УДК 533.95

НЕЛИНЕЙНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

М.Б. Гавриков[1,2], **А.А. Таюрский**[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: nadya_p@cognitive.ru;

[2]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
e-mail: tayurskiy2001@mail.ru

Предложен метод исследования поглощения альфвеновской волны, бегущей в однородной неизотермической плазме вдоль постоянного магнитного поля, и релаксации температур электронов и ионов в волне. Поглощение А-волны плазмой обусловлено диссипативными эффектами — магнитной и гидродинамическими вязкостями электронов и ионов и их упругим взаимодействием. Метод основан на точном решении уравнений двухжидкостной электромагнитной гидродинамики плазмы, которые на А-волне, как показано в работе, редуцируются к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), поглощение волны, релаксация температур.

NONLINEAR ABSORPTION OF ALFVEN WAVE IN DISSIPATIVE PLASMA

M.B. Gavrikov[1,2], **A.A. Tayurskiy**[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: nadya_p@cognitive.ru;

[2]Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow
e-mail: tayurskiy2001@mail.ru

A method is proposed for studying the absorption of an Alfven wave, traveling in a homogeneous nonisothermal plasma along a constant magnetic field, and the relaxation of the electron and ion temperatures in the A-wave. The absorption of A-wave by the plasma is caused by dissipative effects — magnetic and hydrodynamic viscosities of electrons and ions and their elastic interaction. The method is based on exact solving of equations of two-fluid electromagnetic hydrodynamics of plasma, which for A-wave, as shown in the work, are reduced to a nonlinear system of ordinary differential equations.

Keywords: classic MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), wave absorption, temperature relaxation.

Как известно, в звуковой волне в газе возмущаются только продольная компонента скорости и термодинамические параметры. В плазме возможны волны малой амплитуды, в которых, наоборот, возмущаются только поперечные компоненты скорости, магнитного и электрического полей, а продольные и термодинамические параметры неизменные. Эти волны можно, самое большее, увидеть, но нельзя услышать.

Такие волны были открыты Х. Альфвеном в 1942 г. [1] и получили название альфвеновских. Позднее оказалось, что альфвеновские волны, полученные первоначально как решение акустического приближения уравнений классической магнитной гидродинамики (МГД), являются точным решением МГД-уравнений [2], что исключительно важно для их изучения.

Ниже приведены результаты исследования временного затухания плоской поперечной волны в двухжидкостной однородной плазме (в работе называемой альфвеновской), обусловленного диссипативными эффектами — проводимостью плазмы и гидродинамическими вязкостями электронов и ионов, и связанного с ним процесса релаксации температур электронов и ионов в альфвеновской волне. Проведенное исследование основано не на линеаризованных уравнениях, как это обычно принято, а на точных законах сохранения массы, энергии, импульса для электронов и ионов и уравнениях электродинамики Максвелла (ЭМГД-уравнения). Сопоставление полученных результатов с данными линейной теории показывает, что последняя грубо искажает процессы затухания и релаксации. Плазма предполагается квазинейтральной, полностью ионизованной, электромагнитное поле — квазистационарным.

ЭМГД-уравнения. Для исследования динамики двухжидкостной плазмы воспользуемся уравнениями Брагинского [3], составленными из двух — для электронов и ионов — комплектов гидродинамических уравнений. Для квазинейтральной плазмы уравнения Брагинского замыкаются усеченной системой уравнений электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля. Весьма важно, что полученная замкнутая система уравнений динамики двухжидкостной плазмы с полным учетом инерции электронов может быть редуцирована [4, 5] без потери математического и физического содержания к одножидкостной гидродинамической системе уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{U}=0,\quad \frac{\partial\rho\mathbf{U}}{\partial t}+\mathrm{Div}\Pi=\mathrm{DivP};$$

$$\frac{\partial T_\pm}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla T_\pm+T_\pm(\gamma-1)\mathrm{div}\,\mathbf{U}\pm\lambda_\mp\rho^{\gamma-2}\mathbf{j}\cdot\nabla\left(\frac{T_\pm}{\rho^{\gamma-1}}\right)=$$

$$=\frac{\lambda_\Sigma e_\pm(\gamma-1)}{k\rho}\Big\{\mathrm{div}(\chi_\pm\nabla\mathrm{T}_\pm)+\mathrm{tr}(\Pi_\pm\mathrm{D}_\pm)+\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma}\pm b(T_- - T_+)\Big\};\tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}=0,\quad \mathbf{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{H};$$

$$\mathbf{E}+\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\,\mathbf{E}=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\mathbf{U},\mathbf{H}]+\frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\,\mathrm{W},$$

где тензоры потока импульса (П), вязких напряжений (P) и "холловских слагаемых" (W) имеют вид

$$\Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathrm{P} = \Pi^c_* + \Pi^U;$$

$$\mathrm{W} = (\lambda_- - \lambda_+)(\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ \mathrm{p}_-)\mathrm{I}_3 + \lambda_+\lambda_-(jU + Uj) - \Pi^U_* - \Pi^c;$$

$$\Pi^h = \rho\mathbf{U}\mathbf{U} + p_\Sigma \mathrm{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi}\mathrm{I}_3 - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+\lambda_- \frac{\mathbf{j}\mathbf{j}}{\rho}.$$

Здесь и далее индексы $\pm$ относятся к параметрам электронов и ионов; $\lambda_\pm = m_\pm/e_\pm$; $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$; $p_\Sigma = p_+ + p_-$; $m_\Sigma = m_+ + m_-$; $\rho = \rho_+ + + \rho_-$; $\mathbf{U} = (\rho_+\mathbf{v}_+ + \rho_-\mathbf{v}_-)/\rho$; I_3 — единичный трехмерный тензор; k — постоянная Больцмана; σ — проводимость плазмы; $\chi_\pm$ — теплопроводности электронов и ионов. Электроны и ионы для простоты считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ. Тензоры вязких напряжений, учитывая равенство нулю вторых вязкостей электронов и ионов [2], имеют вид

$$\Pi^U = 2\mu_\Sigma \mathrm{D}^U - \frac{2}{3}\mu_\Sigma \mathrm{tr}\, \mathrm{D}^U \mathrm{I}_3, \quad \Pi^c = 2\mu^* \mathrm{D}^c - \frac{2}{3}\mu^* \mathrm{tr}\, \mathrm{D}^c \mathrm{I}_3;$$

$$\Pi^U_* = 2\mu_* \mathrm{D}^U - \frac{2}{3}\mu_* \mathrm{tr}\, \mathrm{D}^U \mathrm{I}_3, \quad \Pi^c_* = 2\mu_* \mathrm{D}^c - \frac{2}{3}\mu_* \mathrm{tr}\, \mathrm{D}^c \mathrm{I}_3;$$

$$\Pi_\pm = 2\mu_\pm \mathrm{D}_\pm - \frac{2}{3}\mu_\pm \mathrm{tr}\, \mathrm{D}_\pm \mathrm{I}_3,$$

где $\mathrm{D}^U = \mathrm{def}\,\mathbf{U}$, $\mathrm{D}^c = \mathrm{def}(\mathbf{j}/\rho)$, $\mathrm{D}_\pm = \mathrm{def}\,\mathbf{v}_\pm$ — тензоры деформаций; $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$; $\mu_* = \lambda_-\mu_+ - \lambda_+\mu_-$; $\mu^* = \lambda_-^2\mu_+ + \lambda_+^2\mu_-$; $\mu_\pm$ — гидродинамические вязкости электронов и ионов.

По найденному решению системы (1) гидродинамические параметры электронов и ионов выражаются через ρ, $\mathbf{U}$, $\mathbf{j}$ по формулам

$$\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho}\mathbf{j}, \quad \rho_\pm = \frac{\lambda_\pm}{\lambda_\Sigma}\rho.$$

Уравнения ЭМГД (1) отличаются от уравнений классической МГД несколькими принципиальными слагаемыми, в особенности значительно более сложной формой обобщенного закона Ома, согласно которому для нахождения электрического поля $\mathbf{E}$ в плазме необходимо решить краевую задачу для некоторой эллиптической системы уравнений на компоненты поля $\mathbf{E}$. Тем самым в ЭМГД кардинально меняется характер зависимости электрического поля $\mathbf{E}$ от остальных параметров плазмы, что предопределяет возникновение сильной пространственной дисперсии и ряда других важных эффектов.

Уравнения классической МГД являются предельным случаем ЭМГД-уравнений (1), когда характерное погонное число частиц плазмы неограниченно увеличивается или, иначе, когда $L \gg c/\omega_p$, где L —

характерный масштаб длины, $\omega_p = \sqrt{4\pi\rho/(\lambda_+\lambda_-)}$ — характерная плазменная частота, c/ω_p — скиновая длина. Формально МГД-уравнения являются нулевым, а уравнения холловской МГД — первым по параметру $c/(\omega_p L) \ll 1$ приближениями ЭМГД-уравнеий. Мнемоническое правило для получения из системы (1) уравнений классической МГД состоит в вычеркивании из уравнений системы (1) всех слагаемых, в которых ρ входит в знаменатель. При этом уравнения энергий надо записать относительно давлений $p_\pm$. В то же время ЭМГД-систему можно рассматривать как весьма продвинутую форму уравнений ЭМГД, свободную от проблем ЭМГД-теории, связанных с законами сохранения и самосогласованностью уравнений.

Решение ЭМГД-уравнений (1) удовлетворяет закону сохранения полной энергии [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{U^2}{2}+\varepsilon+\frac{\lambda_+\lambda_- j^2}{2\rho^2}\right)+\frac{H^2}{8\pi}\right]+\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{U}\left(\frac{U^2}{2}+\varepsilon+\frac{p_\Sigma}{\rho}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\lambda_+\lambda_- j^2}{2\rho^2}\right)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}]+A\mathbf{j}\right]=\operatorname{div}\{\chi_+\nabla \mathrm{T}_+ +\chi_-\nabla \mathrm{T}_- +\Pi_+\mathbf{v}_+ +\Pi_-\mathbf{v}_-\},\tag{2}$$

где $\varepsilon = (\lambda_+\varepsilon_+ + \lambda_-\varepsilon_-)/\lambda_\Sigma$ — объемная плотность внутренней энергии плазмы;

$$A = \lambda_+\lambda_-\frac{\langle\mathbf{U},\mathbf{j}\rangle}{\rho}+\lambda_+\lambda_-\frac{(\lambda_- - \lambda_+)j^2}{2\rho^2}+\frac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_\Sigma}(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)+\frac{\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-}{\rho}.$$

В случае идеальных политропных электронов и ионов $\varepsilon = (\gamma-1)^{-1}p/\rho$,

$$A = \lambda_+\lambda_-\frac{\langle\mathbf{U},\mathbf{j}\rangle}{\rho}+\lambda_+\lambda_-\frac{(\lambda_- - \lambda_+)j^2}{2\rho^2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-}{\rho}.$$

Коэффициенты переноса $\mu_\pm$, $\chi_\pm$, σ, b получаются приближенным решением кинетических уравнений [3] и далее принимаются в виде [6–9]

$$\mu_+ = 0{,}96\frac{3m_i^{1/2}T_+^{5/2}}{4\pi^{1/2}e^4Z^4L};\quad \mu_- = 0{,}733\frac{3m_e^{1/2}T_-^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2}e^4ZL};$$
$$\sigma = \frac{3T_-^{3/2}}{4(2\pi m_e)^{1/2}e^2ZL0{,}5129};\quad b = \frac{5m_e^{1/2}e^4Z^3\rho^2L}{m_i^3k^{1/2}T_-^{3/2}},\tag{3}$$

где Z — кратность заряда ионов; $e_+ = Ze$; $e_- = e$; e — заряд электрона; L — кулоновский логарифм (далее $L = 15$); температуры $T_\pm$ измеряются в кельвинах.

В системе (1) для простоты не учтены термосила и анизотропия замагниченной плазмы [3]. Кроме того, выражения для коэффициентов переноса — теоретические и периодически корректируются.

Альфвеновские волны в ЭМГД. Плоская альфвеновская волна является решением ЭМГД-уравений (1) в бездиссипативном случае

($\mu_\pm = 0$, $b = 0$, $\chi_\pm = 0$, $\sigma = +\infty$) в предположении плоской симметрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$). С учетом диссипаций плоские течения двухжидкостной ЭМГД-плазмы подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U_x) = 0;$$

$$\frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U_x^2 + p_\Sigma + \frac{|H_\perp|^2}{8\pi}\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu_\Sigma \frac{\partial U_x}{\partial x}\right),\ p_\Sigma = \frac{k\rho}{\lambda_\Sigma e}\left(\frac{T_+}{Z} + T_-\right);$$

$$\frac{\partial \rho U_\perp}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho U_x U_\perp - \frac{H_x H_\perp}{4\pi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_\Sigma \frac{\partial U_\perp}{\partial x} + \mu_* \frac{\partial}{\partial x}\frac{j_\perp}{\rho}\right);$$

$$\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + U_x \frac{\partial T_\pm}{\partial x} + (\gamma - 1) T_\pm \frac{\partial U_x}{\partial x} = \\ = \frac{Z_\pm \lambda_\Sigma e(\gamma-1)}{k\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi_\pm \frac{\partial T_\pm}{\partial x}\right) + \frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{|j_\perp|^2}{\sigma} \pm b(T_- - T_+) + \right. \\ \left. + \mu_\pm\left[\frac{4}{3}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)^2 + \lambda_\mp^2 \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{j_\perp}{\rho}\right|^2 \pm 2\lambda_\mp \operatorname{Re}\left(\frac{\partial U_\perp}{\partial x}\overline{\frac{\partial}{\partial x}\frac{j_\perp}{\rho}}\right) + \left|\frac{\partial U_\perp}{\partial x}\right|^2\right]\right\}; \tag{4}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_\perp}{\partial t} + i\frac{\partial E_\perp}{\partial x} = 0,\ j_\perp = \frac{ic}{4\pi}\partial H_\perp/\partial x,\ H_x = \mathrm{const};$$

$$E_\perp - \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 E_\perp}{\partial x^2} = \frac{j_\perp}{\sigma} + \frac{iH_x}{c}U_\perp - \frac{i}{c}U_x H_\perp + \\ + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda_+ - \lambda_-)\frac{H_x H_\perp}{4\pi} - \mu_* \frac{\partial U_\perp}{\partial x} - \mu^* \frac{\partial}{\partial x}\frac{j_\perp}{\rho}\right];$$

$$E_x = -\frac{1}{c}\operatorname{Im}(\bar{U}_\perp H_\perp) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{|H_\perp|^2}{8\pi} - \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_* \frac{\partial U_x}{\partial x}\right).$$

Здесь использованы комплексные обозначения для поперечных величин ($U_\perp = U_y + iU_z$; $H_\perp = H_y + iH_z$; $E_\perp = E_y + iE_z$; $j_\perp = j_y + ij_z$; $Z_+ = Z$; $Z_- = 1$); черта означает комплексное сопряжение; Re, Im — вещественная и мнимая части комплексного числа.

Система (4) в бездиссипативном случае допускает частные решения, называемые плоскими альфвеновскими волнами, вида

$$U_\perp = u(t)e^{i\kappa x},\ H_\perp = h(t)e^{i\kappa x},\ E_\perp = e(t)e^{i\kappa x}, \\ T_\pm = \mathrm{const},\ \rho = \mathrm{const},\ \mathrm{U}_x = 0, \tag{5}$$

где комплексные функции $u(t)$, $h(t)$, $e(t)$ удовлетворяют линейной системе ОДУ с постоянными коэффициентами, получающейся подстановкой (5) в (4):

$$\frac{du}{dt} = \frac{i\kappa H_x}{4\pi\rho}h; \quad \frac{1}{c}\frac{dh}{dt} = \kappa e;$$
$$e = \left(\frac{iH_x}{c}u + \frac{i\kappa\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p}h\right) \Big/ \left(1 + \left(\frac{\kappa c}{\omega_p}\right)^2\right). \qquad (6)$$

Здесь $\Lambda = \sqrt{\lambda_+/\lambda_-} - \sqrt{\lambda_-/\lambda_+}$, $\mathrm{v}_A = H_x/\sqrt{4\pi\rho}$ — альфвеновская скорость; $\omega_p = \sqrt{4\pi\rho/(\lambda_+\lambda_-)}$ — плазменная частота. Решение системы (6) имеет вид

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t};$$

$$h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa \mathrm{v}_A}\{C_1\omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2\omega_- e^{i\omega_- t}\}; \qquad (7)$$

$$e(t) = \frac{i}{1+r^2}\left\{\left(\frac{H_x}{c} + \Lambda\sqrt{\lambda_+\lambda_-}\omega_+\right) C_1 e^{i\omega_+ t} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda\sqrt{\lambda_+\lambda_-}\omega_-\right) C_2 e^{i\omega_- t}\right\};$$
$$j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi}h(t),$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные константы, а частоты $\omega_\pm$ вычисляются по формуле

$$\omega_\pm = \frac{\kappa \mathrm{v}_A}{2}\left\{\frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2}\right]^{1/2}\right\}, \quad r = \frac{\kappa c}{\omega_p}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) в (5), заключаем что плоские альфвеновские волны суть поперечные колебания однородной неподвижной плазмы, являющиеся суперпозицией синусоидальных бегущих вдоль и против магнитного поля волн с фазовыми скоростями $-\omega_\pm(\kappa)/\kappa$, зависящими от длины волны $\ell = 2\pi/\kappa$. Из (8) следует, что волна, бегущая против магнитного поля, имеет бóльшую по абсолютной величине фазовую скорость. В МГД-пределе $r \ll 1$ имеем $\omega_\pm(\kappa) \sim \pm\kappa \mathrm{v}_A$ и полученное решение переходит в классическую альфвеновскую волну [2]. В коротковолновом пределе $r \gg 1$ имеем $\omega_\pm \cong \pm\omega_c^\mp$, где $\omega_c^\pm = H_x/(\lambda_\pm c)$ — циклотронные частоты; в частности, с уменьшением длины волны фазовые скорости альфвеновских бегущих волн стремятся к нулю с асимптотикой $\sim \mp\omega_c^\mp/\kappa$, $\kappa \to +\infty$.

На альфвеновской волне (5) условие квазинейтральности

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \partial E_x/\partial x \equiv 0$$

выполнено точно.

Таким образом, в двухжидкостной квазинейтральной плазме так же, как и в одножидкостной, имеют место поперечные колебания плазменной среды, рассматриваемые в работе как обобщенные альфвеновские волны, которые в МГД-пределе $r \ll 1$ переходят в классические альфвеновские волны.

Преобразование энергии в альфвеновской волне. Рассмотрим преобразование в плазме друг в друга различных видов энергии с объемной плотностью: $\varepsilon_m = H^2/8\pi$ — энергии магнитного поля; $\varepsilon_{kin}^{\pm} = \rho_{\pm}\mathbf{v}_{\pm}^2/2$ — кинетической энергии электронов и ионов; $\varepsilon_{\pm} = k\rho_{\pm}T_{\pm}/(m_{\pm}(\gamma-1))$ — тепловой энергии электронов и ионов; $\varepsilon_{kin} = \rho U^2/2$ — кинетической энергии плазмы, движущейся как единое целое; $\varepsilon_{el} = \lambda_+\lambda_- j^2/(2\rho) = (1 + Zm_-/m_+)^{-1}\rho_-(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)^2/2$ — с точностью до членов $\sim m_-/m_+$ кинетической энергии относительного движения электронов. Отметим, что $\varepsilon_{kin}^{+} + \varepsilon_{kin}^{-} = \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el}$. Поэтому полная энергия плазмы определяется объемной плотностью $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el} + \varepsilon_+ + \varepsilon_-$.

Для альфвеновской волны (5) $\varepsilon_{\pm} = \mathrm{const}$, $\varepsilon_m = \left|h(t)\right|^2/8\pi$, $\varepsilon_{kin} = \rho\left|u(t)\right|^2/2$, $\varepsilon_{el} = r^2\varepsilon_m$ — функции только времени и из закона сохранения полной энергии (2) следует $\varepsilon_m + \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el} = \mathrm{const}$. С течением времени происходит двусторонний обмен кинетической энергии ε_{kin} с энергией магнитного поля ε_m и кинетической энергией относительного движения электронов ε_{el}: $\varepsilon_{kin} \rightleftarrows \varepsilon_m + \varepsilon_{el}$.

Пусть в (7) $C_1 = R_1 e^{i\varphi}$, $C_2 = R_2 e^{i\psi}$, $|C_1| = R_1$, $|C_2| = R_2$. Тогда прямой расчет по формулам (7) дает

$$\varepsilon_{kin} = \frac{\rho}{2}\{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos[(\omega_+ - \omega_-)t + \varphi - \psi]\};$$

$$\varepsilon_m = \frac{\rho}{2}\left\{\frac{\omega_+^2R_1^2 + \omega_-^2R_2^2}{\kappa^2\mathrm{v}_A^2} - \frac{2R_1R_2}{1+r^2}\cos[(\omega_+ - \omega_-)t + \varphi - \psi]\right\}.$$

Значит, ε_{kin} и ε_m (и тем более $\varepsilon_{el} = r^2\varepsilon_m$) совершают в противофазе гармонические колебания с частотой $\omega_+ - \omega_-$ и амплитудами ρR_1R_2, $\rho R_1R_2/(1+r^2)$ соответственно вокруг значений $\rho(R_1^2 + R_2^2)/2$, $\rho(\omega_+^2R_1^2 + \omega_-^2R_2^2)\big/(2\kappa^2\mathrm{v}_A^2)$. Относительные амплитуды колебаний ε_{kin} и ε_m равны $2R_1R_2/\left(R_1^2 + R_2^2\right)$ и $2R_1R_2\omega_+\left|\omega_-\right|\big/\left(R_1^2\omega_+^2 + R_2^2\omega_-^2\right)$ соответственно.

Интенсивность обмена энергией определяется частотой $\omega_+ - \omega_-$, которая в МГД-пределе $r \ll 1$ равна $\cong 2r\sqrt{\omega_c^+\omega_c^-} \ll 2\sqrt{\omega_c^+\omega_c^-}$, а в коротковолновом пределе $r \gg 1$ составляет $\cong \omega_c^-$. В частности, интенсивность обмена энергией ε_{kin} с ε_m и ε_{el} для коротких альфвеновских волн, как минимум, на два порядка выше, чем для длинных. При $R_1 = 0$ или $R_2 = 0$, т.е. когда альфвеновская волна распространяется только вдоль или только против магнитного поля, амплитуды колебаний обращаются в нуль, и обмен энергией отсутствует: $\varepsilon_m = \mathrm{const}$, $\varepsilon_{kin} = \mathrm{const}$, $\varepsilon_{el} = \mathrm{const}$.

В МГД-теории $\varepsilon_{el} \ll \varepsilon_m$ и закон сохранения полной энергии принимает вид $\varepsilon_{kin} + \varepsilon_m = \mathrm{const}$, но для конечных r опущенное слагаемое ε_{el} существенно меняет баланс полной энергии, что не учитывается в теории МГД.

Временное затухание альфвеновских волн. Альфвеновская волна (5) может рассматриваться как решение задачи Коши на прямой для системы (4) с нулевыми диссипациями и начальными условиями вида

$$\begin{aligned} &U_\perp|_{t=0} = u_0 e^{i\kappa x},\ H_\perp|_{t=0} = h_0 e^{i\kappa x},\\ &E_\perp|_{t=0} = e_0 e^{i\kappa x}, T_\pm|_{t=0} = T_\pm^0 = \mathrm{const},\ U_x|_{t=0} = 0;\\ &\rho|_{t=0} = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{9}$$

Константы $C_1, C_2, T_\pm$ из (5), (7) и e_0 связаны с константами $u_0, h_0 \in \mathbb{C}$, $T_\pm^0 > 0$ соотношениями

$$C_1 = \left(\frac{\kappa \mathrm{v}_A}{\sqrt{4\pi\rho}} h_0 - \omega_- u_0\right)(\omega_+ - \omega_-)^{-1};$$

$$C_2 = \left(\frac{\kappa \mathrm{v}_A}{\sqrt{4\pi\rho}} h_0 - \omega_+ u_0\right)(\omega_- - \omega_+)^{-1};$$

$$e = i\left(\frac{H_x}{c} u_0 + \frac{\kappa \mathrm{v}_A}{\omega_p} \Lambda h_0\right) \Big/ (1 + r^2)^{-1},\ \ T_\pm = T_\pm^0.$$

Тогда временное затухание альфвеновской волны (5), очевидно, задается решением задачи Коши на прямой для системы (4) с конечными диссипациями и теми же начальными условиями (9). Предполагая доказанной теорему единственности решения задачи Коши на прямой для системы (4), искомое решение легко найти в виде

$$\begin{aligned} &U_\perp = u(t) e^{i\kappa x},\ H_\perp = h(t) e^{i\kappa x},\ E_\perp = e(t) e^{i\kappa x},\\ &T_\pm = T_\pm(t),\ U_x \equiv 0,\ \rho \equiv \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{10}$$

где комплексные функции $u(t)$, $h(t)$ и вещественные $T_\pm(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ, получающейся подстановкой функций (10) в систему (4):

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\kappa^2 \mu_\Sigma}{\rho} u + \left(\frac{i\kappa H_x}{4\pi\rho} + \frac{c\kappa^3 \mu_*}{4\pi\rho^2}\right) h;$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\kappa c}{1+(kc/\omega_p)^2}\left\{\left(\frac{iH_x}{c}+\frac{\kappa^2\mu_*}{\rho}\right)u+\left(-\frac{c\kappa}{4\pi\sigma}+\frac{i\kappa\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p}-\frac{c\kappa^3\mu^*}{4\pi\rho^2}\right)h\right\};$$

$$\frac{dT_\pm}{dt}=Z_\pm a_*\left\{\mu_\pm\kappa^2\left[|u|^2+\frac{c^2\kappa^2\lambda_\mp^2}{16\pi^2\rho^2}|h|^2\mp\frac{c\kappa\lambda_\mp}{4\pi\rho}(\bar{u}h+u\bar{h})\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{c^2\kappa^2}{16\pi^2\sigma}|h|^2\pm b(T_- - T_+)\right\} \tag{11}$$

с начальными условиями

$$u(0)=u_0,\quad h(0)=h_0,\quad T_\pm(0)=T_\pm^0. \tag{12}$$

Здесь $a_*=\lambda_\Sigma e(\gamma-1)/(k\rho)$, $r=\kappa c/\omega_p$. Комплексная амплитуда $e(t)$ явно выражается через $h(t)$, $u(t)$:

$$e(t)=\left\{\left(\frac{iH_x}{c}+\frac{\kappa^2\mu_*}{\rho}\right)u(t)+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{c\kappa}{4\pi\sigma}+\frac{i\kappa\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p}-\frac{c\kappa^3\mu^*}{4\pi\rho^2}\right)h(t)\right\}\Big/(1+r^2).$$

Тем самым для исследования процесса временного затухания и релаксации температур электронов и ионов в альфвеновской волне не надо решать задачу Коши для системы (4) с начальным условием (9), а достаточно решить значительно более простую задачу Коши (11), (12) для системы ОДУ. Решение последней задачи упрощается, если учесть, что на решении (10) закон сохранения полной энергии (2) принимает вид

$$\frac{\rho\,|u(t)|^2}{2}+(1+r^2)\frac{|h(t)|^2}{8\pi}+\frac{T_+(t)}{Za_*}+\frac{T_-(t)}{a_*}=C_0=\mathrm{const} \tag{13}$$

и позволяет в системе (11) исключить T_+ из числа неизвестных.

Из (11), (12) следует, что времен́ое поглощение альфвеновских волн не зависит от теплопроводностей электронов и ионов, а условие квазинейтральности на решении (10) выполнено точно: $\mathrm{div}\mathbf{E}=\partial E_x/\partial x\equiv 0$.

Система сильно нелинейна из-за зависимости коэффициентов переноса σ, b, $\mu_\pm$, μ_*, μ^* от T_+, T_-. Согласно (3)

$$\sigma=RT_-^{3/2},\ b=R_0T_-^{-3/2};\ \mu_\pm=T_\pm^{5/2}\Big/R_\pm;\ R=\frac{3k^{3/2}}{4(2\pi m_-)^{1/2}e^2ZL\cdot 0{,}5129};$$

$$R_+=\frac{4\pi^{1/2}e^4Z^4L}{0{,}96\cdot 3m_+^{1/2}k^{5/2}};\ R_-=\frac{4(2\pi)^{1/2}e^4ZL}{0{,}733\cdot 3m_-^{1/2}k^{5/2}};\ R_0=\frac{5m_-^{1/2}e^4Z^3L\rho^2}{m_+^3k^{1/2}}.$$

В частности, имеем

$$\mu_* = (\lambda_-/R_+)T_+^{5/2} - (\lambda_+/R_-)T_-^{5/2}; \ \ \mu^* = (\lambda_-^2/R_+)T_+^{5/2} + (\lambda_+^2/R_-)T_-^{5/2}.$$

Решение уравнений для амплитуд в незамагниченной невязкой плазме. В случае $H_x = 0$, $\mu_\pm = 0$ система (11) позволяет исследовать поглощение стационарной синусоидальной волны в однородной плазме вследствие омического сопротивления и обмена энергией между плазменными компонентами ($\sigma < +\infty$, $b > 0$). Практически эта ситуация встречается, вероятно, редко, но с методологической точки зрения представляет несомненный интерес. В этом случае из (11) следует $u(t) \equiv \mathrm{const}$, а $h(t)$ можно считать вещественной положительной функцией. Исключая T_+ посредством интеграла энергии (13), приходим к автономной системе ОДУ на плоскости (h, $T = T_-$):

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\alpha_0 h}{T_-^{3/2}}, \quad \frac{dT_-}{dt} = \alpha_* \frac{h^2}{T_-^{3/2}} + \frac{\beta_*}{T_-^{3/2}} - \frac{\gamma_*}{T_-^{1/2}}, \quad h > 0, \ T_- > 0, \tag{14}$$

где константы $\alpha_* \in \mathbb{R}$, α_0, β_*, $\gamma_* > 0$ имеют вид

$$\alpha_0 = \frac{r^2\omega_p^2}{4\pi R(1+r^2)}, \ \ \beta_* = R_0 Z a_*^2 C_0, \ \ \gamma_* = (1+Z)R_0 a_*,$$

$$\alpha_* = a_* \left[\frac{m_+}{m_\Sigma}\frac{r^2\omega_p^2}{16\pi^2 R} - \frac{R_0 Z a_*(1+r^2)}{8\pi}\right].$$

Система (14) легко интегрируется. Поскольку $dh/dt < 0$, то h можно взять в качестве новой независимой переменной вместо времени t. Тогда для искомой функции $T(h)$ получим с учетом (14) линейное уравнение $\dfrac{dT}{dh} = \dfrac{\gamma_*}{\alpha_0}\dfrac{T}{h} - \dfrac{\alpha_* h^2 + \beta_*}{\alpha_0 h}$, имеющее общее решение вида

$$\begin{aligned} T(h) &= Ch^{\gamma_*/\alpha_0} + \frac{\beta_*}{\gamma_*} - \frac{\alpha_*}{2\alpha_0 - \gamma_*}h^2, \ \ \gamma_* \neq 2\alpha_0, \\ T(h) &= Ch^2 + \frac{\beta_*}{\gamma_*} - \frac{\alpha_*}{\alpha_0}h^2 \ln h, \ \ \gamma_* = 2\alpha_0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа. После чего зависимость $h(t)$ находим из первого уравнения (14) квадратурой

$$-\alpha_0 t = \int \frac{T(h)^{3/2}}{h} dh, \tag{16}$$

где $T(h)$ вычисляется по (15). Кроме того, есть еще одно решение, не охватываемое формулами (15), (16), получающееся интегрированием системы (14), где надо положить $h \equiv 0$:

$$-\frac{\beta_*}{\gamma_*}T^{1/2} - \frac{T^{3/2}}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_*}{\gamma_*}\right)^{3/2} \ln\left|\frac{\sqrt{\beta_*/\gamma_*} + T^{1/2}}{\sqrt{\beta_*/\gamma_*} - T^{1/2}}\right| = \frac{\gamma_*}{2}t + \mathrm{const}. \tag{17}$$

На основании (15), (16) легко построить интегральные кривые на плоскости ($h > 0$, $T > 0$) системы (14) и детально проанализировать их расположение в зависимости от констант α_*, β_*, γ_*, α_0 [10]. Основные выводы можно сформулировать так.

Пусть $\theta = 2\pi RR_0 a_*/\omega_p^2 = 3{,}66(\gamma-1)(m_-/m_+)(1+Zm_-/m_+)/\sqrt{2\pi}$. Тогда $\theta \ll 1$ (для $\gamma = 5/3$ и дейтерия $\theta = 0{,}00027$). Разобьем альфвеновские волны на диапазоны по их длине $\ell = 2\pi/\kappa$: короткие волны $\ell \leq N_1 c/\omega_p$, средние — $N_1 c/\omega_p < \ell \leq N_2 c/\omega_p$, длинные — $N_2 c/\omega_p < \ell$, где $N_1 = 2\pi(\theta^{-1}(1+Z)^{-1} - 1)^{1/2}$, $N_2 = 2\pi(m_+ m_\Sigma^{-1} Z^{-1}\theta^{-1} - 1)^{1/2}$, c/ω_p — скиновая длина. Например, для $\gamma = 5/3$ и дейтерия границы диапазонов задаются при $N_1 = 269$, $N_2 = 380$. Несложно проверить, что короткие волны соответствуют условиям $\gamma_* \leq 2\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$, средние — $\alpha_* \geq 0$, $\gamma_* > 2\alpha_0$, длинные — $\alpha_* < 0$, $\gamma_* > 2\alpha_0$. Интегральные кривые для коротких волн изображены на рис. 1, *а*, для средних — на рис. 1, *б, в* (рис. 1, *в* соответствует $\alpha_* = 0$), для длинных — на рис. 1, *г*. Штриховой линией на этих рисунках обозначена парабола $T_*(h) = \beta_*/\gamma_* + h^2\alpha_*/\gamma_*$, составленная из точек локального максимума или минимума функции $T(h)$. Для заданных начальных условий $T_\pm^0 > 0$, $h_0 > 0$ решение (14) задается интегральной кривой, начинающейся в точке (h_0, T_-^0) и входящей (за бесконечное время) в особую точку $(0, T_-^* = \beta_*/\gamma_*)$ системы (14). Начальное значение (h_0, T_-^0) лежит внутри криволинейного треугольника, ограниченного осями $h = 0$, $T_- = 0$ и кривой $T_{\text{гр}}(h) = a_* C_0 - (1+r^2)a_* h^2/(8\pi)$, на которой ионная температура обращается в нуль, где константа C_0 вычисляется по $T_\pm^0$, h_0 посредством формулы (13) с $u(t) \equiv 0$. Несложно установить, что интегральная кривая, начинающаяся в точке (h_0, T_-^0), при $t \geq 0$ все время остается внутри криволинейного треугольника; в частности, в каждый момент времени температуры электронов и ионов положительные.

Как следует из рис. 1, при затухании альфвеновской волны энергия магнитного поля полностью переходит в тепловую энергию электронов и ионов, при этом изменение самих тепловых энергий электронов и ионов может иметь немонотонный характер, что свидетельствует об обмене энергией между плазменными компонентами.

Релаксация температур и поглощение альфвеновской волны. Поглощение альфвеновской волны состоит в трансформации ее кинетической ($\varepsilon_{kin} = \rho\left|u(t)\right|^2/2$) и полной (с учетом кинетической энергии относительного движения электронов) магнитной ($\varepsilon_m = (1 + r^2)\left|h(t)\right|^2/8\pi$) энергий в тепловую энергию электронов и ионов $\varepsilon_- = T_-/a_*$, $\varepsilon_+ = T_+/(Za_*)$. Этот процесс налагается на релаксацию температур электронов и ионов, определяемую коэффициентом b. Как

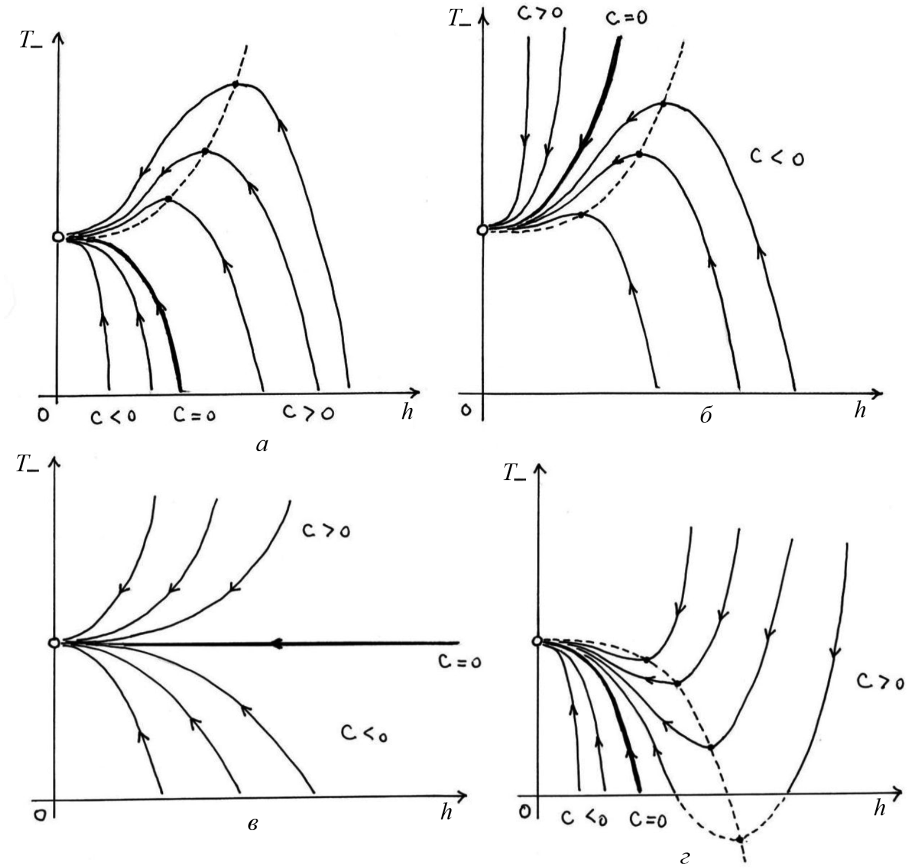

Рис. 1. Интегральные кривые для коротких волн (*а*) ($\gamma_* \leq 2\alpha_0, \alpha_0 > 0$); средних волн (*б*) ($\gamma_* > 2\alpha_0$, $\alpha_* > 0$); средних волн (*в*) ($\gamma_* > 2\alpha_0$, $\alpha_* = 0$); длинных волн (*г*) ($\gamma_* > 2\alpha_0$, $\alpha_* < 0$)

показало численное решение задачи Коши (11), (12), поглощение альфвеновской волны распадается на два этапа. На первом происходит быстрое преобразование магнитной и в значительной мере кинетической энергий альфвеновской волны в тепловую энергию преимущественно электронов, на втором — в основном медленная релаксация температур, аппроксимируемая решением системы (11) с $h = 0$, $u = 0$, имеющая вид (17), при этом остатки кинетической энергии волны переходят в тепловую энергию. Особенности процесса поглощения на втором этапе рассмотрены в следующем пункте.

Равновесная температура T^0 находится из закона сохранения энергии (13) и имеет вид

$$T^0 = \frac{T_0^+ + ZT_0^-}{1+Z} + \\ + \frac{Z}{1+Z} \cdot \frac{\lambda_\Sigma e(\gamma - 1)}{k} \left\{ \frac{|u_0|^2}{2} + \frac{|h_0|^2}{8\pi\rho} \left[1 + \left(\frac{\kappa c}{\omega_p} \right)^2 \right] \right\}, \; r = \frac{\kappa c}{\omega_p}.$$

В частности, равновесная температура не зависит от замагниченности плазмы H_x, но зависит от ее плотности и длины $\ell = 2\pi/\kappa$ альфвеновской волны. Отсюда следует, что поглощение коротких ($r \gg 1$) альфвеновских волн приводит к сильному разогреву плазмы. Скорость поглощения волны резко возрастает при учете гидродинамических вязкостей электронов и ионов или уменьшении длины волны. С другой стороны, поглощение кинетической энергии существенно зависит от сдвига фаз начальных амплитуд u_0 и h_0.

Из безразмерного вида системы (11) следует, что задача о временно́м поглощении альфвеновских волн имеет два определяющих безразмерных параметра, пропорциональных $(\ell\rho)^{-1}$ и $\rho^{5/2}/H_x^4$:

$$r = \frac{\kappa c}{\omega_p} = \frac{c\lambda_+\lambda_-}{2\rho\ell}; \quad \zeta = 0{,}386LZ^3\frac{ce^3}{m_+^2}\frac{(4\pi\rho)^{5/2}}{H_x^4}\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)^{-3/2}. \tag{18}$$

На рис. 2 приведены типичные зависимости от времени тепловых энергий электронов и ионов, магнитной и кинетической энергий для варианта $r = 0{,}1$, $\zeta = 100$, $T_+^0 = 0{,}01$, $T_-^0 = 1$, $h_0 = 4$, $u_0 = 1$. При этом

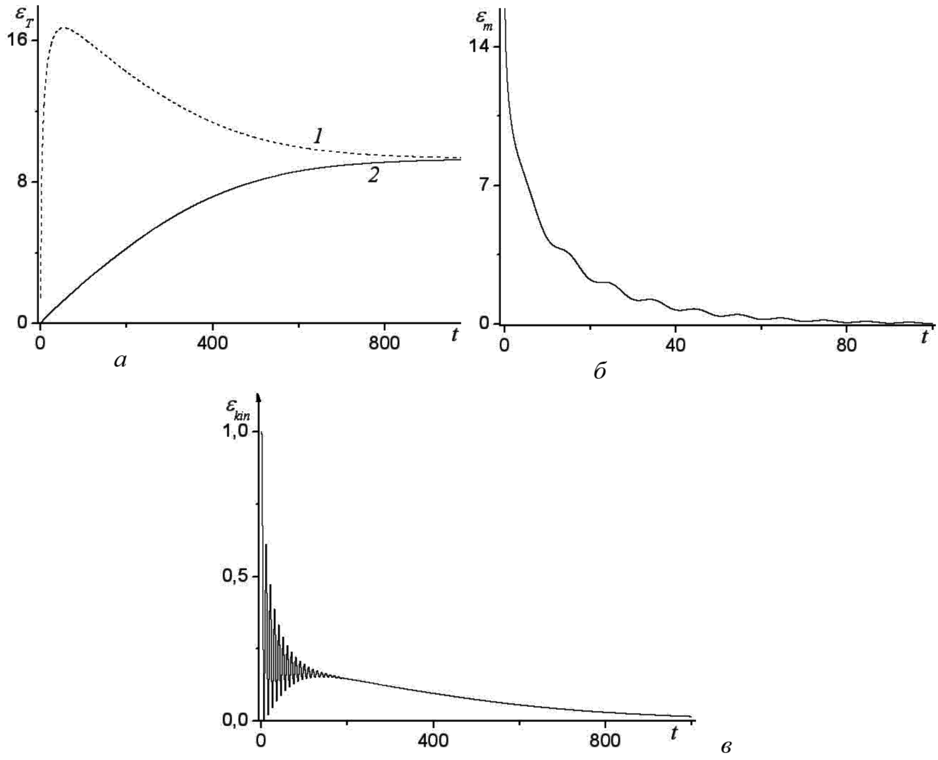

Рис. 2. Зависимость от времени тепловой энергии электронов (*1*) и ионов (*2*) в альфвеновской волне (*а*), магнитной энергии альфвеновской волны (*б*) и кинетической энергии альфвеновской волны (*в*)

в качестве характерных масштабов плотности, напряженности магнитного поля, скорости, длины, времени, плотности энергии и температуры выбирались величины $\rho_0 = \rho$, $H_0 = H_x$, $U_0 = \mathrm{v}_A$, $L_0 = c/\omega_p$ (скиновая длина), $t_0 = (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$, $\varepsilon_0 = H_0^2/(8\pi)$, $T_0 = \mathrm{v}_A^2 \lambda_\Sigma e/(2k)$. Как видно, поглощение магнитной энергии волны происходит значительно быстрее, чем кинетической, и сопровождается взаимным обменом кинетической и магнитной энергиями (колебания на графиках, обусловленные преобразованием энергии в альфвеновской волне). Кроме того, поглощенная энергия альфвеновской волны преобразуется прежде всего в тепловую энергию электронов, которые затем отдают ее ионам благодаря механизму релаксации.

Графики на рис. 2 соответствуют $\mu_\pm = 0$. Если учесть гидродинамическую вязкость ионов, то процесс поглощения резко ускоряется, например магнитная энергия поглощается за время $\sim (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$. При дополнительном учете электронной вязкости, вычисляемой по (3), процесс поглощения еще более ускоряется, занимая доли $(\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$, а энергия магнитного поля поглощается за время $\sim 10^{-2} (\omega_c^+ \omega_c^-)^{-1/2}$.

Из безразмерного вида (11) следует, что для $\zeta \gg 1$ определяющим фактором поглощения альфвеновской волны является магнитная вязкость, а при $\zeta \ll 1$ — гидродинамические вязкости электронов и ионов, причем в этом случае их превалирующая роль в поглощении с увеличением температур электронов и ионов только возрастает, поскольку $\mu_\pm \sim T_\pm^{5/2}$, $\mu_m = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma} \sim T_-^{3/2}$. Кроме того, короткие волны ($r \gg 1$) поглощаются намного быстрее длинных ($r \ll 1$). Детальный анализ этих закономерностей зависит от соотношения $r : \zeta$ и выходит за рамки настоящей работы.

Релаксация температур и особые точки. Математическая основа процесса релаксации — наличие особой точки у системы (11), если исключить в ней из числа неизвестных температуру ионов T_+ посредством интеграла энергии (13). Эта единственная особая точка в безразмерных переменных имеет вид $u = 0$, $h = 0$, $T = T^0 = Z(\gamma - 1)C_0/(1 + Z)$, где $C_0 = |u_0|^2 + |h_0|^2 (1 + r^2) + T_+^0/(Z(\gamma - 1)) + T_-^0/(\gamma - 1)$ — значение безразмерного интеграла энергии, определяемого начальными условиями.

Запишем систему (11) в безразмерном виде:

$$\frac{du}{dt} = r \left(i + \frac{r^2}{\zeta} \alpha_1^0 \right) h + \frac{r^2}{\zeta} \beta_1^0 u;$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{r}{1 + r^2} \left\{ \left(i + \frac{r^2}{\zeta} \alpha_1^0 \right) u + \left(-\frac{\zeta}{T_-^{3/2}} + i\Lambda + \frac{r^2}{\zeta} \beta_2^0 \right) h \right\}; \qquad (19)$$

$$\frac{dT_\pm}{dt} = 2Z_\pm(\gamma-1)\left\{\frac{m_\mp}{m_\Sigma}r^2\zeta\frac{|h|^2}{T_-^{3/2}} \pm \zeta\eta^0\frac{(T_- - T_+)}{T_-^{3/2}} + \right.$$

$$\left. +\alpha_2^\pm\left[\frac{r^2}{\zeta}|u|^2 + \frac{r^4}{\zeta}\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}|h|^2 \mp \frac{r^3}{\zeta}\left(\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}\right)^{1/2}(\bar{u}h + u\bar{h})\right]\right\},$$

где ζ — число подобия, вычисляемое по (18), величины α_1^0, β_1^0, β_2^0 зависят от температур $T_\pm$ и вычисляются по формулам

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^+\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2} - \alpha_2^-\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2},\ \beta_1^0 = -(\alpha_2^+ + \alpha_2^-),$$

$$\beta_2^0 = \frac{\lambda_-}{\lambda_+}\alpha_2^+ - \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\alpha_2^-,\ \alpha_2^\pm = \frac{T_\pm^{5/2}}{R_\pm}.$$

Наконец η^0, $R_\pm$ — универсальные константы:

$$\eta^0 = 1{,}46\frac{m_-}{m_+}\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right),\ R_+ = 2{,}87\left(\frac{m_-}{m_+}\right)^{1/2}Z^3\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)^{-1},$$

$$R_- = 5{,}313\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)^{-1}.$$

Релаксация температур электронов и ионов на второй стадии поглощения аппроксимируется решением системы (19) в предположении $h = 0, u = 0$. Для более детального исследования релаксация и получения количественных оценок необходимо изучить поведение решений (19) в окрестности особой точки.

Матрица Якоби системы (19), в которой исключена ионная температура $T_+ = Z(\gamma-1)[C_0 - (1+r^2)|h|^2 - |u|^2] - ZT_-$ в особой точке $(T^0, 0, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$\mathrm{J} = \mathrm{diag}\left\{-\frac{2(\gamma-1)\eta(1+Z)}{(T^0)^{3/2}}, \mathrm{J}^0\right\},$$

где $\mathrm{J}^0 = \left\|\mathrm{J}_{js}^0\right\|$, $1 \le j, s \le 2$ — 2×2-блочная матрица с 2×2-блоками:

$$\mathrm{J}_{11}^0 = \begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_1\end{pmatrix},\ \mathrm{J}_{12}^0 = \begin{pmatrix}\alpha_1 & -r\\ r & \alpha_1\end{pmatrix},\ \mathrm{J}_{21}^0 = \frac{r}{1+r^2}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -1\\ 1 & \alpha_2\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{J}_{22}^0 = \frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix}\beta_0 & -\Lambda r^2\\ \Lambda r^2 & \beta_0\end{pmatrix},$$

где $\beta_0 = r\left(\beta_2 - \frac{\zeta r}{(T^0)^{3/2}}\right)$, $\alpha_1 = \frac{r^3}{\zeta}\alpha_1^0$, $\beta_1 = \frac{r^2}{\zeta}\beta_1^0$, $\beta_2 = \frac{r^2}{\zeta}\beta_2^0$. Очевидно, что $\lambda_0 = -2(\gamma-1)\eta(1+Z)\big/(T^0)^{3/2}$ — собственное число

J. Остальные собственные числа являются собственными числами J^0. Прямое вычисление дает

$$\det(\mathrm{J}^0 - \lambda \mathrm{I}_4) =$$
$$= \frac{1}{(1+r^2)^2}\{[(\beta_1-\lambda)(\beta_0-\lambda(1+r^2))+r^2-\alpha_1^2]^2+[(\beta_1-\lambda)\Lambda r^2-2\alpha_1 r]^2\},$$

где I_4 — единичная матрица четвертого порядка. Поэтому для нахождения собственных чисел J^0 имеем два квадратных уравнения:

$$\lambda^2(1+r^2)-\lambda[\beta_0+\beta_1(1+r^2)\pm i\Lambda r^2]+\beta_1\beta_0+r^2-\alpha_1^2\pm i(\beta_1\Lambda r^2-2\alpha_1 r) = 0. \tag{20}$$

Несложный анализ уравнения (20) показывает, что: а) каждое из уравнений (20) не имеет вещественных, сопряженных или кратных корней; б) если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — корни (20) для верхнего знака, то $\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$ — корни (20) для нижнего знака; в) все корни (20) имеют отрицательные вещественные части; г) все собственные числа матрицы Якоби J однократные и имеют вид $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}$ и есть базис $\mathbb{C}^5$, состоящий из собственных векторов матрицы Якоби.

В частности, единственная особая точка системы (19) — притягивающий устойчивый многомерный узел и по теореме Гробмана–Хартмана [11] в некоторой окрестности особой точки топология интегральных кривых системы (19) и ее линеаризации в особой точке совпадают. Таким образом, качественная картина релаксации правильно описывается линеаризацией системы (19) в особой точке $(T^0, 0, 0, 0, 0)$, решения которой несложно получить в явном виде.

Рассмотрим линеаризованную систему

$$(\dot{T}, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{h}_1, \dot{h}_2)^* = \mathrm{J}(T, u_1, u_2, h_1, h_2)^*, \tag{21}$$

где звездочка означает транспонирование, а точка — дифференцирование по t. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — корни характеристического уравнения (20) для верхнего знака, $x_j + iy_j \neq 0$ — собственный вектор J, отвечающий значению λ_j, $j = 1, 2$. Тогда, как известно, линейная оболочка $\mathrm{V}_j = [x_j, y_j]$ является двумерным инвариантом подпространства $\mathbb{R}^5$ для оператора J, причем если $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$, то

$$\mathrm{J}x_j = a_j x_j - b_j y_j, \ \mathrm{J}y_j = a_j y_j + b_j x_j, \quad j = 1, 2.$$

Если $x_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$, то $\mathrm{V}_0 = [x_0]$ — собственное подпространство, отвечающее значению λ_0, а $\mathbb{R}^5$ распадается в прямую сумму $\mathbb{R}^5 = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$. В частности, $\{x_0, x_1, y_1, x_2, y_2\}$ — базис $\mathbb{R}^5$, матрица оператора J в котором равна

$$\mathrm{diag}\left\{1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Поэтому если $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ — координаты вектора из $\mathbb{R}^5$ в базисе $\{x_0, x_1, y_1, x_2, y_2\}$, то линейная система (21) в этих координатах распадается на три независимые подсистемы:

$$\dot{z}_0 = \lambda_0 z_0, \quad \begin{array}{l} \dot{z}_1 = a_1 z_1 + b_1 z_2 \\ \dot{z}_2 = -b_1 z_1 + a_1 z_2, \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{z}_3 = a_2 z_3 + b_2 z_4 \\ \dot{z}_4 = -b_2 z_3 + a_2 z_4, \end{array}$$

решение которых, очевидно, имеет вид:

$$z_0(t) = D_0 e^{\lambda_0 t}, \quad \begin{array}{l} (z_1(t), z_2(t)) = D_1 e^{a_1 t}(\cos(\varphi_1 - b_1 t), \sin(\varphi_1 - b_1 t)) \\ (z_3(t), z_4(t)) = D_2 e^{a_2 t}(\cos(\varphi_2 - b_2 t), \sin(\varphi_2 - b_2 t)), \end{array} \tag{22}$$

где D_0, D_1, D_2, φ_1, φ_2 — произвольные вещественные константы.

Выше отмечалось, что λ_0, a_1, $a_2 < 0$, поэтому из (22) следует, что проекция любого решения линеаризованной системы (21) на двумерную плоскость V_j, $j = 1, 2$, есть спираль, наматывающаяся на точку 0 с угловой скоростью b_j и декрементом убывания расстояния от начала отсчета $|a_j|$. Из (22) следует разложение

$$(u(t), h(t))^* = \sum_{j=1}^{2} D_j e^{a_j t}(\cos(\varphi_j - b_j t) x_j + \sin(\varphi_j - b_j t) y_j).$$

В частности, декременты экспоненциального стремления к 0 величин $u(t)$, $h(t)$ равны $\min\{|a_1|, |a_2|\}$. Выпишем явные выражения для x_j, y_j, a_j, b_j. Положим

$$x_j = \left(0, \frac{r(\beta_1 - a_j) - \alpha_1 b_j}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, -\frac{r b_j + \alpha_1(\beta_1 - a_j)}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, 0, 1\right),$$

$$y_j = \left(0, \frac{r b_j + \alpha_1(\beta_1 - a_j)}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, \frac{r(\beta_1 - a_j) - \alpha_1 b_j}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, -1, 0\right).$$

Тогда легко проверить, что $x_j + i y_j$ — собственный вектор J для собственного значения $\lambda_j = a_j + i b_j$, $j = 1, 2$, причем $x_j \perp y_j$ и $\|x_j\| = \|y_j\| = \left(1 + \dfrac{\alpha_1^2 + r^2}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}\right)^{1/2}$. Решая квадратное уравнение (20) для верхнего знака и используя формулу для извлечения квадратного корня из комплексного числа, получаем

$$a_{1,2} = \frac{1}{2(1 + r^2)} \left\{\beta_0 + \beta_1(1 + r^2) \pm \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}\right]^{1/2}\right\},$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{2(1 + r^2)} \left\{\Lambda r^2 \pm \operatorname{sgn} B \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}\right]^{1/2}\right\},$$

где

$$A = [\beta_0 - \beta_1(1+r^2)]^2 - \Lambda^2 r^4 - 4(1+r^2)(r^2-\alpha_1^2),$$
$$B = 2[\Lambda r^2(\beta_0 + \beta_1(1+r^2)) - 2(1+r^2)(\beta_1 \Lambda r^2 - 2\alpha_1 r)].$$

Эти громоздкие формулы упрощаются в частных и предельных случаях.

При $r \gg 1$ (короткие волны) имеем асимптотику, считая $h_0 \neq 0$, $\mu_\pm \neq 0$:

$$a_{1,2} \sim \left(\frac{Z(\gamma-1)}{1+Z}\right)^{5/2} |h_0|^5\, r^7 \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_\pm}\frac{1}{\zeta R_\pm}; \tag{23}$$
$$b_{1,2} \sim \frac{1}{2}\left\{\Lambda \pm \frac{\Lambda R^* - \Lambda R_\Sigma - 4R_*}{\lambda_\Sigma(\lambda_+^{-1}R_+^{-1} - \lambda_-^{-1}R_-^{-1})}\right\},$$

где $R^* = (\lambda_-/\lambda_+)R_+^{-1} + (\lambda_+/\lambda_-)R_-^{-1}$, $R_\Sigma = R_+^{-1} + R_-^{-1}$, $R^* = (\lambda_-/\lambda_+)^{1/2}R_+^{-1} + (\lambda_+/\lambda_-)^{1/2}R_-^{-1}$, причем верхние и нижние знаки в (23) соответствуют друг другу.

При $r \ll 1$ (длинные волны) имеем асимптотику

$$a \sim -\frac{r^2\zeta}{2A_0^{3/2}}[1 + R_\Sigma A_0^4],$$
$$A_0 = \frac{Z(\gamma-1)}{Z+1}\left[\frac{T_+^0}{Z(\gamma-1)} + \frac{T_-^0}{\gamma-1} + |h_0|^2 + |u_0|^2\right],$$
$$b \sim \pm r.$$

Формулы для a_j, b_j значительно упрощаются при $\mu_\pm = 0$ и в МГД-пределе [10].

Сравнение с линейной теорией. Пусть $\rho = \rho_0$, $U_x = 0$, $T_+ = T_- = T_0$, $H_\perp = 0$, $U_\perp = 0$, $E_\perp = 0$ — константное решение системы (4). Рассмотрим приближенное решение (4) вида

$$\rho = \rho_0 + \rho e^{i(kx-\omega t)},\ U_x = U_x e^{i(kx-\omega t)},\ T_\pm = T_0 + T_\pm e^{i(kx-\omega t)};$$
$$H_\perp = H_\perp e^{i(kx-\omega t)},\ U_\perp = U_\perp e^{i(kx-\omega t)},\ E_\perp = E_\perp e^{i(kx-\omega t)}, \tag{24}$$

где постоянные комплексные величины ρ, U_x, $T_\pm$, $H_\perp$, $U_\perp$, $E_\perp$ в правых частях (24) (комплексные амплитуды) считаются малыми. Подставляя функции (24) в систему (4) и отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости по комплексным амплитудам, получим линейную систему уравнений для нахождения комплексных амплитуд и дисперсионного соотношения между ω и κ. В итоге получим

$$\rho = 0, \quad U_x = 0, \quad T_\pm = 0 \tag{25}$$

(соотношения между $H_\perp$, $U_\perp$, $E_\perp$ более сложные, мы их не приводим), а комплексное ω находится по κ из квадратного дисперсионного уравнения

$$(1+r^2)\omega^2 + i\omega\kappa^2 \left\{ \mu_m + \frac{\mu_\Sigma}{\rho_0} + r^2 \frac{\lambda_\Sigma}{\rho_0} \left(\frac{\mu_+}{\lambda_+} + \frac{\mu_-}{\lambda_-} \right) - \frac{i\Lambda \mathrm{v}_A c}{\omega_p} \right\} -$$

$$-\frac{\mu_\Sigma}{\rho_0}\kappa^4 \left\{ \mu_m + \frac{r^2}{\rho_0} \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\mu_+ + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\mu_- \right) - \frac{i\Lambda \mathrm{v}_A c}{\omega_p} \right\} + \frac{\kappa^2 c^2}{4\pi\rho_0} \left(\frac{iH_x}{c} + \frac{\mu_* \kappa^2}{\rho_0} \right)^2 = 0.$$

В бездиссипативном случае это уравнение переходит в (8). Нетрудно проверить, что оба решения имеют отрицательные действительные части. Поэтому все параметры плазмы (24) затухают с одинаковыми скоростями. В частности, если $\omega = \omega_1 - i\omega_2$, $\omega_2 > 0$, то декремент затухания равен ω_2 и энергия магнитного поля $|H_\perp|^2 = |H_\perp|^2 e^{-2\omega_2 t}$ и кинетическая энергия $|U_\perp|^2 = |U_\perp|^2 e^{-2\omega_2 t}$ затухают одинаково. Это, однако, противоречит полученному результату. С другой стороны, из (25) следует, что релаксация температур не может быть исследована на базе линейной теории.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00071).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А л ь ф в е н Х., Ф е л ь т х а м м а р К. -Г. Космическая электродинамика. – М.: Мир, 1967. – 260 с.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
3. Б р а г и н с к и й С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. – С. 183–272.
4. Г а в р и к о в М. Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Часть I. Препринт № 59. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2006. – 28 с.
5. Г а в р и к о в М. Б., С о р о к и н Р. В. Однородные деформации двухжидкостной плазмы с учетом инерции электронов // Изв. РАН МЖГ. – 2008. – Т. 6. – С. 156–169.
6. С п и т ц е р Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965. – 212 с.
7. Ч э п м е н С., К а у л и н г Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
8. И м ш е н н и к В. С. // Астрономический журнал. – 1961. – 38. – С. 652.
9. Л а н д а у Л. Д. // ЖЭТФ. – 1937. – Т. 7. – С. 203.
10. Г а в р и к о в М. Б., Т а ю р с к и й А. А. Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме. Препринт № 68. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2011. – 28 с.
11. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Статья поступила в редакцию 23.04.2012