

УДК 539.3:536.2

В. С. З а р у б и н, Г. Н. К у в ы р к и н,
И. Ю. С а в е л ь е в а

НЕЛОКАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

На основе соотношений рациональной термодинамики и модели среды с внутренними параметрами состояния предложена математическая модель теплопроводности в наноструктурных материалах. Модель интегрально учитывает взаимное влияние процессов, протекающих на макро- и микроуровнях. Выполнена оценка зависимости распространения теплоты в твердом теле от функций влияния на примере одномерной задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева.

E-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com

Ключевые слова: наноструктурные материалы, моделирование термомеханических процессов, теплопроводность, теплоемкость.

Успехи в создании новых материалов с использованием нанотехнологий [1, 2] стимулируют разработку и новых математических моделей, описывающих температурные поля в деталях и элементах конструкций из консолидированных наноструктурных материалов. Эти математические модели должны учитывать две существующие противоположные концепции описания структуры любого твердого тела — концепции непрерывности и дискретности [3]. С одной стороны, большинство технических объектов представляются состоящими из сплошного материала и для определения температурных полей в них используют “макроскопические” функции состояния — абсолютную температуру $T(\mathbf{x}, t)$, массовую плотность энтропии $h(\mathbf{x}, t)$, массовую плотность внутренней ($u(\mathbf{x}, t)$) и свободной ($A(\mathbf{x}, t)$) энергии, вектор плотности теплового потока $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ с составляющими $q_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, 2, 3$) и, возможно, некоторые другие функции, зависящие от координат, заданных радиус-вектором \mathbf{x} , и времени t . С другой стороны, для наноразмерных объектов процесс распространения теплоты ассоциируется с такими понятиями, как вектор плотности распределения фононов при фононном (решеточном) механизме распространения теплоты, и аналогичными представлениями об электронном и некоторых других механизмах переноса энергии. Аккумуляцию теплоты ассоциируют с увеличением кинетической энергии колебаний атомов или молекул наноструктурных элементов — возрастанием частоты и амплитуды их колебаний. Поэтому для построения математи-

ческой модели теплопроводности консолидированных наноструктурных материалов на макроуровне необходимо объединение двух этих подходов.

Математическая модель. Для получения уравнения теплопроводности воспользуемся соотношениями рациональной термодинамики необратимых процессов для среды с параметрами термодинамического состояния [4–6]. Выбор этого подхода объясняется тем, что такая модель позволяет связать макроскопическое поведение тел с рядом микроструктурных процессов, которые протекают на молекулярном и субмолекулярном уровнях.

В зависимости от структуры материала — кристаллической, аморфной и др. — приложенные внешние механические и тепловые нагрузки вызывают соответствующие структурные изменения. На макроуровне эти изменения описываются конечным, хотя и (в общем случае) достаточно большим числом параметров. Характер этих параметров и их изменение вследствие приложения к телу внешних термомеханических воздействий определяется при анализе соответствующих процессов на макроуровне.

В соответствии с указанным подходом массовая плотность энтропии $h = -\partial A/\partial T$ и вводится параметр термодинамического состояния κ , определяющий неравновесный процесс аккумуляции теплоты на микроуровне. В линейном приближении характер изменения κ во времени можно описать уравнением

$$t_T^* \dot{\kappa} + A_{44} \kappa = \bar{\kappa}, \quad (1)$$

где t_T^* — время релаксации параметра состояния; $(\dot{}) = \partial()/\partial t$; A_{44} — параметр, характеризующий размер наночастиц ($0 < A_{44} \leq 1$); при увеличении размера наночастиц $A_{44} \rightarrow 1$; $\bar{\kappa}$ — равновесное значение параметра κ . Для полимерных материалов имеет смысл учитывать спектр времен релаксации, в случае кристаллических материалов можно ограничиться рассмотрением одного значения времени релаксации [7].

Закон сохранения энергии в предлагаемой модели имеет вид [4, 6]

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где ρ — плотность; x_i — декартовы прямоугольные координаты; q_V — объемная плотность мощности источников (стоков) теплоты, например, обусловленных термомеханической связанностью или фазовыми превращениями второго рода, характерным признаком которых является изменение типа кристаллической решетки (оно может быть инициировано охлаждением или нагревом тела).

Процесс распространения теплоты будем ассоциировать с вектором $\vec{\kappa}$, характеризующим, например, решеточный (фононный) механизм переноса энергии:

$$t_q^* \dot{\kappa}_i + A_{ij} \kappa_j = \bar{\kappa}_i, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где t_q^* — время релаксации параметра $\vec{\kappa}$; $A_{ij} = A_{ji}$; $\det A_{ij} > 0$; $\bar{\kappa}_i$ — равновесные значения составляющих вектора $\vec{\kappa}$.

Положим, что составляющие вектора плотности теплового потока линейно зависят от κ_i , но так как вектор $\vec{\kappa}$ характеризует процесс переноса энергии на молекулярном и субмолекулярном уровне, а \mathbf{q} — на макроуровне, то переход от одного уровня в другому представим в интегральной форме

$$q_i = \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \kappa_j(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'), \quad (4)$$

где $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$ и $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = 0$ при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \notin V'$, $\mathbf{x}' \in V'$, V' — объем наночастицы, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$; V — характерный объем среды.

Далее равновесные значения переменных микроуровня $\bar{\kappa}$ и $\bar{\kappa}_i$ положим зависящими от $T(\mathbf{x}, t)$ и $\partial T(\mathbf{x}, t)/\partial x_j$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(\mathbf{x}, t) &= \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) T(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'), \\ \bar{\kappa}_i(\mathbf{x}, t) &= - \int_V Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_j} dV(\mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ и $Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \neq 0$ только при $(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V'$ и $\mathbf{x}' \in V'$.

Соотношения, аналогичные (4) и (5), используют в механике деформируемого твердого тела при построении нелокальных зависимостей компонент тензора напряжений от компонент тензора деформации [8, 9]. В общем случае эти соотношения определяют зависимость активных переменных от интегральных (осредненных) значений реактивных переменных, в данном случае T , κ , κ_i и $\partial T/\partial x_i$. Отметим, что если принять

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) &= \varphi_{ij}^0 \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \quad \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_T^0 \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \\ Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) &= Z_{ij}^0 \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|), \end{aligned}$$

где $\delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ — дельта-функция Дирака, то (4) и (5) переходят в известные соотношения [10].

Если решить систему уравнений (3) при заданном виде $\bar{\kappa}_i$ из (5), то получим функциональную зависимость составляющих вектора $\vec{\kappa}$ от

градиента абсолютной температуры в виде

$$\kappa_j = \bar{\kappa}_j \left(- \int_V Z_{jk}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_k} dV(\mathbf{x}') \right), \quad k = 1, 2, 3.$$

В состоянии, близком к равновесию ($t_q^* \kappa_j \approx 0$), из (3) и (5) имеем

$$\kappa_j(\mathbf{x}, t) = - \int_V Y_{jk}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_k} dV(\mathbf{x}'), \quad (6)$$

где $Y_{jk}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = B_{ji} Z_{ik}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $B_{ji} = (A_{ij})^{-1}$.

Из (1) при $t_T^* \dot{\kappa} \approx 0$ с учетом первого равенства (5) получим

$$\kappa(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) T(\mathbf{x}', t) dV(\mathbf{x}'). \quad (7)$$

В дальнейшем будем рассматривать только равновесные процессы и сравнительно небольшие отклонения значений абсолютной температуры от температуры T_0 естественного состояния. Тогда, задав $A(T, \kappa) = T \cdot A^0(\kappa)$, получим

$$\rho T \frac{\partial h}{\partial t} = -\rho T \frac{dA^0}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial t} \approx -\rho T_0 \frac{dA^0}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial t} = \rho c \frac{\partial \kappa}{\partial t}, \quad (8)$$

где $c = -T_0 \frac{dA^0}{d\kappa}$ — удельная массовая теплоемкость, обусловленная изменением вида и границ фононного спектра, т.е. изменением функции распределения частот колебаний атомов. Подставив в (8) равенство (7), получим

$$\rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial t} dV(\mathbf{x}') = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_V.$$

Комбинируя (4) и (6), имеем

$$q_i(\mathbf{x}, t) = - \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \int_V Y_{jk}(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t)}{\partial x''_k} dV(\mathbf{x}'') dV(\mathbf{x}'). \quad (9)$$

С учетом вышеизложенного уравнение теплопроводности примет вид

$$\begin{aligned} & \rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial t} dV(\mathbf{x}') = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \int_V Y_{jk}(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) \frac{\partial T(\mathbf{x}'', t)}{\partial x_k} dV(\mathbf{x}'') dV(\mathbf{x}') + q_V. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) принципиально отличается от известного, оно позволяет рассматривать процесс теплопроводности на макроуровне с учетом процессов микроуровня. При этом интегрально учтено взаимное влияние процессов макро- и микроуровня. Будем полагать, что функции влияния можно всегда представить в виде $\varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_T^0 \varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \varphi_{ij}^0 \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $Z_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Z_{ij}^0 \varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ и $Y_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = Y_{ij}^0 \varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, где φ_T^0 , φ_{ij}^0 , Z_{ij}^0 , Y_{ij}^0 — константы; $\varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$, $\varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ — единичные функции влияния такие, что

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_0(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' &= 1, \quad \int_V \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1, \quad \int_V \varphi_2(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' = 1, \\ \int_V \varphi_3(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV' &= 1, \quad (|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \in V', \quad \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Отметим, что осреднив подынтегральные выражения в (10) по объему сферы единичного радиуса, получим при $\int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = H(\mathbf{x})$,

$$\int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = \varphi_{ij}^0 H(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \int_V Y_{jk}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = Y_{jk}^0 H(\mathbf{x}),$$

где $H(\mathbf{x})$ — функция Хевисайда, $\mathbf{x} \in V'$, результаты, совпадающие с известными [10].

Поскольку $\max |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \ll l$, где l — характерный размер тела, то $T(\mathbf{x}', t)$ и $\partial T(\mathbf{x}', t) / \partial x_k$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}', t) &= T(\mathbf{x}, t) + (x'_i - x_i) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) \frac{\partial^2 T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \frac{1}{3!} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j)(x'_k - x_k) \frac{\partial^3 T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_k} &= \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} + \\ &+ (x'_i - x_i) \frac{\partial T^2(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{2!} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) \frac{\partial^3 T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \\ &+ \frac{1}{3!} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j)(x'_k - x_k) \frac{\partial^4 T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \dots \end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности (10) в этом случае принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \frac{\partial}{\partial t} \left(T(\mathbf{x}, t) + (x'_i - x_i) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) \frac{\partial^2 T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right) dV(\mathbf{x}') = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \varphi_{ij}(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \int_V Y_{jk}(|\vec{x}'' - \mathbf{x}'|) \left(\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} + 2(x'_p - x_p) \frac{\partial T^2(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p \partial x_k} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (x'_q - x_q)(x'_p - x_p) \frac{\partial^3 T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_q \partial x_p \partial x_k} + \dots \right) dV(\vec{x}'') dV(\mathbf{x}') + q_V. \quad (11) \end{aligned}$$

В нулевом приближении из (11) имеем

$$\begin{aligned} \rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \frac{\partial T}{\partial t} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ik}^{(T)} \int_V \varphi_1(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') \int_V \varphi_3(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|) dV(\mathbf{x}'') \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + q_V, \end{aligned}$$

где $\lambda_{ik}^{(T)} = \varphi_{ij}^0 Y_{jk}^0$ — компоненты тензора теплопроводности, и, наконец, если положить $\int_V \varphi_T(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) dV(\mathbf{x}') = 1$, то уравнение теплопроводности принимает известную форму

$$\rho \tilde{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ik}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + q_V,$$

где $\tilde{c} = c/A_{44}$ эффективная удельная массовая теплоемкость консолидированного наноструктурного материала.

Оценка зависимости распространения теплоты в твердом теле от функций влияния на примере одномерной задачи высокоинтенсивного поверхностного нагрева. Запишем функции влияния в одномерном случае следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(|x' - x|) &= \varphi(|x' - x|) = \\ &= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x' - x|}{a} \right), \quad |x' - x| \leq a, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (12)$$

где a — характерный размер наноструктурного элемента. Тогда уравнение теплопроводности (10) примет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{c}{A_{44}} \int_V \varphi(|x' - x|) \frac{\partial T(x', t)}{\partial t} dV(x') = \\ = \lambda^{(T)} \frac{\partial}{\partial x} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x'), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\lambda^{(T)}$ — теплопроводность тела.

Краевые условия для задачи поверхностного нагрева с учетом (9) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad T(x, 0) &= T_0; \\ x = 0, \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x') &= q_S; \\ x = L, \quad -\lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{\partial T(x'', t)}{\partial x''} dV(x'') dV(x') &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $q_S = B M t^m \exp(-mt/t_0)$, $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Применив к уравнению (13) и граничным условиям из (14) конечно-элементную процедуру в форме метода Бубнова–Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[C] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{F\},$$

где $[C]$, $[K]$ — матрицы, характеризующие теплоемкость и теплопроводность исследуемого тела; $\{T\}$, $\{\dot{T}\}$ — векторы неизвестных узловых значений температуры и скорости ее изменения; $\{F\}$ — вектор тепловой нагрузки. Компоненты F_p вектора $\{F\}$ и C_{pq} , K_{pq} матриц

$[C]$, $[K]$ определяются соотношениями

$$F_p = q_S(t)\delta_{p1},$$

$$C_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{\rho c}{A_{44}} \left(\int_V \varphi(|x' - x|) N_q(x') dx' \right) N_p(x) dx; \quad (15)$$

$$K_{pq} =$$

$$= \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \lambda^{(T)} \left(\int_V \varphi(|x' - x|) \int_V \varphi(|x'' - x'|) \frac{dN_q(x'')}{dx''} dx'' dx' \right) \frac{dN_p(x)}{dx} dx,$$

где E — число конечных элементов; $V^{(e)}$ — объем конечного элемента; N_p , N_q — одномерные квадратичные функции формы, зависящие от координаты x ; p, q — номера узлов сетки, $p, q = \overline{1, n}$;

$$N_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{2d^2}, \quad x_1 \leq x \leq x_3;$$

$$N_{2k}(x) = -\frac{(x - x_{2k-1})(x - x_{2k+1})}{d^2},$$

$$x_{2k-1} \leq x \leq x_{2k+1}, \quad k = \overline{1, (n-1)/2};$$

$$N_{2k+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{2k-1})(x - x_{2k})}{2d^2}, & x_{2k-1} \leq x \leq x_{2k+1}, \\ \frac{(x - x_{2k+2})(x - x_{2k+3})}{2d^2}, & x_{2k+1} \leq x \leq x_{2k+3}, \\ & k = \overline{1, (n-3)/2}; \end{cases}$$

$$N_n(x) = \frac{(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{2d^2}, \quad x_{n-2} \leq x \leq x_n;$$

$d = x_{p+1} - x_p$ — шаг сетки по пространству, длина конечного элемента в случае использования одномерных квадратичных функций равна $2d$.

Отметим, что использование линейных функций формы приведет к исчезновению зависимости элементов K_{pq} от функций влияния $\varphi(|x' - x|)$ и, соответственно, от характерного размера наноструктурного элемента a , что не соответствует известным экспериментальным данным [1, 2].

Значения температуры в узлах расчетной сетки конечных элементов в $(k + 1)$ -й момент времени могут быть получены из решения системы алгебраических уравнений при аппроксимации $\{\dot{T}\}$ двухслойной разностной схемой [11]:

$$([C^{k+1}] + \Delta t^{(k)} [K^{k+1}]) \{T^{(k+1)}\} = \Delta t^{(k)} \{F^{(k+1)}\} + [C^{k+1}] \{T^{(k)}\},$$

где $\Delta t^{(k)} = t^{k+1} - t^k$ – шаг по времени.

Для вычисления элементов C_{pq}, K_{pq} в (15) рассмотрим два варианта расположения функции влияния относительно конечного элемента (рис. 1). В первом варианте (рис. 1, а) максимальное значение функции влияния достигается в центре наноструктурного элемента, во втором (рис. 1, б) – на границах наноструктурного элемента.

Чтобы оценить влияние характерного размера a на распределение температуры, рассмотрим случаи $a_1 = d, a_2 = d/2, a_3 = d/4$.

При построении графиков использовали следующие безразмерные параметры и переменные [10]:

$$z = x/\sqrt{at_0}, \quad \bar{t} = t/t_0, \quad \theta = (T - T_0)/T^*, \quad T^* = Bt_0^* \sqrt{at_0} / \lambda^{(T)},$$

$$a = \lambda^{(T)} / (\rho c), \quad q_0(\bar{t}) = M \bar{t}^m \exp(m\bar{t}), \quad M = m^m / (m - 1)!$$

На рис. 2 изображены распределения температуры по глубине тела для различных моментов времени (а–в) и расчет температуры поверхности нагреваемого тела (z) при $m = 2$ в сравнении с температурой, вычисленной в случае параболического уравнения теплопроводности.

Из представленных рисунков видно, что расположение функций влияния относительно функций формы значительно влияет на распределение температуры в теле. В первом варианте (см. рис. 1, а) температура выше, чем во втором (см. рис. 1, б).

При этом для обоих вариантов с уменьшением характерного размера a уменьшаются и значения температуры. В наноструктурном

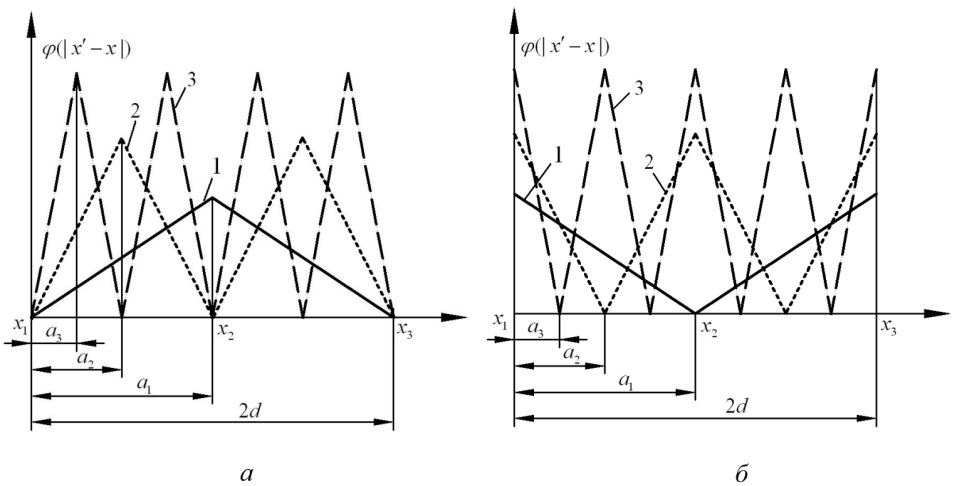


Рис. 1. Расположение функции влияния относительно конечного элемента:
1, 2, 3 – соответственно a_1, a_2, a_3

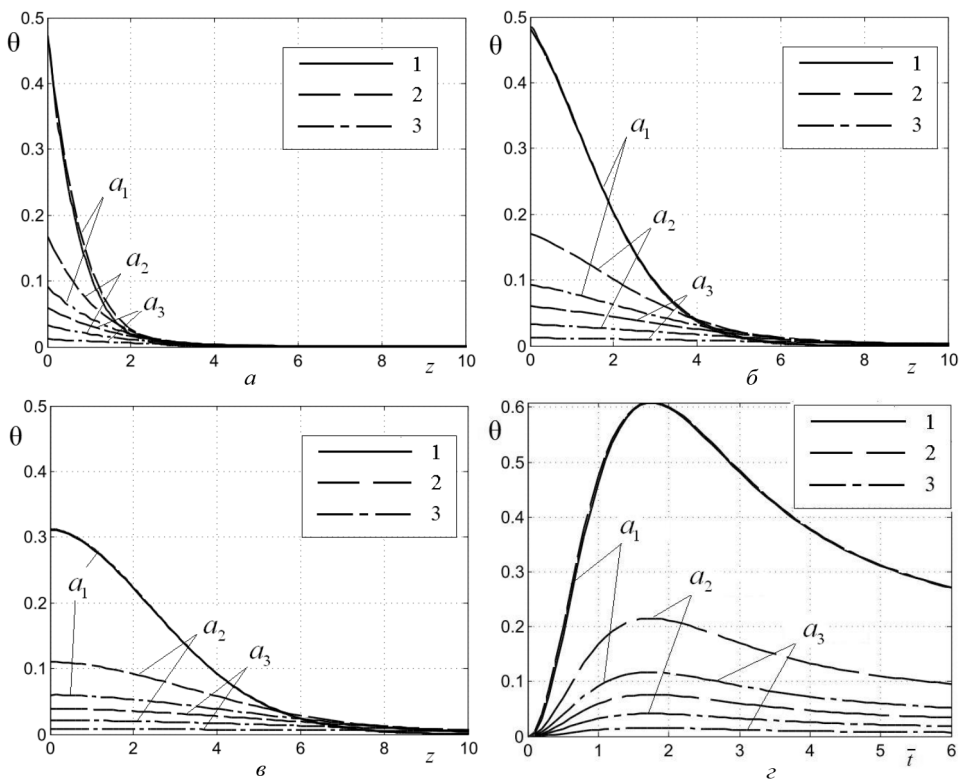


Рис. 2. Распределения температуры по глубине тела (a – v) и во времени для нагреваемой поверхности тела (z):

1 – параболическое уравнение теплопроводности; 2 – первый вариант расположения функций влияния относительно функций формы (см. рис. 1, a); 3 – второй вариант (см. рис. 1, b); $a - \bar{t} = 1$, $b - \bar{t} = 3$, $v - \bar{t} = 5$; $z - z = 0$

материале уменьшение характерного размера зерна приводит к увеличению доли границ раздела, а следовательно, к увеличению рассеяния энергии на границах раздела, что соответствует понижению температуры тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреевский Р. А., Рагуля А. В. Наноструктурные материалы. – М.: Изд. центр “Академия”, 2005. – 192 с.
2. Гусев А. И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.
3. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.
4. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.
5. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. – 2003. – Т. 4, № 2. – С. 300–309.

6. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. Математические модели термомеханики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 168 с.
7. Н о в и к А., Б е р р и Б. Релаксационные явления в кристаллах: Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1975. – 472 с.
8. В в е д е н и е в микромеханику / Онами М. и др.: Пер. с япон. – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.
9. К у н и н И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
10. К у в ы р к и н Г. Н., С а в е л ь е в а И. Ю. Математическая модель теплопроводности новых конструкционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – № 3. – С. 72–85.
11. К у в ы р к и н Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. – М.: Изд-во МГТУ, – 1993. – 142 с.

Статья поступила в редакцию 15.04.2011

Владимир Степанович Зарубин родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1957 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

V.S. Zarubin (b. 1933) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Honored Science and Technology Worker of the Russian Federation, Laureate of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Георгий Николаевич Кувыркин родился в 1946 г. Окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

G.N. Kuvyrkin (b. 1946) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Laureate of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Инга Юрьевна Савельева родилась в 1985 г., окончила в 2008 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирантка кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 6 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

I.Yu. Savelyeva (b. 1985) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2008. Post-graduate of “Applied mathematics” department of Bauman Moscow State Technical University. Author of 6 publications in the field of mathematical simulation of non-stationary heat conduction.