

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В НАКОПИТЕЛЯХ ЭНЕРГИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТИПА

А.К. Косакян, Г.Н. Кувыркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: kosakian@gmail.com; fn2@bmstu.ru

*Приведены краткие сведения о накопителях энергии цилиндрического типа с фазовым переходом. Рассмотрены одномерные однофазная и двухфазная задачи плавления как математические модели фазовых превращений в накопителях тепловой энергии. Даны рекомендации по использованию различных соотношений для определения коэффициента теплопередачи между теплоносителем и наполнителем через стенку тепловой трубки в отдельных частных случаях ламинарного и турбулентного течения теплоносителя. Рассмотрена и обоснована возможность применения подхода, аналогичного решению Неймана для задачи Стефана в прямоугольной системе координат, при проведении расчетов однофазной модели плавления наполнителя. Приведено оценочное время фазовых превращений в накопителе, в котором в качестве наполнителя применяется парафин, а в качестве теплоносителя — вода. Проиллюстрированы зависимости положения границы раздела фаз от времени и распределения температуры жидкой фазы наполнителя от радиальной координаты и времени.*

**Ключевые слова:** накопитель энергии, фазовый переход, утилизация (рекуперация) теплоты, теплопередача в трубах.

## MATHEMATICAL MODELING OF PHASE CHANGES PROCESSES IN CYLINDRICAL ENERGY STORAGE

A.K. Kosakian, G.N. Kuvyrkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: kosakian@gmail.com; fn2@bmstu.ru

*The paper covers a brief overview on cylindrical energy storages with phase change. One-dimensional one-phase and two-phase problems of melting are considered as mathematical models of phase changes in heat storages. Recommendations on use of different ratios for determining heat transfer coefficient between heat transfer fluid and filler through the wall of the heat pipe are given for some particular cases of laminar and turbulent flow of heat transfer fluid. For calculations of one-phase model of melting filler the authors considered and justified possibility of using an approach similar to the Neumann solution for Stefan problem in rectangular coordinate system. Estimated time of phase change is given for the storage in which paraffin as filler and water as heat transfer fluid. Dependence for the position of liquid-solid interfaces from time and temperature distribution of filler liquid phase from radial coordinate have been illustrated.*

**Keywords:** energy storage, phase change, heat utilization, heat recuperation, heat transfer in pipes.

В последнее время вопросу экологичности производства уделяется все больше внимания. С каждым годом увеличивается число научных исследований, направленных на повышение КПД существующих технологий и создание новых технологий, обладающих повы-

шенной энергоэффективностью. Особый интерес инженерного сообщества всего мира вызывают технологии утилизации (рекуперации) теплоты.

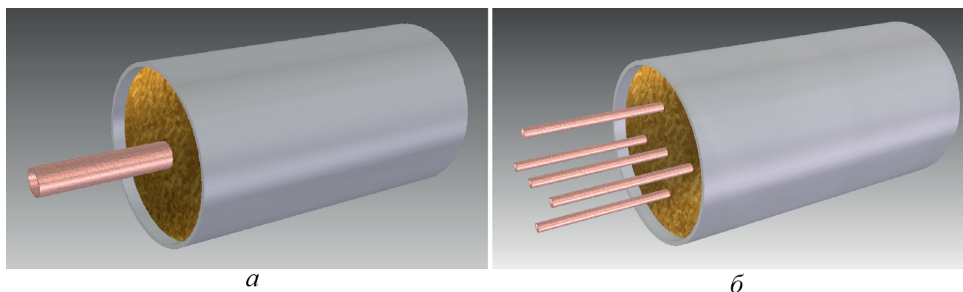
Рекуперацией теплоты называется процесс частичного или полного возвращения тепловой энергии в техническую систему, ее вырабатывающую. С конца XX в. и по настоящее время широкое применение в автомобилестроении получили технологии рекуперативного торможения. В еще больших масштабах рекуперация теплоты используется на промышленных производствах. Одна из технологий рекуперации теплоты — накопители энергии с фазовым переходом.

Известно, что при смене агрегатного состояния вещества происходит значительное выделение или поглощение теплоты при малом изменении температуры. Вследствие этого тепловые аккумуляторы с применением материалов с фазовым переходом являются высокоэффективным решением, позволяющим накапливать большое количество энергии, и широко применяются в солнечной энергетике, тепловых насосах, системах термического контроля космических аппаратов [1]. Проводятся исследования по использованию таких материалов для обогрева и охлаждения зданий [1].

В современной промышленности наиболее распространены тепловые накопители, имеющие форму параллелепипеда, сплошного цилиндрического контейнера или трубы, заполненной плавким материалом [2]. В последних наполнитель могут пересекать поперечные или продольные ребра радиатора для лучшего теплового контакта [3]. Встречаются накопители и более сложной формы.

Несмотря на разнообразие форм, принцип работы у большинства тепловых накопителей общий. Поясним принцип рекуперации тепловой энергии в таких системах на примере цилиндрического накопителя (рис. 1).

Как правило, тепловые аккумуляторы состоят из изоляционной оболочки, плавкого наполнителя и проходящих через него трубок



**Рис. 1.** Схематическое изображение поперечного сечения цилиндрического теплового накопителя с одной (а) и пятью (б) тепловыми трубками

с теплоносителем, выполненных из материала с высокой теплопроводностью, например, из меди [3]. В качестве плавкого материала обычно выбирают парафины, жирные кислоты, гидраты солей, сплавы некоторых металлов, эвтектические сплавы и др. Более полный список применяемых составов и их характеристики можно найти в работах [1, 3].

Плавкий материал наполнителя, меняя свое агрегатное состояние под воздействием трубок с теплоносителем, поглощает энергию, тем самым выступая в роли теплового аккумулятора. Когда требуется запустить процесс в обратную сторону, наполнитель охлаждается и передает теплоту обратно в систему.

Большое число работ, связанных с моделированием фазовых переходов в тепловых накопителях, прямо указывает на возрастающую актуальность этой технологии. Решая задачи плавления в ограниченном пространстве, большинство авторов предлагают аппроксимации рассматриваемых явлений или приводят полностью численное решение [2, 4, 5]. Однако, если геометрия рассматриваемой технической системы достаточно сложна и необходимо решение трехмерной задачи в общем случае, то время, требуемое для проведения численного эксперимента на персональном компьютере, может достигать нескольких дней. Если по окончании расчетов погрешность решения превышает заданное значение или обнаруживаются иные недостатки полученных результатов, то необходимы повторные вычисления с корректировкой параметров или применением другого численного метода.

Для сокращения временных затрат используют кластеры, различные услуги облачных вычислений и суперкомпьютеры. Кроме того, ускорению вычислений способствует распараллеливание программ, использование при вычислениях графических ускорителей, специализированных архитектур центральных процессоров и пр. Однако перечисленные способы не всегда могут быть реализованы, так как либо предъявляют особые требования к оборудованию, либо являются причиной дополнительных финансовых или временных затрат (в качестве примера можно привести очереди на использование суперкомпьютеров).

Именно поэтому при расчете любой сложной технической системы возникает необходимость предварительных аналитических оценок, позволяющих в короткий срок определить особенности рассматриваемой задачи и дать те или иные рекомендации для последующего вычислительного эксперимента. Такое калибровочное решение позволяет сократить общее время расчетов, что немаловажно в условиях работы с тендерами и иными внешними или внутренними заказами научно-исследовательских и коммерческих организаций.

**Математическая модель.** В настоящей работе будем использовать следующие обозначения:  $a, a_1, a_2$  — температуропроводности теплоносителя, наполнителя в жидкой фазе и наполнителя в твердой фазе,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $c_1, c_2$  — удельные массовые теплоемкости наполнителя в жидкой и твердой фазах,  $\text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $D'$  — гидравлический диаметр тепловой трубки,  $\text{м}$ ;  $\text{Fo}$  — число Фурье;  $l$  — длина накопителя,  $\text{м}$ ;  $L$  — удельная теплота плавления наполнителя,  $\text{кДж}/\text{кг}$ ;  $r$  — радиальная координата,  $\text{м}$ ;  $R$  — радиальная координата фронта плавления,  $\text{м}$ ;  $R_0, R_1$  — внутренние радиусы тепловой трубки и слоя наполнителя,  $\text{м}$ ;  $R_2$  — внешний радиус слоя наполнителя,  $\text{м}$ ;  $\text{St}_1, \text{St}_2$  — число Стефана для жидкой и твердой фаз;  $t$  — время,  $\text{с}$ ;  $T$  — температура наполнителя,  $\text{К}$ ;  $T_0$  — температура плавления наполнителя,  $\text{К}$ ;  $T'_0$  — начальная температура наполнителя,  $\text{К}$ ;  $T_1$  — температура теплоносителя,  $\text{К}$ ;  $T_2$  — температура внутренней поверхности стенки тепловой трубки,  $\text{К}$ ;  $V_0$  — скорость течения теплоносителя,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи от теплоносителя стенке трубки,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости теплоносителя,  $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ ;  $\eta'$  — коэффициент динамической вязкости теплоносителя при температуре стенки тепловой трубки,  $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ ;  $\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности теплоносителя, стенки тепловой трубки, наполнителя в жидкой и твердой фазах,  $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ;  $\rho, \rho_1, \rho_2$  — плотности теплоносителя, наполнителя в жидкой и твердой фазах,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Рассмотрим накопитель энергии цилиндрического типа с одной тепловой трубкой, ось симметрии которой совпадает с осью симметрии накопителя. Слой наполнителя толщиной  $R_2 - R_1$  имеет начальную температуру, равную температуре плавления  $T_0$ . При достаточно хорошей теплоизоляции поверхности накопителя краевыми эффектами у его торцов можно пренебречь. Это позволяет перейти от трехмерной постановки задачи к двухмерной, а поскольку в таком случае модель осесимметрична, и вовсе к одномерной.

Прежде чем представить математическую модель, перечислим допущения, принятые в настоящей работе:

- 1) скрытая теплота плавления постоянна; процесс ее поглощения происходит при постоянной температуре  $T_0$  фазового перехода;
- 2) фазы разделены поверхностью бесконечно малой толщины;
- 3) теплофизические характеристики материала в каждой фазе неизменны.

Однофазная задача представлена соотношениями [4]

$$\rho_1 c_1 T_{,t} = \frac{\lambda_1}{r} (r T_{,r})_{,r}, \quad R_1 < r < R(t), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$T(R(t), t) = T_0, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$\rho_1 L R_{,t}(t) = -\lambda_1 T_{,r}(R(t), t), \quad t > 0; \quad (3)$$

$$T(R(0), 0) = T_0; \quad (4)$$

$$R(0) = R_1 \quad (5)$$

вместе со смешанным граничным условием

$$-\lambda_1 T_{,r}(R_1, t) = k[T_1 - T(R_1, t)] + \beta q(t), \quad T_1 > T_0, \quad q(t) > 0, \quad t > 0, \quad (6)$$

где  $\beta \in [0; 1]$  — числовой коэффициент;  $x_{,y} \equiv \partial x / \partial y$ . В подавляющем большинстве практических случаев учет плотности теплового потока в (6) будет излишним, однако он необходим при наличии внутренних источников теплоты, если, например, теплоносителем является радиоактивное вещество или в нем происходят химические реакции. Тогда  $q(t)$  — плотность теплового потока, проходящего через стенку тепловой трубки, Вт/м<sup>2</sup>.

В большинстве практических случаев характерное время прогрева стенки тепловой трубки  $\tau_0 = c_0 \rho_0 (R_1 - R_0)^2 / \lambda_0$  намного меньше характерного времени прогрева слоя наполнителя  $\tau_1 = c_1 \rho_1 (R_2 - R_1)^2 / \lambda_1$ . В частности, при толщине стенки медной трубки  $R_1 - R_0 = 0,001$  м и толщине слоя парафина  $R_2 - R_1 = 0,045$  м имеем  $\tau_1 / \tau_0 \approx 3,3 \cdot 10^6$ . Теплофизические характеристики указанных материалов, необходимые для вычисления этого соотношения [6, 7], приведены ниже:

	Теплоемкость, Дж/(кг·К)	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Медь .....	385	395	8 900
Парафин .....	2 384	0,15	897

Поскольку  $\tau_1 \gg \tau_0$ , при определении коэффициента теплопередачи  $k$  между теплоносителем и наполнителем через стенку тепловой трубки в граничном условии (6) примем, что количество теплоты, переданное от теплоносителя в трубке ее стенке, равно количеству теплоты, переданному через эту стенку. Следовательно, имеют место следующие равенства для линейной плотности теплового потока:

$$q_l = \frac{Q}{l} = 2\alpha\pi R_0(T_1 - T_2(t));$$

$$q_l = \frac{2\pi\lambda_0(T_2(t) - T(R_1, t))}{\ln(R_1/R_0)}.$$

Откуда получаем выражение для определения линейного коэффициента теплопередачи (на 1 м длины трубки) [8]:

$$k_l = \frac{q_l}{\pi(T_1 - T(R_1, t))} = \frac{1}{\frac{1}{2\alpha R_0} + \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{R_1}{R_0}}. \quad (7)$$

Плотность теплового потока, проходящего через внешнюю поверхность тепловой трубки, определяется соотношением

$$\bar{q} = \frac{k_l}{2R_1}(T_1 - T(R_1, t)) = k(T_1 - T(R_1, t)). \quad (8)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  в выражении (7), в свою очередь, также требует определения. Рассмотрим способы его нахождения в различных частных случаях.

При вынужденной конвекции в трубах с круглым сечением в условиях ламинарного течения ( $Re = 2300$ ) имеет место зависимость [9]

$$Nu = 1,86 \left( Pe \frac{D'}{l} \right)^{1/3} \left( \frac{\eta}{\eta'} \right)^{0,14}, \quad (9)$$

где  $Nu = (\alpha D')/\lambda$ ,  $Pe = RePr$ ,  $Re = (\rho V_0 D')/\eta$ ,  $Pr = \eta/(\rho a)$  — числа Нуссельта, Пекле, Рейнольдса и Прандтля.

Если температура внутренней поверхности стенки  $T_2$  одинакова во всех ее сечениях, то при  $Pe D'/l \leq 12$  вместо выражения (9) можно использовать более простое соотношение [10–12]

$$Nu \approx 3,66. \quad (10)$$

Другим упрощением (9) может служить равенство [10, 12]

$$Nu \approx 4,36, \quad (11)$$

верное при линейном законе изменения температуры стенки тепловой трубки [10].

В крупномасштабных промышленных образцах накопителей энергии в тепловых трубах может возникнуть турбулентное течение. В этом случае выражения (9)–(11) применять нельзя. Вместо них необходимо воспользоваться иным соотношением, например, вариацией уравнения Диттуса – Болтера [9–12]

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n, \quad (12)$$

в котором  $n = 0,4$  при нагреве теплоносителя и  $n = 0,3$  при его охлаждении (при разрядке и зарядке накопителя энергии, т.е. при отвердевании и плавлении его наполнителя). Уравнение (12) верно при выполнении условий [9]:

- $0,7 < Pr < 100$ ;

- $Re > 10^4$ ;
- $l/D' > 60$ ;
- величина  $|T_1 - T_2|$  достаточно мала [12].

Некоторым обобщением (в смысле практического применения) формулы (12) является выражение [12]

$$Nu = 0,027Re^{0,8}Pr^{1/3} \left( \frac{\eta}{\eta'} \right)^{0,14} \quad (13)$$

с наложением условий

- $0,7 \lesssim Pr \lesssim 16700$ ;
- $Re \gtrsim 10^4$ ;
- $l/D' \gtrsim 10$ .

Формулы (12) и (13) дают более точный результат при вычислении коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , если величина  $T_2$  постоянна. Тем не менее в отдельных случаях погрешность вычислений при использовании этих выражений может достигать 25 % [12]. Если внутренняя поверхность стенки тепловой трубки гладкая, то следует воспользоваться следующим соотношением, обеспечивающим погрешность, как правило, не более 10 % [12]:

$$Nu = \frac{(f/8)(Re - 1000)Pr}{1 + 12,7(f/8)^{0,5}(Pr^{2/3} - 1)}, \quad f = (0,79 \ln Re - 1,64)^{-2}. \quad (14)$$

Выражение (14) верно при  $0,5 \lesssim Pr \lesssim 2000$  и  $3000 \lesssim Re \lesssim 5 \cdot 10^6$ .

Формулы (9)–(14) необходимо использовать с определенной аккуратностью. Как правило, подобные соотношения получены из анализа размерностей или экспериментально и способны приводить к относительно большим погрешностям, особенно если они использованы с нарушением соответствующих допущений. При выборе конкретного метода определения коэффициента теплоотдачи необходимо предварительно ознакомиться с различными частными случаями, в целях краткости здесь не приведенными, но доступными в работах [9, 12].

**Построение решения.** Воспользуемся заменой переменных, аналогичной замене при построении решения Неймана для задачи Стефана в прямоугольной системе координат [4]. Для этого введем новую переменную  $\chi = r/\sqrt{a_1 t}$  и будем искать решение задачи (1)–(6) в виде  $T(r, t) = F(\chi)$ .

Решением уравнения (1), которое после перехода к новой переменной имеет вид

$$-F_{,\chi} \left( \frac{\chi^2}{2} + 1 \right) = \chi F_{,\chi\chi},$$

является выражение

$$F(\chi) = C_1 E_1 \left( \frac{\chi^2}{4} \right) + C_2.$$

Здесь  $E_1(x)$  — неполная гамма-функция  $\Gamma(0, x)$ , связанная с интегральной показательной функцией  $Ei(x)$  соотношением [13]

$$E_1(x) = \Gamma(0, x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = -Ei(-x).$$

Вернувшись к переменным  $r$  и  $t$ , получим решение поставленной задачи в виде

$$T(r, t) = C_1 E_1\left(\frac{r^2}{4a_1 t}\right) + C_2.$$

Легко определив неизвестные  $C_1$  и  $C_2$  из граничных условий (2) и (6), запишем зависимость распределения температуры по сечению цилиндра от времени:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{E_1\left(\frac{r^2}{4a_1 t}\right) - E_1\left(\frac{R^2(t)}{4a_1 t}\right)}{kE_1\left(\frac{R_1^2}{4a_1 t}\right) - kE_1\left(\frac{R^2(t)}{4a_1 t}\right) + \frac{2\lambda_1}{R_1} \exp\left(-\frac{R_1^2}{4a_1 t}\right)} \times \\ \times [\beta q(t) + kT_1 - kT_0]. \quad (15)$$

Из (15) следует, что при  $t \rightarrow 0$  температура жидкой фазы наполнителя стремится к температуре  $T_0$ , и, таким образом, начальное условие (4) удовлетворяется. Отметим, что при  $k \rightarrow \infty$  и  $t > 0$   $T(R_1, t) = T_1$ . Это выражение также согласуется с физическим смыслом: в частном случае граничного условия первого рода температура наполнителя в жидкой фазе у границы  $r = R_1$  равна  $T_1$ . Следовательно, решение, построенное по аналогии с решением Неймана, действительно имеет право на существование.

В качестве критериального соотношения для определения коэффициента теплопередачи  $k$  выберем выражение (9). При этом предположим, что гидравлический диаметр тепловой трубки  $D'$  равен геометрическому диаметру внутренней поверхности ее стенки  $2R_0$ , длина накопителя  $l = 1$  м, а температура теплоносителя  $T_1$  однородна и постоянна, вследствие чего в (9)  $\eta = \eta'$ .

При вычислениях были использованы следующие исходные данные [6, 7]:  $R_0 = 0,004$  м;  $R_1 = 0,005$  м;  $R_2 - R_1 = 0,045$  м;  $V_0 = 0,01$  м<sup>3</sup>/с; материал тепловой трубки — медь, материал наполнителя — парафин; теплоноситель — вода; теплоемкость  $c_0 = 385$  Дж/(кг·К); теплопроводность меди  $\lambda_0 = 395$  Вт/(м·К); плотность меди  $\rho_0 = 8900$  кг/м<sup>3</sup>; температура плавления парафина  $T_0 = 326$  К; удельная теплота плавления парафина  $L = 184\,480$  Дж/кг; теплоемкость парафина  $c_1 = 2384$  Дж/(кг·К); теплопроводность парафина  $\lambda_1 = 0,15$  Вт/(м·К);



плотность парафина  $\rho_1 = 897 \text{ кг/м}^3$ ;  $T_1 = 350 \text{ К}$ ; теплоемкость воды  $c = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ; теплопроводность воды  $\lambda = 0,668 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ; плотность воды  $\rho = 973,702 \text{ кг/м}^3$ ; коэффициент динамической вязкости воды  $\eta = 368,77 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

С учетом принятых допущений при  $Re \approx 211$  из формулы (9) находим  $\alpha = 244,846 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , затем из (8) получаем значение коэффициента теплопередачи  $k = 195,768 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

Наиболее удобный способ определения зависимости  $R(t)$  — непосредственное численное решение уравнения (3) с начальным условием (5). Для этого введем следующие безразмерные комбинации:

$$Fo = \frac{a_1 t}{R_1^2}; \quad \tilde{r} = \frac{r}{R_1}; \quad \tilde{k} = \frac{k R_1}{2\lambda_1}; \quad \tilde{q} = \frac{q(t) R_1 c_1}{2\lambda_1 L}; \quad \tilde{T} = \frac{T c_1}{L}.$$

Подставив (15) в (3), получим задачу (3), (5) в безразмерном виде

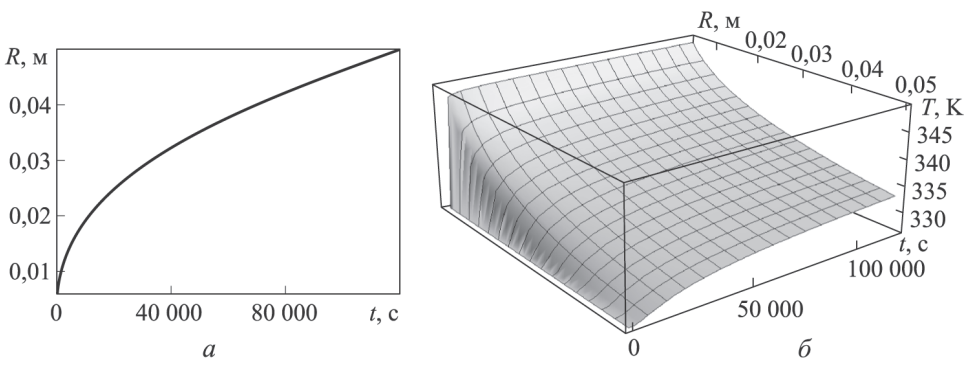
$$\tilde{R}_{,Fo} = \frac{2}{\tilde{R}} \frac{\exp\left(-\frac{\tilde{R}^2}{4Fo}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right) + \tilde{k} E_1\left(\frac{1}{4Fo}\right) - \tilde{k} E_1\left(\frac{\tilde{R}^2}{4Fo}\right)} \times \\ \times \left[\beta \tilde{q} - \tilde{k} \tilde{T}_0 + \tilde{k} \tilde{T}_1\right]; \quad (16)$$

$$\tilde{R}(0) = 1. \quad (17)$$

Решая (16), (17) методом Рунге–Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага и возвращаясь к исходным переменным, находим зависимость  $R(t)$ . Следует обратить внимание, что вместо непрерывной функции  $R(t)$  получается набор ее значений в точках, определяемых выбранным шагом по времени. Ввиду этого температура по формуле (15) также вычисляется только в соответствующие моменты времени  $t$ . Чтобы избежать таких ограничений, в выражение (15) подставляются не дискретные значения координаты фронта плавления, а интерполирующая функция, проходящая через эти точки, например, сплайны третьего порядка.

Поскольку в настоящей статье рассмотрена однофазная задача, в первом приближении время достижения фронтом плавления внешней стенки можно найти, остановив вычисления в соответствующий момент. Использование подобного приближения в случае двухфазной задачи будет некорректно, так как в ней граничные условия ставятся и на внутренней, и на внешней поверхностях цилиндра.

При  $\beta = 0$  время, за которое расплавится весь объем наполнителя, составляет 33,72 ч. Зависимости  $R(t)$  и  $T(r, t)$  показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Зависимость положения границы раздела фаз от времени  $R(t)$  (а) и распределение температуры жидкой фазы наполнителя  $T(r, t)$  (б)

**Двухфазная задача.** Приведенный подход может быть непосредственно применен в математическом моделировании фазовых превращений в накопителях энергии, если наполнитель в начальный момент времени имеет температуру плавления. В общем случае начальная температура наполнителя отлична от температуры  $T_0$ , при этом  $T'_0 < T_0$ . Тогда имеет место двухфазная задача

$$\rho_1 c_1 T_{,t} = \frac{\lambda_1}{r} (r T_{,r})_{,r}, \quad R_1 < r < R(t), \quad t > 0; \quad (18)$$

$$\rho_2 c_2 T^*_{,t} = \frac{\lambda_2}{r} (r T^*_{,r})_{,r}, \quad R(t) < r < R_2, \quad t > 0; \quad (19)$$

$$T(R(t), t) = T^*(R(t), t) = T_0, \quad t > 0; \quad (20)$$

$$\rho_1 L R_{,t}(t) = -\lambda_1 T_{,r}(R(t), t) + \lambda_2 T^*_{,r}(R(t), t), \quad t > 0; \quad (21)$$

$$T(r, 0) = T^*(r, 0) = T'_0 < T_0, \quad R_1 < r < R_2; \quad (22)$$

$$R(0) = R_1; \quad (23)$$

$$-\lambda_1 T_{,r}(R_1, t) = k [T_1 - T(R_1, t)] + \beta q(t), \quad T_1 > T_0, \quad q(t) > 0, \quad (24)$$

$$t > 0, \quad \beta \in [0; 1];$$

$$T^*_{,r}(R_2, r) = 0, \quad t > 0. \quad (25)$$

Приведем задачу (19)–(25) к безразмерному виду, для чего воспользуемся следующими обозначениями:

$$U(r, t) = T(r, t), \quad R_1 < r < R(t);$$

$$V(r, t) = T^*(r, t), \quad R(t) < r < R_2;$$

$$\Delta T_1 = T_1 - T_0 > 0, \quad \Delta T_2 = T_0 - T'_0 > 0;$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}, \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2};$$

$$\xi = \frac{r}{R_1}, \quad \xi_1 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \text{Fo} = \frac{a_1 t}{R_1^2}, \quad \Sigma(\text{Fo}) = \frac{R(t)}{R_1};$$

$$\tilde{U}(\xi, \text{Fo}) = \frac{U - T_0}{\Delta T_1}, \quad \tilde{V}(\xi, \text{Fo}) = \frac{V - T_0}{\Delta T_2};$$

$$\text{St}_1 = \frac{c_1 \Delta T_1}{L}, \quad \text{St}_2 = \frac{c_2 \Delta T_2}{L};$$

$$\tilde{k} = \frac{k R_1}{\lambda_1}, \quad \tilde{q}(\text{Fo}) = \frac{q(t) R_1}{\Delta T_1 \lambda_1}, \quad \tilde{T}_1(\text{Fo}) = \frac{T_1 - T_0}{\Delta T_1}.$$

Исходная задача в безразмерной форме примет вид

$$\tilde{U}_{,\text{Fo}} = \frac{1}{\xi} \tilde{U}_{,\xi} + \tilde{U}_{,\xi\xi}, \quad 1 < \xi < \Sigma(\text{Fo}), \quad \text{Fo} > 0; \quad (26)$$

$$\tilde{V}_{,\text{Fo}} = \frac{a_2}{a_1} \left( \frac{1}{\xi} \tilde{V}_{,\xi} + \tilde{V}_{,\xi\xi} \right), \quad \Sigma(\text{Fo}) < \xi < \xi_1, \quad \text{Fo} > 0;$$

$$\tilde{U}(\Sigma(\text{Fo}), \text{Fo}) = \tilde{V}(\Sigma(\text{Fo}), \text{Fo}) = 0, \quad \text{Fo} > 0; \quad (27)$$

$$\Sigma_{,\text{Fo}}(\text{Fo}) = -\text{St}_1 \tilde{U}_{,\xi}(\Sigma(\text{Fo}), \text{Fo}) + \frac{\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1} \text{St}_2 \tilde{V}_{,\xi}(\Sigma(\text{Fo}), \text{Fo}), \quad \text{Fo} > 0;$$

$$\tilde{U}(\xi, 0) = 0, \quad \tilde{V}(\xi, 0) = -1, \quad \Sigma(0) = 1; \quad (28)$$

$$-\tilde{U}_{,\xi}(1, \text{Fo}) = \tilde{k} \left[ \tilde{T}_1(\text{Fo}) - \tilde{U}(1, \text{Fo}) \right] + \beta \tilde{q}_1(\text{Fo}), \quad \tilde{q}(\text{Fo}) > 0, \quad (29)$$

$$\text{Fo} > 0, \quad \beta \in [0; 1];$$

$$\tilde{V}_{,\xi}(\xi_1, \text{Fo}) = 0, \quad \text{Fo} > 0.$$

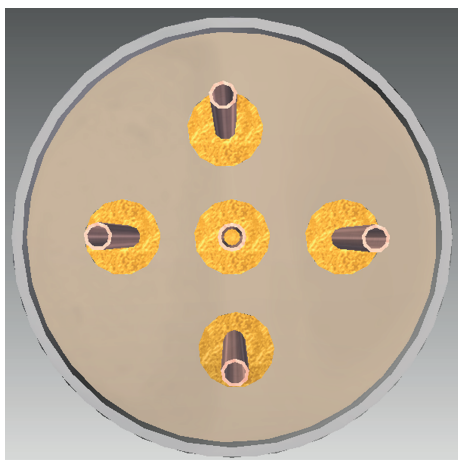
Пользуясь полученными ранее результатами, найдем решение задачи (26)–(29):

$$\tilde{U}(\xi, \text{Fo}) = \frac{E_1 \left( \frac{\xi^2}{4\text{Fo}} \right) - E_1 \left( \frac{\Sigma^2(\text{Fo})}{4\text{Fo}} \right)}{\tilde{k} E_1 \left( \frac{1}{4\text{Fo}} \right) - \tilde{k} E_1 \left( \frac{\Sigma^2(\text{Fo})}{4\text{Fo}} \right) + 2 \exp \left( -\frac{1}{4\text{Fo}} \right)} \times$$

$$\times \left[ \tilde{k} \tilde{T}_1(\text{Fo}) + \beta \tilde{q}_1(\text{Fo}) \right]. \quad (30)$$

Поскольку краевые условия подзадачи нахождения распределения температуры в твердой фазе не являются согласованными, нахождение непрерывного аналитического решения, удовлетворяющего выбранной модели, невозможно. Соответствующие расчеты целесообразно проводить численно [14].

Полученное соотношение (30) может быть использовано при расчетах, связанных с плавлением как в рассмотренных выше накопителях энергии, так и в накопителях с большим числом тепловых трубок



**Рис. 3. Положение фронтов плавления в сечении цилиндрического накопителя с пятью тепловыми трубками для некоторого малого значения времени**

вымыми трубками; 2) степень близости к трубкам боковой поверхности накопителя.

Пока влияние указанных факторов несущественно, распределение температур и положение фронтов плавления одинаковы вокруг всех трубок, что позволяет сократить объем вычислений, выполняя расчеты лишь для одной тепловой трубки и используя при этом аналитическую формулу (30). Эволюцию температуры наполнителя в твердой фазе можно рассчитывать, например, методом конечных элементов. По распределению температуры вокруг каждой зоны расплава определяется момент, после которого необходим переход к полностью численному решению.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharma A., Tyagi V.V., Chen C.R., Buddhi D.* Review on thermal energy storage with phase change materials and applications // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2009. Vol. 13. P. 318–345.
2. *Manish K. Rathod, Jyotirmay Banerjee.* Numerical investigation on latent heat storage unit of different configurations // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2011, Vol. 51. P. 813–818.
3. *Review on thermal energy storage for air conditioning systems / A. Al-Abidi, Mat Sohif Bin, K. Sopian, M.Y. Sulaiman, C.H. Lim, Th. Mohammad Abdulrahman // Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2012. Vol. 16. P. 5802–5819.
4. *Alexiades V., Solomon A.D.* Mathematical modeling of melting and freezing processes. Bristol: Hemisphere Publishing Corporation, 1993. 336 p.
5. *Bauer T.* Approximate analytical solutions for the solidification of PCMs in fin geometries using effective thermophysical properties // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. Vol. 54. P. 4923–4930.

и имеющим произвольную, не изменяющуюся по длине накопителя форму сечения. Положение фронтов плавления в сечении цилиндрического накопителя с пятью тепловыми трубками для некоторого малого значения времени, при котором их форма наиболее проста и представляет собой окружность, проиллюстрировано на рис. 3. Под формой фронта плавления подразумевается форма фронта в поперечном сечении накопителя. При отсутствии краевых эффектов у его торцов на усложнение формы фронта плавления влияют два фактора: 1) расстояние между тепловыми трубками; 2) степень близости к трубкам боковой поверхности накопителя.

6. *Perry's chemical engineers' handbook*. 8th edition / B.E. Poling, G.H. Thomson, D.G. Friend, R.L. Rowley, W.V. Wilding. N.Y.: McGraw-Hill, 2008. 521 p.
7. Ukrainczyk N., Kurajica S., Sipusic J. Thermophysical Comparison of Five Commercial Paraffin Waxes as Latent Heat Storage Materials // *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*. 2010. Vol. 24. P. 129–137.
8. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
9. *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer* / J. Welty, C. Wicks, R. Wilson, G. Rorrer. 5th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Inc., 2008. 711 p.
10. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
11. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. М.: Госэнергоиздат, 1958. 414 с.
12. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* / T. Bergman, A. Lavine, F. Incropera, D. DeWitt. 7th ed. NJ: John Wiley & Sons Inc., 2011. 1080 p.
13. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации; пер. с англ. М.: Мир, 1980, 608 с.
14. Самарский А.А., Вабищев П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

## REFERENCES

- [1] Sharma A., Tyagi V.V., Chen C.R., Buddhi D. Review on thermal energy storage with phase change materials and applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2009, vol. 13, pp. 318–345. DOI: 10.1016/j.rser.2007.10.005
- [2] Rathod M.K., Banerjee J. Numerical investigation on latent heat storage unit of different configurations. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2011, vol. 51, pp. 813–818.
- [3] Al-Abidi A., Sohif Bin Mat, Sopian K., Sulaiman M.Y., Lim C.H., Abdulrahman Th. Mohammad. Review of thermal energy storage for air conditioning systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2012, vol. 16, pp. 5802–5819. DOI: 10.1016/j.rser.2012.05.030
- [4] Alexiades V., Solomon A.D. Mathematical modeling of melting and freezing processes. Bristol, PA, USA, Hemisphere Publishing Corporation, 1993. 336 p. Available at: <http://www.math.utk.edu/~vasili/475/Handouts/3.PhChgbk.1+title.pdf> (accessed 01.11.2014).
- [5] Bauer T. Approximate analytical solutions for the solidification of PCMs in fin geometries using effective thermophysical properties. *Int. J. Heat Mass. Tran.*, 2011, vol. 54, pp. 4923–4930. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.07.004
- [6] Poling B.E., Thomson G.H., Friend D.G., Rowley R.L., Wilding W.V. *Perry's chemical engineers' handbook*. 8th ed. New York, USA, McGraw-Hill, 2008. 521 p. Available at: <http://ru.scribd.com/doc/136492507/Perry-s-Chemical-Engineers-Handbook-8th-Ed> (accessed 01.11.2014).
- [7] Ukrainczyk N., Kurajica S., Sipusic J. Thermophysical comparison of five commercial paraffin waxes as latent heat storage materials. *Chem. and Biochem. Eng. Quarterly*, 2010, vol. 24, pp. 129–137.
- [8] Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи [Fundamentals of heat transfer]. 2nd ed. Moscow, Energiya Publ., 1977. 344 p.
- [9] Welty J., Wicks C., Wilson R., Rorrer G. *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*. 5th ed. Hoboken, New York, USA, John Wiley & Sons Inc., 2008. 711 p. Available at: <http://ru.scribd.com/doc/120500803/Fundamentals-of-Momentum-Heat-and-Mass-Transfer-5th-Edition-Welty-Solutions-manual> (accessed 01.11.2014).

- [10] Kutateladze S.S. Osnovy teorii teploobmena [Fundamentals of heat exchange theory]. 5th ed. Moscow, Atomizdat Publ., 1979. 416 p. Available at: [http://teplotexnika.ucoz.ru/load/osnovy\\_teorii\\_teploobmena\\_s\\_s\\_kutateladze\\_1979\\_djvu/1-1-0-13](http://teplotexnika.ucoz.ru/load/osnovy_teorii_teploobmena_s_s_kutateladze_1979_djvu/1-1-0-13) (accessed 01.11.2014).
- [11] Kutateladze S.S., Borishanskiy V.M. Spravochnik po teploperedache [Heat transfer handbook]. Moscow, Gosenergoizdat Publ., 1958. 414 p. Available at: <http://03-ts.ru/index.php?nma=downloads&fla=stat&idd=188> (accessed 01.11.2014).
- [12] Bergman T., Lavine A., Incropera F., De Witt D. Fundamentals of heat and mass transfer. 7th ed. Hoboken, New York, USA, John Wiley & Sons Inc., 2011. 1080 p. Available at: <http://ru.scribd.com/doc/96238403/Solutions-Manual-Fundamental-Of-Heat-and-Mass-Transfer-Frank-p-Incropera-David-p-dewitt> (accessed 01.11.2014).
- [13] Luke Y.L. Mathematical functions and their approximations. New York, USA, Academic Press, 1975. 568 p. (Russ. Ed.: Lyuk Yu. Spetsial'nye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii. Per. s angl. Moscow, Mir Publ., 1980. 608 p.).
- [14] Samarskiy A.A., Vabishchev P.N. Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2003. 784 p.

Статья поступила в редакцию 06.05.2014

Косакян Аслан Корюнович — студент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области математического моделирования физических процессов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kosakian A.K. — student of “Applied Mathematics” department of Bauman Moscow State Technical University. Specialize in the design of mathematical simulation of physical processes.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction element.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.