УДК 536.2

О. Ю. Чигирёва

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СОСТАВНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Предложена математическая модель нестационарного процесса теплопроводности в составном цилиндре при локальном периодическом тепловом воздействии на его торцевую поверхность. Разработан алгоритм расчета нестационарного температурного поля, учитывающий зависимость теплофизических свойств материалов от температуры, а также условие неидеального теплового контакта между слоями. Приведен пример численного расчета.

E-mail: k_fn12@bmstu.ru

Ключевые слова: математическая модель, нестационарный процесс теплопроводности, цилиндр, локальное периодическое тепловое воздействие, температурное поле, неидеальный тепловой контакт.

Применение лазерных технологий в современном машиностроении получило широкое распространение [1], в связи с чем особый интерес представляет исследование процессов теплопереноса в многослойных конструкциях, поверхности которых подвержены локальному интенсивному периодическому тепловому воздействию [2, 3].

Постановка задачи и математическая модель процесса. Рассматривается нестационарный процесс теплопроводности в цилиндре радиусом r_0, состоящем из двух слоев толщиной d и h (рис. 1). Разогрев составного цилиндра осуществляется осесимметричным круговым $(0 \leqslant r \leqslant r_*)$ локальным периодическим источником теплоты, действующим на нижнем основании цилиндра, с плотностью теплового потока

$$q(r,t) = q_0\left(1+\cos\frac{\pi r}{r_*}\right)\cdot\bar{\eta}(t), \quad t>0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_*,$$

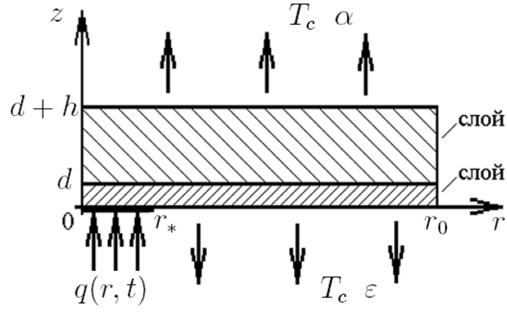

Рис. 1. Осевое сечение составного цилиндра

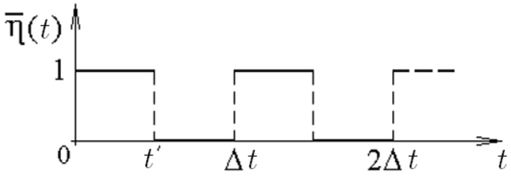

Рис. 2. График функции $\bar{\eta}(t)$

где r_* — радиус пятна теплового контакта; $\bar{\eta}(t)$ — ступенчатая периодическая функция с периодом по времени равным Δt (рис. 2). Кроме того, на нижнем основании цилиндра вне зоны воздействия источника теплоты, происходит теплообмен излучением. Верхнее основание цилиндра охлаждается внешней средой по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи α. Боковая поверхность цилиндра теплоизолирована. В начальный момент времени температура составного цилиндра постоянна и равна температуре внешней среды T_C. Предполагается, что тепловой контакт между слоями цилиндра является неидеальным [4], а теплофизические свойства материалов слоев зависят от температуры.

Математическая модель рассматриваемого нестационарного процесса теплопроводности имеет вид

$$\rho_1 c_1 (T_1) \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_1 (T_1) r \frac{\partial T_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_1 (T_1) \frac{\partial T_1}{\partial z}\right), \quad t > 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < z < d; \tag{1}$$

$$\rho_2 c_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_2 (T_2) r \frac{\partial T_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial z}\right), \quad t > 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad d < z < d + h; \tag{2}$$

$$T_1 (r, z, 0) = T_C, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant z \leqslant d; \tag{3}$$

$$T_2 (r, z, 0) = T_C, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad d \leqslant z \leqslant d + h; \tag{4}$$

$$-\lambda_1 (T_1) \left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} q(r,t), & t > 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_*; \\ \sigma\varepsilon \left(T_C^4 - T_1^4 (r, 0, t)\right), & t > 0, \ r_* < r \leqslant r_0; \end{cases} \tag{5}$$

$$-\lambda_2 (T_2) \left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{z=d+h} = \alpha \left(T_2 (r, d+h, t) - T_C\right), \ t > 0, \ 0 \leqslant r \leqslant r_0; \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant d; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0, \quad t > 0, \quad d \leqslant z \leqslant d + h; \tag{8}$$

$$- \lambda_1 (T_1) \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=d} = \frac{1}{R} \left(T_1 (r,d,t) - T_2 (r,d,t) \right) =$$

$$= -\lambda_2 (T_2) \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=d}, \quad t > 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0. \quad (9)$$

Здесь приняты следующие обозначения: значения индекса $j = 1$ и $j = 2$ соответствуют слоям 1 и 2 составного цилиндра; $T_j (r,z,t)$ — искомые температурные поля; ρ, c и λ — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности соответственно; σ — постоянная Стефана–Больцмана; ε — степень черноты излучающей поверхности; R — термическое сопротивление на поверхности контакта.

Построение алгоритма приближенного решения. Для нахождения приближенного аналитического решения задачи (1)–(9) воспользуемся модификацией [5] метода, предложенного в работах [6, 7].

Умножим обе части уравнений (1) и (2) на r и введем функции

$$C_j (T_j, r) = \rho_j r c_j (T_j), \quad \Lambda_j (T_j, r) = r \lambda_j (T_j), \quad j = 1,\, 2.$$

Тогда уравнения (1) и (2) можно записать в виде

$$C_1 (T_1, r) \frac{\partial T_1}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\Lambda_1 (T_1, r) \operatorname{grad} T_1 \right), \; t > 0, \; 0 < r < r_0, \; 0 < z < d; \quad (10)$$

$$C_2 (T_2, r) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\Lambda_2 (T_2, r) \operatorname{grad} T_2 \right),$$

$$t > 0, \; 0 < r < r_0, \; d < z < d + h, \quad (11)$$

где операции div и grad следует рассматривать как операции в прямоугольной декартовой системе координат (r, z).

Проведем дискретизацию временно́й переменной t системой точек $t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$ с достаточно малым шагом $\tau > 0$ и заменим в уравнениях (10), (11) производные по времени конечно-разностными отношениями

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} \approx \frac{T_j^{(k)} (r,z) - T_j^{(k-1)} (r,z)}{\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2,$$

где $T_j^{(k)} (r,z)$ — приближенные значения функций $T_j (r,z,t)$ при $t = t_k$. Следует отметить, что согласно начальным условиям (3) и (4) $T_j^{(0)} (r,z) = T_C$.

Полагая на каждом временном слое $t = t_k$ все нелинейности известными, вычисленными на предыдущем временном слое $t = t_{k-1}$, обозначим

$$C_j^{(k)} (r,z) = C_j \left(T_j^{(k-1)} (r,z), r \right),$$

$$\Lambda_j^{(k)} (r,z) = \Lambda_j \left(T_j^{(k-1)} (r,z), r \right), \; j = 1, 2;$$

$$q^{(k)}(r) = q(r, t_k).$$

Кроме того, на каждом временно́м слое $t = t_k$ тепловые потоки в граничных условиях (5), (6) и условии сопряжения (9) вычислим, используя функции $T_j^{(k-1)}(r,z)$, найденные на временном слое $t = t_{k-1}$:

$$Q_1^{(k)}(r) = \begin{cases} rq^{(k)}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_*; \\ \sigma\varepsilon r \left(T_C^4 - \left[T_1^{(k-1)}(r,0)\right]^4\right), \quad r_* < r \leqslant r_0; \end{cases}$$

$$Q_2^{(k)}(r) = \alpha r \left(T_2^{(k-1)}(r, d+h) - T_C\right);$$

$$Q_0^{(k)}(r) = \frac{r}{R}\left(T_1^{(k-1)}(r,d) - T_2^{(k-1)}(r,d)\right).$$

Это позволяет записать дифференциально-разностный аналог начально-краевой задачи (1)–(9) в виде итерационной схемы ($k = 1, 2, \ldots$) решения двух краевых задач для линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами $C_j^{(k)}(r,z)$, $\Lambda_j^{(k)}(r,z)$:

$$-\operatorname{div}\left(\Lambda_1^{(k)}(r,z)\operatorname{grad} T_1^{(k)}(r,z)\right) + \frac{1}{\tau}C_1^{(k)}(r,z)\,T_1^{(k)}(r,z) = \\ = \frac{1}{\tau}C_1^{(k)}(r,z)\,T_1^{(k-1)}(r,z), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < z < d; \quad (12)$$

$$\left.\frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant d; \quad (13)$$

$$\begin{gathered} -\Lambda_1^{(k)}(r,z)\left.\frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial z}\right|_{z=0} = Q_1^{(k)}(r), \\ -\Lambda_1^{(k)}(r,z)\left.\frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial z}\right|_{z=d} = Q_0^{(k)}(r), \ 0 \leqslant r \leqslant r_0; \end{gathered} \quad (14)$$

$$-\operatorname{div}\left(\Lambda_2^{(k)}(r,z)\operatorname{grad} T_2^{(k)}(r,z)\right) + \frac{1}{\tau}C_2^{(k)}(r,z)\,T_2^{(k)}(r,z) = \\ = \frac{1}{\tau}C_2^{(k)}(r,z)\,T_2^{(k-1)}(r,z), \quad 0 < r < r_0, \quad d < z < d+h; \quad (15)$$

$$\left.\frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0, \quad d \leqslant z \leqslant d+h; \quad (16)$$

$$\begin{gathered} -\Lambda_2^{(k)}(r,z)\left.\frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial z}\right|_{z=d} = Q_0^{(k)}(r), \\ -\Lambda_2^{(k)}(r,z)\left.\frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial z}\right|_{z=d+h} = Q_2^{(k)}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0. \end{gathered} \quad (17)$$

Отметим, что задачи (12)–(14) и (15)–(17) на каждом временном слое $t = t_k$ решаются независимо.

На k-м шаге итерации функции $T_j^{(k)}(r,z)$ будем искать в форме разложения в двойные тригонометрические ряды Фурье

$$T_j^{(k)}(r,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)} X_{j,mn}(r,z), \quad j = 1,2,$$

$\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n$, $\gamma_m = \begin{cases} 0{,}5, & m = 0; \\ 1, & m > 0, \end{cases}$ по полным и ортогональным [5] в областях Ω_j, $j = 1,2$, системам функций $\{X_{j,mn}(r,z)\}_{m,n=0}^{\infty}$:

$$X_{1,mn}(r,z) = \cos(\mu_m r)\cos(\nu_{1,n} z), \quad \Omega_1 = (0,r_0)\times(0,d);$$

$$X_{2,mn}(r,z) = \cos(\mu_m r)\cos(\nu_{2,n}(z-d)), \quad \Omega_2 = (0,r_0)\times(d,d+h),$$

где $\mu_m = \dfrac{m\pi}{r_0}$, $\nu_{1,n} = \dfrac{n\pi}{d}$, $\nu_{2,n} = \dfrac{n\pi}{h}$.

Для нахождения коэффициентов $a_{j,mn}^{(k)}$ этих разложений умножим уравнения (12) и (15) на функции $X_{1,ps}(r,z)$ и $X_{2,ps}(r,z)$ соответственно, а затем проинтегрируем полученные соотношения по областям Ω_1 и Ω_2. С учетом граничных условий (13), (14) и (16), (17) приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов $a_{j,mn}^{(k)}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{j,psmn}^{(k)} \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)} = b_{j,ps}^{(k)}, \; p = 0,1,2,\ldots, \; s = 0,1,2,\ldots, \; j=1,2, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} A_{j,psmn}^{(k)} = {} & \tau(\mu_m\mu_p + \nu_{j,n}\nu_{j,s})\left(\xi_{j,(|m-p|,|n-s|)}^{(k)} - \xi_{j,(m+p,n+s)}^{(k)}\right) + \\ & + \tau(\mu_m\mu_p - \nu_{j,n}\nu_{j,s})\left(\xi_{j,(|m-p|,n+s)}^{(k)} - \xi_{j,(m+p,|n-s|)}^{(k)}\right) + \\ & + \eta_{j,(|m-p|,|n-s|)}^{(k)} + \eta_{j,(m+p,|n-s|)}^{(k)} + \eta_{j,(|m-p|,n+s)}^{(k)} + \eta_{j,(m+p,n+s)}^{(k)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{j,ps}^{(k)} = {} & f_j^{(k)} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k-1)} \times \\ & \times \left(\eta_{j,(|m-p|,|n-s|)}^{(k)} + \eta_{j,(m+p,|n-s|)}^{(k)} + \eta_{j,(|m-p|,n+s)}^{(k)} + \eta_{j,(m+p,n+s)}^{(k)}\right); \end{aligned}$$

$$f_1^{(k)} = \frac{8\tau}{d}\left((-1)^{s+1}\theta_p^{(k)} + \phi_p^{(k)}\right), \quad f_2^{(k)} = \frac{8\tau}{h}\left((-1)^{s+1}\psi_p^{(k)} + \theta_p^{(k)}\right).$$

Здесь $\xi_{j,(p,s)}^{(k)}$ и $\eta_{j,(p,s)}^{(k)}$ — коэффициенты Фурье разложений функций $\Lambda_j^{(k)}(r,z)$ и $C_j^{(k)}(r,z)$ соответственно в двойные тригонометрические ряды по системам функций $\{X_{j,ps}(r,z)\}_{p,s=0}^{\infty}$; $\phi_p^{(k)}$, $\theta_p^{(k)}$ и $\psi_p^{(k)}$ — коэффициенты Фурье разложений функций $Q_1^{(k)}(r)$, $Q_0^{(k)}(r)$ и $Q_2^{(k)}(r)$ соответственно в тригонометрические ряды по системе функций $\{\cos(\mu_p r)\}_{p=0}^{\infty}$.

Системы вида (18) можно преобразовать [5] к стандартному виду

$$\sum_{w=1}^{\infty} D_{j,vw}^{(k)} \tilde{x}_{j,w}^{(k)} = \tilde{b}_{j,v}^{(k)}, \quad v = 1, 2, \ldots, \; j = 1, 2, \tag{19}$$

где $\tilde{x}_{j,w}^{(k)}$ и $\tilde{b}_{j,v}^{(k)}$ — одномерные массивы, составленные из элементов двумерных массивов $x_{j,mn}^{(k)} \equiv \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)}$ и $b_{j,ps}^{(k)}$ соответственно, а $D_{j,vw}^{(k)}$ — двумерный массив, составленный из элементов многомерного массива $A_{j,psmn}^{(k)}$. Для решения бесконечных систем вида (19) применим метод редукции [8, 9], а решения конечных систем, полученных из (19) усечением, могут быть найдены методом квадратных корней [10].

В результате построен алгоритм нахождения приближенного аналитического решения задачи (1)–(9) в форме тригонометрических многочленов

$$T_1(r,z,t_k) \approx \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-m} \gamma_{mn} a_{1,mn}^{(k)} \cos(\mu_m r) \cos(\nu_{1,n} z);$$

$$T_2(r,z,t_k) \approx \sum_{m=0}^{N_2} \sum_{n=0}^{N_2-m} \gamma_{mn} a_{2,mn}^{(k)} \cos(\mu_m r) \cos(\nu_{2,n}(z-d)),$$

коэффициенты $x_{j,mn}^{(k)} \equiv \gamma_{mn} a_{j,mn}^{(k)}$ которых находят из конечных систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{w=1}^{M_j} D_{j,vw}^{(k)} \tilde{x}_{j,w}^{(k)} = \tilde{b}_{j,v}^{(k)}, \quad v = 1, 2, \ldots M_j, \; j = 1, 2.$$

Здесь $M_j = (N_j+1)(N_j+2)/2$, а значения N_j определяются согласно оценке Рунге [11].

Выбор шага по временной переменной осуществляется автоматически. Для обеспечения заданной точности решения используется правило двойного пересчета [10].

Результаты численных расчетов. Разработанный алгоритм использован для расчета температурного поля металлического цилиндра (слой 2) высотой $h = 20 \cdot 10^{-3}$ м, на нижнее основание которого нанесено поглощающее покрытие (слой 1) толщиной $d = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м [1]. Вычисления проводились при следующих значениях параметров задачи: $r_0 = 100 \cdot 10^{-3}$ м, $r_* = 10 \cdot 10^{-3}$ м, $\rho_1 = 3000$ кг/м^3, $\rho_2 = 7780$ кг/м^3, $T_C = 300$ K, $q_0 = 5 \cdot 10^6$ Вт/м^2, $\alpha = 600$ Вт/(м$^2\cdot$ K), $R = 5 \cdot 10^{-4}$ м$^2\cdot$K/Вт, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$K^4), $\varepsilon = 0{,}8$, $\Delta t = 2$ с, $t' = 1{,}5$ с.

В таблице приведены значения коэффициентов теплопроводности и удельных теплоемкостей материалов слоев составного цилиндра в зависимости от температуры [12].

Теплофизические свойства материалов

T, K	300	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
λ_1, Вт/(м·K)	32	28	20	16	7,5	6,4	5,6	5,4	5,2	5
c_1, Дж/(кг·K)	860	875	943	1020	1086	1102	1140	1160	1170	1178
λ_2, Вт/(м·K)	48	47	41	37	32	23	21	20	—	—
c_2, Дж/(кг·K)	469	505	521	660	616	577	560	545	—	—

На рис. 3 и 4 показана эволюция температуры в разных точках металлического слоя цилиндра. Периодическое внешнее тепловое воздействие приводит к возникновению колебаний температуры во всех точках цилиндра. Следует отметить, что, как и в линейных моделях [13, 14], период колебаний температуры совпадает с периодом воздействия источника теплоты. При удалении точек от источника в глубь материала наблюдается уменьшение амплитуды колебаний и сдвиг фазы колебаний. С момента времени $t = 90$ с начинается процесс установления колебаний. Максимальный перепад температуры в точке по-

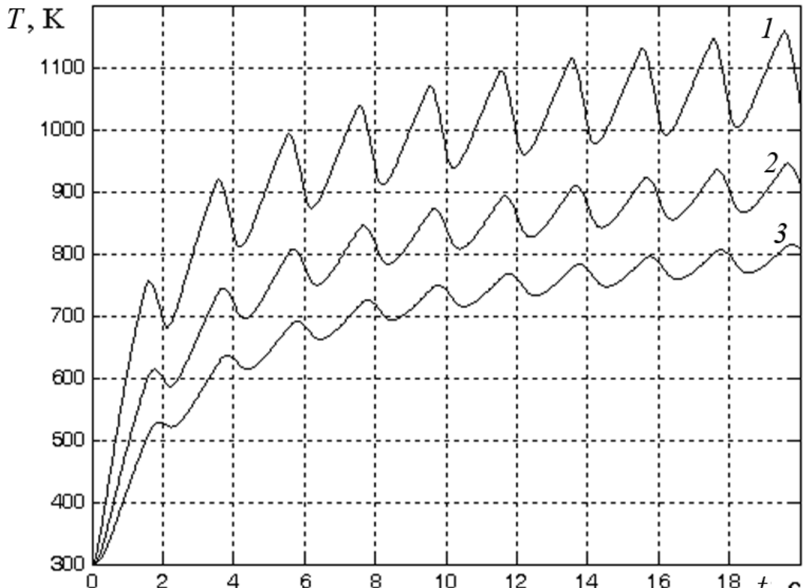

Рис. 3. Эволюция температуры на начальном этапе разогрева ($0 \le t \le 20$ с) в разных точках, лежащих на оси металлического цилиндра:

$1 - T_2(0, d, t)$, $2 - T_2(0, d + \dfrac{h}{20}, t)$, $3 - T_2(0, d + \dfrac{h}{10}, t)$

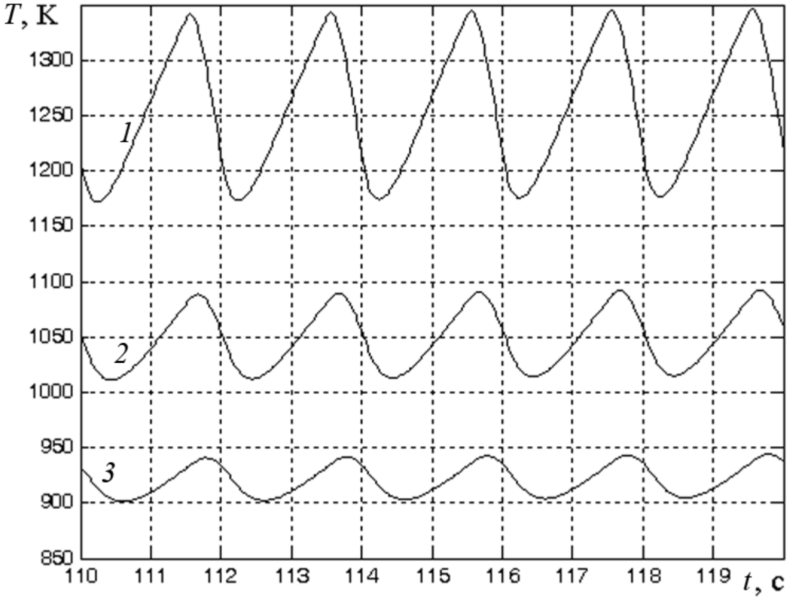

Рис. 4. Установившиеся колебания температуры в разных точках, лежащих на оси металлического цилиндра:

1 — $T_2(0, d, t)$, *2* — $T_2(0, d + \dfrac{h}{20}, t)$, *3* — $T_2(0, d + \dfrac{h}{10}, t)$

верхностного слоя металла для установившихся колебаний достигает величины $150\,\mathrm{K}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г р и г о р ь я н ц А. Г., Ш и г а н о в И. Н., М и с ю р о в А. И. Технологические процессы лазерной обработки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
2. Г р и г о р ь я н ц А. Г. Основы лазерной обработки материалов. – М.: Машиностроение, 1989.
3. У г л о в А. А., С м у р о в И. Ю., Л а ш и н А. М., Г у с ь к о в А. Г. Моделирование теплофизических процессов импульсного лазерного воздействия на металлы. – М.: Наука, 1991.
4. К а р т а ш о в Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001.
5. Ч и г и р е в а О. Ю. Математическое моделирование процесса разогрева цилиндрической поверхности движущимся интенсивным источником тепла. // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 31–37.
6. М а л о в Ю. И., М а р т и н с о н Л. К. Приближенные методы решения краевых задач. – М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1989.
7. М а л о в Ю. И., М а р т и н с о н Л. К., Р о г о ж и н В. М. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при плазменном напылении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 1994. – № 3. – С. 3–16.
8. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.–Л.: Физматгиз, 1962.
9. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

10. А м о с о в А. А., Д у б и н с к и й Ю. А., К о п ч е н о в а Н. В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высш. шк., 1994.
11. Ч и г и р е в а О. Ю. Расчет оптимальной толщины слоя термоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2005. – № 1. – С. 94–101.
12. Ч и р к и н В. С. Теплофизические свойства материалов: Справочник. – М.: Физматгиз, 1959.
13. Л ы к о в А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967.
14. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004.

Статья поступила в редакцию 10.04.11

Ольга Юрьевна Чигирёва родилась в 1979 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2002 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области математической физики и математического моделирования.

O.Yu. Chigiryova (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of mathematical physics and mathematical simulation.