G_k\}$ есть последовательность убывающих множеств. Поэтому множество G_∞ можно рассматривать как предел последовательности множеств [10]. Если исходное множество G компактно, то G_∞ есть предел последовательности $\{G_k\}$ и в смысле топологии арифметического пространства, т.е. для любого открытого множества A, включающего в себя G_∞, все множества G_k, начиная с некоторого, также содержатся в A. Действительно, последовательность $\{G_k \setminus A\}$ есть последовательность убывающих замкнутых подмножеств компакта, имеющая пустое пересечение. В такой последовательности все множества, начиная с некоторого, пустые. Но если $G_k \setminus A = \varnothing$, то $G_k \subset A$.

Аналогичные рассуждения верны и для множеств U_∞ и V_∞.

6. Неопределенная система Хенона. Рассмотрим систему [11]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + by_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \tag{6}$$

полагая, что значение $b \in \mathbb{R}$ известно, а параметр a точно не определен и может иметь произвольное значение на отрезке $[a_*,\ a^*]$, где $a_* < a^*$. В данном случае

$$F(x, y, w) = \begin{pmatrix} w + by - x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad X = \mathbb{R}^2, \quad W = [a_*,\ a^*].$$

Локализация робастно положительно инвариантных компактов. В качестве локализирующей рассмотрим линейную функцию

$\varphi(x,y) = Dx + Ey$. Тогда $\varphi(F(x,y,w)) = D(w + by - x^2) + Ex$. Множество Σ^-_φ описывается неравенством

$$\sup_{w\in[a_*,\,a^*]} \big(D(w + by - x^2) + Ex - Dx - Ey\big) \leq 0,$$

а множество $\Sigma^+{}_\varphi$ — неравенством

$$\inf_{w\in[a_*,\,a^*]} \big(D(w + by - x^2) + Ex - Dx - Ey\big) \geq 0.$$

Обозначим

$$w^* = \sup_{w\in[a_*,\,a^*]} Dw, \quad w_* = \inf_{w\in[a_*,\,a^*]} Dw.$$

При этих обозначениях для нахождения $\varphi^r_{\inf}$ и $\varphi^r_{\sup}$ получаем следующие оптимизационные задачи:

$$\begin{cases} Dx + Ey \to \sup, \\ (Db - E)y \leq Dx^2 - (E - D)x - w^*; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} Dx + Ey \to \inf, \\ (Db - E)y \geq Dx^2 - (E - D)x - w_*. \end{cases} \tag{8}$$

Задачи (7), (8) детально исследованы в [8]. При $D = 0$ они имеют тривиальные решения $+\infty$ и $-\infty$. Поэтому можно считать, что $D \neq 0$, а согласно свойству 1 можно ограничиться случаем $D = -1$. В этом случае $w_* = -a^*$, $w^* = -a_*$, а задачи (7), (8) сводятся к следующим:

$$\begin{cases} -x + Ey \to \sup, \\ x^2 + (E+1)x - (b+E)y - a_* \leq 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} -x + Ey \to \inf, \\ x^2 + (E+1)x - (b+E)y - a^* \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Задача (10) имеет тривиальное решение $\varphi^r_{\inf} = -\infty$. Задача (9) имеет тривиальное решение $\varphi^r_{\sup} = +\infty$ при $E \leq -b$ и при $E \geq 0$. Остается случай $-b < E < 0$, при котором

$$\varphi^r_{\sup} = -\frac{4E^2a_* + (E^2 - b)^2}{4E(b+E)}.$$

Итак, при $-b < E < 0$ имеем локализирующее множество

$$-x + Ey \leq -\frac{4E^2a_* + (E^2 - b)^2}{4E(b+E)}. \tag{11}$$

Преобразуем неравенство (11):

$$x \geq Ey + \frac{4E^2a_* + (E^2 - b)^2}{4E(b+E)} = -\lambda y - \frac{4\lambda^2a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)},$$

где параметр $\lambda = -E$ может принимать любое значение на интервале $(0,\, b)$. Из этого представления получаем неравенство, описывающее пересечение семейства локализирующих множеств:

$$x \geq -\min_{\lambda \in (0,\, b)} \left(\lambda y + \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)} \right).$$

Используя семейство локализирующих множеств (11), на основании свойства 3 можно получить семейство новых локализирующих множеств. Пусть G_λ, $\lambda \in (0,\, b)$, — множество, описываемое неравенством

$$-x - \lambda y \leq \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}, \tag{12}$$

которое получается из неравенства (11) в результате замены параметра $\lambda = -E$. Множество $F_w^{-1}(G_\lambda)$ описывается неравенством, которое получается, если в неравенстве (12) переменные x и y заменить координатами отображения F:

$$-(w + by - x^2) - \lambda x \leq \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}. \tag{13}$$

Неравенство (13) эквивалентно следующему:

$$x^2 - \lambda x - by \leq w + \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}.$$

Пересечение $\widehat{F}^{-1}(G_\lambda)$ множеств $F_w^{-1}(G_\lambda)$ по всем $w \in W$ описывается неравенством

$$x^2 - \lambda x - by \leq \inf_{w \in W} w + \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)},$$

или

$$x^2 - \lambda x - by \leq a_* + \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}. \tag{14}$$

Из неравенств (14) можно получить неравенство, описывающее пересечение множеств $\widehat{F}^{-1}(G_\lambda)$ по всем $\lambda \in (0,\, b)$:

$$y \geq \max_{\lambda \in (0,b)} \left(\frac{x^2 - \lambda x}{b} - \frac{a_*}{b} - \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)} \right). \tag{15}$$

На рис. 1 изображены траектория системы Хенона (6) с параметрами $a_* = 1{,}39$, $a^* = 1{,}41$, $b = 0{,}3$ и граница локализирующего множества (15).

Локализация робастно отрицательно инвариантных компактов. Поскольку система Хенона (6) является обратимой, локализация ее отрицательно инвариантных компактов сводится к локализации положительно инвариантных компактов обратной системы. Обратной к

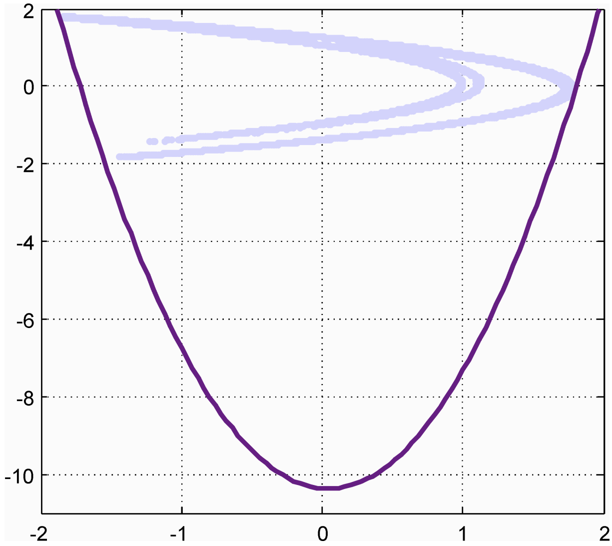

Рис. 1. Траектория системы Хенона и граница локализирующего множества для робастно положительно инвариантных компактов

системе (6) является система

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= -\frac{a}{b} + \frac{x_n}{b} + \frac{y_n^2}{b}. \end{aligned} \tag{16}$$

Заменой переменных $\xi = -\dfrac{y}{b}$, $\eta = -\dfrac{x}{b}$ система (16) сводится к самой системе Хенона с параметрами $\tilde{a} = \dfrac{a}{b^2}$, $\tilde{b} = \dfrac{1}{b}$:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \frac{a}{b^2} + \frac{\eta_n}{b} - \xi_n^2, \\ \eta_{n+1} &= \xi_n. \end{aligned} \tag{17}$$

Поэтому локализирующие множества для положительно инвариантных компактов системы (16) можно получить, исходя из результатов построения локализирующих множеств для системы Хенона. Параметр неопределенности $\tilde{a} = \dfrac{a}{b^2}$ меняется на отрезке $[a_*/b^2,\ a^*/b^2]$. Положив $\tilde{a}_* = a_*/b^2$, $\tilde{a}^* = a^*/b^2$, из неравенства (12), описывающего семейство локализирующих множеств для положительно инвариантных компактов системы Хенона, путем замены переменных и параметров получим

$$-\xi - \lambda\eta \leq \frac{4\lambda^2\tilde{a}_* + (\lambda^2 - \tilde{b})^2}{4\lambda(\tilde{b} - \lambda)},$$

откуда, восстанавливая исходные переменные и параметры, находим неравенство, описывающее семейство локализирующих множеств для положительно инвариантных компактов системы (16):

$$\lambda x + y \le \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 b - 1)^2}{4\lambda(1 - b\lambda)}, \quad \lambda \in \left(0,\ \frac{1}{b}\right).$$

Пересечение этого семейства описывается неравенством

$$y \le \min_{\lambda\in(0,\,1/b)} \left(-\lambda x + \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 b - 1)^2}{4\lambda(1 - b\lambda)} \right) = \\ = \frac{1}{b} \min_{\mu\in(0,\,1)} \left(-\mu x + \frac{4\mu^2 a_* + (\mu^2 - b)^2}{4\mu(1 - \mu)} \right). \quad (18)$$

Неравенство (14) для системы (17) дает семейство локализирующих множеств

$$\xi^2 - \lambda\xi - \tilde{b}\eta \le \tilde{a}_* + \frac{4\lambda^2 \tilde{a}_* + (\lambda^2 - \tilde{b})^2}{4\lambda(\tilde{b} - \lambda)}.$$

Восстанавливая исходные переменные и параметры, получаем:

$$y^2 + \lambda b y + x \le a_* + \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 b - 1)^2}{4\lambda(1 - \lambda b)} b,$$

или, меняя параметр λ на $\mu = \lambda b$,

$$y^2 + \mu y + x \le a_* + \frac{4\mu^2 a_* + (\mu^2 - b)^2}{4\mu(1 - \mu)}.$$

Пересечение соответствующих локализирующих множеств описывается неравенством

$$x \le a_* - y^2 + \min_{\mu\in(0,1)} \left(-\mu y + \frac{4\mu^2 a_* + (\mu^2 - b)^2}{4\mu(1 - \mu)} \right). \quad (19)$$

Итак, неравенства (18) и (19) описывают локализирующие множества для отрицательно инвариантных компактов системы Хенона (6). На рис. 2 изображены траектория системы Хенона с параметрами $a_* = 1{,}39$, $a^* = 1{,}41$, $b = 0{,}3$ и граница локализирующего множества (19).

Локализация робастно инвариантных компактов. Локализирующие множества для инвариантных компактов системы (6) можно получить как пересечение локализирующих множеств для положительно инвариантных компактов и отрицательно инвариантных компактов. На рис. 3 изображены траектория системы Хенона с параметрами $a_* = 1{,}39$, $a^* = 1{,}41$, $b = 0{,}3$ и граница локализирующего множества для инвариантных компактов, полученного пересечением множеств (15) и (19).

Локализирующее множество на рис. 3 оказалось компактным. Согласно теореме 9 система (6) либо вообще не имеет инвариантных ком-

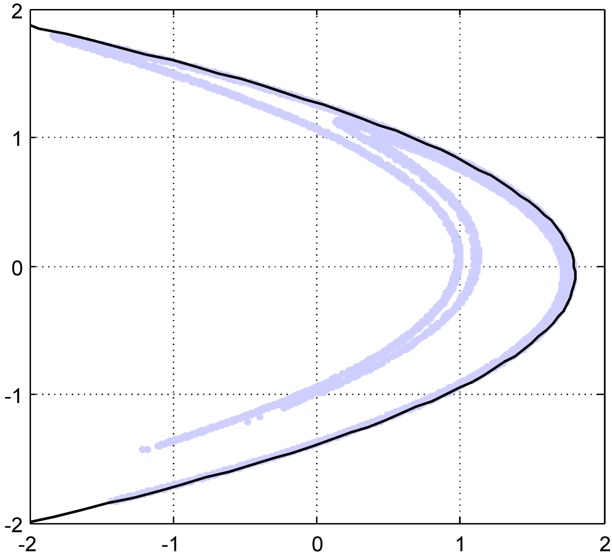

Рис. 2. Траектория системы Хенона и граница локализирующего множества для робастно отрицательно инвариантных компактов

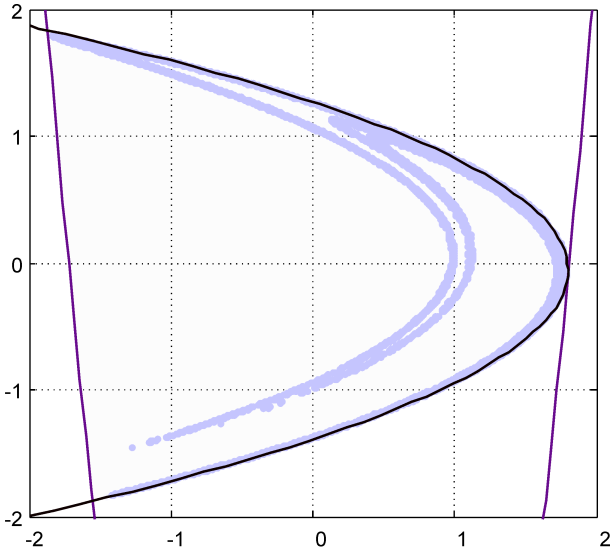

Рис. 3. Траектория системы Хенона и граница локализирующего множества для робастно инвариантных компактов

пактов, либо у нее существует положительно инвариантный компакт. Отметим, что изображенная траектория, начинающаяся в точке $(1,\, 0)$, незначительно выходит за пределы локализирующего множества. Это указывает на то, что при определенных значениях последовательности возмущений траектория уходит в бесконечность. Компактный же характер траектории, изображенной на рисунке, объясняется статистическими свойствами последовательности возмущений $\{w_n\}$, с использованием которой строилась траектория. Эта последовательность была построена с помощью датчика случайных чисел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 09-07-00327 и 11-01-00733) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4144.2010.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolmanovsky I., Gilbert E. G. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems // Mathematical problems in engineering. – 1998. Vol. 4. – P. 317–367.
2. Raković S. V., Grieder P., Kvasnica M., Mayne D. Q., Morari M. Computation of invariant sets for piecewise affine discrete time systems subject to bounded disturbances // Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas. Dec. 2004. Vol. 2. – P. 1418–1423.
3. Raković S. V., Kerrigan E. C., Mayne D. Q., Lygeros J. Reachability analysis of discrete-time systems with disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, no. 4. – P. 546–561.
4. Kerrigan E. C., Maciejowski J. M. Invariant sets for constrained nonlinear discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control // Proc. 39rd IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney, NSW, Australia. Dec. 2000. V. 5. – P. 4951–4956.
5. Крищенко А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1597–1604.
6. Канатников А. Н., Коровин С. К., Крищенко А. П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем // Докл. РАН. – 2010. – Т. 431, № 3. – С. 323–325.
7. Канатников А. Н., Коровин С. К., Крищенко А. П. Максимальные инвариантные компакты динамических систем // Докл. РАН. – 2011. – Т. 437, № 5. – С. 609–612.
8. Канатников А. Н. Функциональный метод локализации инвариантных компактов в дискретных системах // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1601–1611.
9. Канатников А. Н. Локализация инвариантных компактов в дискретных системах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Сер. Естественные науки. – 2011. № 1. – С. 3–17.
10. Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.: URSS, 2010. – 304 с.
11. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // В сб. Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981. – С. 152–163.

Статья поступила в редакцию 30.03.2011

Анатолий Николаевич Канатников родился в 1954 г., окончил в 1976 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 55 научных работ по теории функций, дифференциальным уравнениям, информатике.

A.N. Kanatnikov (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 55 publications in the field of theory of functions, differential equations, information technologies.