УДК 536.2

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В РЕЖИМЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РАЗОГРЕВА

Л.К. Мартинсон, **О.Ю. Чигирёва**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: mathmod@bmstu.ru

Рассмотрен процесс разогрева цилиндрического тела при периодическом тепловом воздействии на его торцевые поверхности. Математическая модель изучаемого процесса включает в себя нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа, учитывающее зависимость теплофизических свойств материала от температуры, а также граничные условия, описывающие процессы теплообмена на поверхности тела. Предложен алгоритм расчета нестационарного температурного поля цилиндрического тела, основанный на дискретизации дифференциального уравнения по временно́й переменной с достаточно малым шагом разбиения. На k-м временно́м шаге распределение температуры в цилиндрическом теле ищется в форме разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье, коэффициенты которого определяются из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений методом редукции. Приведен численный пример расчета нестационарного температурного поля в цилиндрическом теле при периодическом импульсном разогреве его торцевых поверхностей. Представлены зависимости температуры для различных внутренних точек цилиндрического тела от времени.

Ключевые слова: нестационарный процесс теплопроводности, нелинейная математическая модель, дискретизация по временно́й переменной, бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

THERMAL FIELD OF A CYLINDRICAL BODY DURING CYCLIC HEATING

L.K. Martinson, **O.Yu. Chigireva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: mathmod@bmstu.ru

The article discusses the heating process of a cylindrical body under the cycling heat exposure onto its end surfaces. The mathematical model of the analyzed process includes a nonlinear differential equation of the parabolic type which considers a correlation between thermophysical properties of the matter and the temperature as well as the boundary conditions describing heat exchanges on the body surface. The article presents an algorithm of the non-stationary thermal field calculation based on the discretization of the differential equation with a small variable time step. At the k-th time step a temperature distribution within the cylindrical body is calculated by the double trigonometric Fourier series. Its coefficients are estimated by solving an infinite set of linear algebraic equations with the help of the reduction method. The authors give a numerical sample of calculating the non-stationary temperature field in the cylindrical body at the rate of cyclic impulse heating of its end surfaces. The dependence of different internal points of the cylindrical body on temperatures is tested.

Keywords: non-stationary heat transfer process, nonlinear mathematical model, discretization with respect to time variable, infinite set of linear algebraic equations.

Введение. В теории теплопроводности [1–3] важное практическое приложение имеет класс задач по исследованию теплового состояния конструкций, поверхности которых подвержены локальному тепловому воздействию [4–8]. Особое внимание уделено задачам, связанным с изучением процесса теплопереноса в условиях локального периодического теплового воздействия. Интерес к таким исследованиям объясняется практическими приложениями процесса разогрева металлов при лазерной и электронно-лучевой обработке [9–14].

Физическая постановка задачи и математическая модель процесса. Рассматривается нестационарный процесс теплопроводности в цилиндре радиусом R и высотой h (рис. 1). Разогрев цилиндра осуществляется двумя осесимметричными локальными $(r \leq r_0)$ периодическими источниками теплоты, действующими на нижнее $(z = 0)$ и верхнее $(z = h)$ основания цилиндра, с плотностями тепловых потоков $q_1(r,t)$ и $q_2(r,t)$, равными

$$q_i(r,t) = q_i^0 \left(1 + \cos\frac{\pi r}{r_0}\right) \bar{\eta}(t), \quad t > 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \; i = 1, 2,$$

где значение индекса $i = 1$ соответствует источнику теплоты, действующему на нижнее основание цилиндра; $i = 2$ — источнику теплоты, действующему на верхнее основание цилиндра; r_0 — радиус пятна теплового воздействия; $\bar{\eta}(t)$ — ступенчатая периодическая функция с периодом, равным Δt (рис. 2). На нижнем и верхнем основаниях цилиндра, вне области теплового воздействия $(r_0 < r \leq R)$, происходит теплообмен излучением. Боковая поверхность цилиндра теплоизолирована. В начальный момент времени $t = 0$ температура цилиндра постоянна и равна температуре внешней среды T_0.

В задаче учитывается зависимость теплофизических свойств материала цилиндра от температуры. Математическая модель рассматриваемого нестационарного процесса теплопроводности в цилиндре имеет

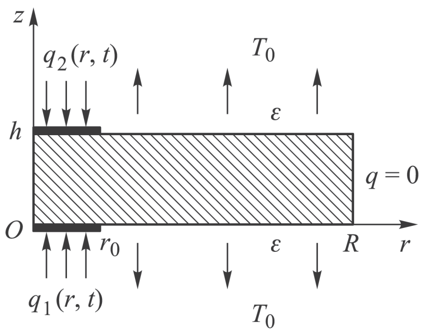

Рис. 1. Осевое сечение цилиндрического тела

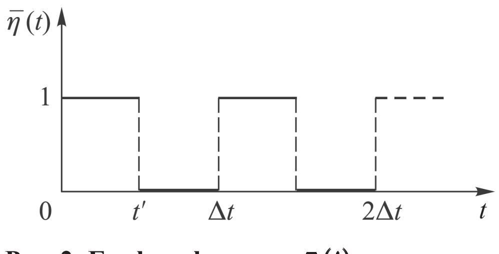

Рис. 2. График функции $\bar{\eta}(t)$

вид

$$\rho c\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\left(T\right)r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad (1)$$
$$t>0,\quad 0\le r<R,\quad 0<z<h;$$

$$T\left(r,z,0\right)=T_0,\quad 0\le r\le R,\quad 0\le z\le h; \qquad (2)$$

$$-\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\begin{cases} q_1\left(r,t\right), & t>0,\quad 0\le r\le r_0;\\ \sigma\varepsilon\left(T_0^4-T^4\left(r,0,t\right)\right), & t>0,\quad r_0<r\le R;\end{cases} \qquad (3)$$

$$\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=h}=\begin{cases} q_2\left(r,t\right), & t>0,\quad 0\le r\le r_0;\\ \sigma\varepsilon\left(T_0^4-T^4\left(r,h,t\right)\right), & t>0,\quad r_0<r\le R;\end{cases} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R}=0,\quad t>0,\quad 0\le z\le h. \qquad (5)$$

Здесь $T\left(r,z,t\right)$ — искомое температурное поле цилиндра; ρ, c и λ — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала; σ — постоянная Стефана – Больцмана; ε — степень черноты излучающей поверхности.

Отметим, что в рассматриваемой задаче следует учитывать условие ограниченности температуры на оси цилиндра [15].

Построение алгоритма приближенного решения. Введем функции $C\left(T,r\right)=\rho rc\left(T\right)$, $\Lambda\left(T,r\right)=r\lambda\left(T\right)$ и запишем задачу (1)–(5) в следующем виде:

$$C\left(T,r\right)\frac{\partial T}{\partial t}=$$
$$=\operatorname{div}\left(\Lambda\left(T,r\right)\operatorname{grad}T\right),\quad t>0,\quad 0<r<R,\quad 0<z<h; \qquad (6)$$

$$T\left(r,z,0\right)=T_0,\quad 0\le r\le R,\quad 0\le z\le h; \qquad (7)$$

$$-\Lambda\left(T,r\right)\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}=Q_1\left(r,t\right),\quad t>0,\quad 0\le r\le R; \qquad (8)$$

$$\Lambda\left(T,r\right)\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=h}=Q_2\left(r,t\right),\quad t>0,\quad 0\le r\le R; \qquad (9)$$

$$\left|T\left(0,z,t\right)\right|<\infty,\quad t>0,\quad 0\le z\le h; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R}=0,\quad t>0,\quad 0\le z\le h. \qquad (11)$$

Здесь

$$Q_i\left(r,T\right)=\begin{cases} rq_i\left(r,t\right), & t>0,\quad 0\le r\le r_0;\\ \sigma\varepsilon r\left(T_0^4-u_i^4\left(r,t\right)\right), & t>0,\quad r_0<r\le R;\end{cases}$$
$$i=1,2;\quad u_1\left(r,t\right)=T\left(r,0,t\right),\quad u_2\left(r,t\right)=T\left(r,h,t\right).$$

Отметим, что при такой форме записи уравнения (6) операции “div” и “grad” следует понимать как операции в прямоугольной системе координат (r, z).

Приближенное аналитическое решение задачи (6)–(11) найдем, применив модификацию метода, основанного на дискретизации дифференциального уравнения (6) по временно́й переменной t [14, 16].

Пусть $t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\tau > 0$ — достаточно малый шаг разбиения по временно́й переменной. Заменим в уравнении (6) производную по времени разностным отношением

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=t_k} \approx \frac{T^{(k)}(r,z) - T^{(k-1)}(r,z)}{\tau},$$

где $T^{(k)}(r,z)$ — приближенное значение функции $T(r,z,t)$ в момент времени $t = t_k$, причем согласно начальному условию (7) $T^{(0)}(r,z) = T_0$.

На временно́м слое $t = t_k$ все нелинейности в уравнении (6) и в граничных условиях (8), (9) вычислим, используя найденное на предыдущем временно́м слое $t = t_{k-1}$ значение функции $T^{(k-1)}(r,z)$ и обозначим

$$C^{(k)}(r,z) = C\left(T^{(k-1)}(r,z), r\right), \quad \Lambda^{(k)}(r,z) = \Lambda\left(T^{(k-1)}(r,z), r\right).$$

Тепловые потоки в граничных условиях (8) и (9) при $t = t_k$ также определим по известным значениям функций $u_i^{(k-1)}(r)$: $Q_i^{(k)}(r) = Q_i\left(r, u_i^{(k-1)}(r)\right)$, $i = 1, 2$.

В результате получаем дифференциально-разностный аналог начально-краевой задачи (6)–(11) в виде следующей итерационной схемы решения $(k = 1, 2, \ldots)$ краевой задачи для линейного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами $\Lambda^{(k)}(r,z)$ и $C^{(k)}(r,z)$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(\Lambda^{(k)}(r,z)\operatorname{grad} T^{(k)}(r,z)\right) + \frac{1}{\tau}C^{(k)}(r,z)\,T^{(k)}(r,z) = \\ = \frac{1}{\tau}C^{(k)}(r,z)\,T^{(k-1)}(r,z), \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < h; \end{aligned} \qquad (12)$$

$$-\Lambda^{(k)}(r,z)\left.\frac{\partial T^{(k)}}{\partial z}\right|_{z=0} = Q_1^{(k)}(r), \quad 0 \le r \le R; \qquad (13)$$

$$\Lambda^{(k)}(r,z)\left.\frac{\partial T^{(k)}}{\partial z}\right|_{z=h} = Q_2^{(k)}(r), \quad 0 \le r \le R; \qquad (14)$$

$$\left|T^{(k)}(0,z)\right| < \infty, \quad 0 \le z \le h; \qquad (15)$$

$$\left.\frac{\partial T^{(k)}}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \quad 0 \le z \le h. \qquad (16)$$

На k-м шаге итерации функцию $T^{(k)}(r,z)$ будем искать в форме разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье [17]

$$T^{(k)}(r,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{mn}a_{mn}^{(k)}X_{mn}(r,z)\,, \tag{17}$$

где $\delta_{mn}=\delta_m\delta_n,\quad \delta_m=\begin{cases}0{,}5, & m=0,\\ 1, & m>0;\end{cases}$

$$X_{mn}(r,z)=\cos(\mu_m r)\cos(\omega_n z)\,;\quad \mu_m=m\pi/R;\omega_n=n\pi/h.$$

Для улучшения сходимости ряда (17) на границах области $z=0$ и $z=h$ можно применить метод быстрых разложений [18].

Определим коэффициенты $a_{mn}^{(k)}$ в разложении (17). Для этого умножим обе части уравнения (12) на функцию $X_{ps}(r,z)$ и проинтегрируем полученное равенство по области $\Omega=\{(r,z):0<r<R,\,0<z<h\}$. Применяя формулы векторного анализа [19], приходим к соотношению

$$\begin{gathered}-\iint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\left(\Lambda^{(k)}(r,z)\ \operatorname{grad}T^{(k)}(r,z)\,X_{ps}(r,z)\right)d\Omega+\\ +\iint\limits_{\Omega}\left(\Lambda^{(k)}(r,z)\ \operatorname{grad}T^{(k)}(r,z)\ \operatorname{grad}X_{ps}(r,z)\right)d\Omega+\\ +\frac{1}{\tau}\iint\limits_{\Omega}C^{(k)}(r,z)\,T^{(k)}(r,z)\,X_{ps}(r,z)\,d\Omega=\\ =\frac{1}{\tau}\iint\limits_{\Omega}C^{(k)}(r,z)\,T^{(k-1)}(r,z)\,X_{ps}(r,z)\,d\Omega.\end{gathered} \tag{18}$$

Для вычисления первого интеграла в левой части соотношения (18) воспользуемся формулой Остроградского. Тогда с учетом граничных условий (13)–(16) получим

$$\begin{gathered}(-1)^{s+1}\int\limits_0^R Q_2^{(k)}(r)\cos(\mu_p r)\,dr-\int\limits_0^R Q_1^{(k)}(r)\cos(\mu_p r)\,dr+\\ +\int\limits_0^R\int\limits_0^h\Lambda^{(k)}(r,z)\left[\frac{\partial T^{(k)}}{\partial r}\frac{\partial X_{ps}}{\partial r}+\frac{\partial T^{(k)}}{\partial z}\frac{\partial X_{ps}}{\partial z}\right]dr\,dz+\\ +\frac{1}{\tau}\int\limits_0^R\int\limits_0^h C^{(k)}(r,z)\,T^{(k)}(r,z)\,X_{ps}(r,z)\,dr\,dz=\end{gathered}$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_0^R \int\limits_0^h C^{(k)}(r,z)\, T^{(k-1)}(r,z)\, X_{ps}(r,z)\, dr\, dz. \quad (19)$$

Далее подставим разложение (17) для функции $T^{(k)}(r,z)$ в (19). Отметим, что

$$X_{mn}(r,z)\, X_{ps}(r,z) = \frac{1}{4}\Big[X_{m+p,n+s}(r,z) + X_{m+p,n-s}(r,z) + \\ + X_{m-p,n+s}(r,z) + X_{m-p,n-s}(r,z)\Big];$$

$$\frac{\partial X_{mn}}{\partial r}\frac{\partial X_{ps}}{\partial r} = \frac{\mu_m \mu_p}{4}\Big[X_{m-p,n+s}(r,z) + \\ + X_{m-p,n-s}(r,z) - X_{m+p,n+s}(r,z) - X_{m+p,n-s}(r,z)\Big];$$

$$\frac{\partial X_{mn}}{\partial z}\frac{\partial X_{ps}}{\partial z} = \\ = \frac{\omega_n \omega_s}{4}\Big[X_{m+p,n-s}(r,z) - X_{m+p,n+s}(r,z) + \\ + X_{m-p,n-s}(r,z) - X_{m-p,n+s}(r,z)\Big]$$

и запишем следующие соотношения относительно искомых коэффициентов Фурье $a_{mn}^{(k)}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{psmn}^{(k)} \delta_{mn} a_{mn}^{(k)} = b_{ps}^{(k)}, \quad p = 0, 1, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots; \quad (20)$$

где

$$A_{psmn}^{(k)} = \tau\left(\mu_m\mu_p + \omega_n\omega_s\right)\left(\xi_{|m-p|,|n-s|}^{(k)} - \xi_{m+p,n+s}^{(k)}\right) + \\ + \tau\left(\mu_m\mu_p - \omega_n\omega_s\right)\left(\xi_{|m-p|,n+s}^{(k)} - \xi_{m+p,|n-s|}^{(k)}\right) + \\ + \eta_{|m-p|,|n-s|}^{(k)} + \eta_{m+p,|n-s|}^{(k)} + \eta_{|m-p|,n+s}^{(k)} + \eta_{m+p,n+s}^{(k)};$$

$$b_{ps}^{(k)} = \frac{8\tau}{h}\left(\varphi_p^{(k)} + (-1)^s \psi_p^{(k)}\right) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{mn} a_{mn}^{(k-1)} \left(\eta_{|m-p|,|n-s|}^{(k)} + \eta_{m+p,|n-s|}^{(k)} + \eta_{|m-p|,n+s}^{(k)} + \eta_{m+p,n+s}^{(k)}\right).$$

Здесь $\xi_{mn}^{(k)}$ и $\eta_{mn}^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функций $\Lambda^{(k)}(r,z)$ и $C^{(k)}(r,z)$ по системе функций $\{X_{mn}(r,z)\}_{m,n=0}^{\infty}$; $\varphi_p^{(k)}$ и $\psi_p^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функций $Q_1^{(k)}(r)$ и $Q_2^{(k)}(r)$ по системе функций $\{\cos(\mu_p r)\}_{p=0}^{\infty}$.

Приведем соотношения (20) к стандартному виду бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Для этого перенумеруем элементы $\delta_{mn}a_{mn}^{(k)}$ и $b_{ps}^{(k)}$ двумерных массивов по диагоналям с одинаковой суммой индексов, установив соответствия $(m,n) \leftrightarrow w$, $(p,s) \leftrightarrow v$ по правилам

$$w = \frac{1}{2}\left(m+n+1\right)\left(m+n+2\right)-n, \quad v = \frac{1}{2}\left(p+s+1\right)\left(p+s+2\right)-s,$$

и обозначим

$$\bar{x}_1^{(k)} = \delta_{00}a_{00}^{(k)};$$

$$\bar{x}_2^{(k)} = \delta_{01}a_{01}^{(k)}, \quad \bar{x}_3^{(k)} = \delta_{10}a_{10}^{(k)};$$

$$\bar{x}_4^{(k)} = \delta_{02}a_{02}^{(k)}, \quad \bar{x}_5^{(k)} = \delta_{11}a_{11}^{(k)}, \quad \bar{x}_6^{(k)} = \delta_{20}a_{20}^{(k)} \ \text{ и т.д.};$$

$$f_1^{(k)} = b_{00}^{(k)};$$

$$f_2^{(k)} = b_{01}^{(k)}, \quad f_3^{(k)} = b_{10}^{(k)};$$

$$f_4^{(k)} = b_{02}^{(k)}, \quad f_5^{(k)} = b_{11}^{(k)}, \quad f_6^{(k)} = b_{20}^{(k)} \ \text{ и т.д.}$$

Применяя те же правила, из элементов $A_{psmn}^{(k)}$ составим матрицу с элементами $D_{vw}^{(k)}$. В результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\bar{x}_w^{(k)}$, $w = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{w=1}^{\infty} D_{vw}^{(k)}\bar{x}_w^{(k)} = f_v^{(k)}, \quad v = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

для решения которой применяем метод редукции [20, 21].

Следовательно, на временно́м слое $t = t_k$ решение краевой задачи (12)–(16) может быть представлено в аналитической форме в виде двойного тригонометрического ряда Фурье

$$T\left(r, z, t_k\right) \approx \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N-m} \delta_{mn}a_{mn}^{(k)} \cos\left(\frac{m\pi}{R}r\right)\cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right),$$

коэффициенты которого находим из решения конечной системы [21] $\sum\limits_{w=1}^{M} D_{vw}^{(k)}\bar{x}_w^{(k)} = f_v^{(k)}$, $v = 1, 2, \ldots M$, порядка $M = \left(N+1\right)\left(N+2\right)/2$. При этом N определяем на основе оценки Рунге [22].

Выбор шага τ по временно́й переменной осуществляется с учетом результатов, полученных в работе [23].

Результаты численных расчетов. Применим построенный алгоритм для расчета температурного поля цилиндрического тела. Вычисления проведем при следующих значениях параметров задачи:

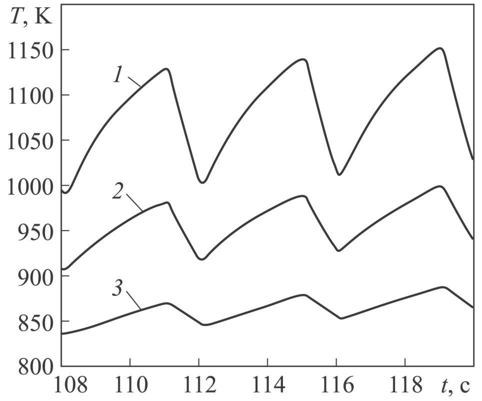

Рис. 3. Зависимость температуры в сечении цилиндра $z = h/2$ от времени при различных значениях r в конце процесса разогрева:
1 — $T(0, h/2, t)$; *2* — $T(r_0/2, h/2, t)$; *3* — $T(3r_0/4, h/2, t)$

$\rho = 7780$ кг/м^3; $R = 50 \cdot 10^{-3}$ м; $h = 4 \cdot 10^{-3}$ м; $r_0 = 10 \cdot 10^{-3}$ м; $q_1^0 = q_2^0 = 10^6$ Вт/м^2; $\Delta t = 4$ с; $t' = 3$ с; $T_0 = 300$ K; $\varepsilon = 0{,}8$; $\sigma = 5{,}67 \times \times 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ K^4).

Значения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости материала цилиндра в зависимости от температуры приведены ниже [24]:

T, K	300	400	600	800	1000	1200	1400	1600
λ, Вт/(м·K)	48	47	41	37	32	23	21	20
c, Дж/(кг·K)	470	505	520	660	615	580	560	545

Зависимость температуры в сечении цилиндра $z = h/2$ от времени при различных значениях r в конце процесса разогрева $(108 \leq t \leq \leq 120)$ показана на рис. 3. Синхронное внешнее периодическое воздействие двумя источниками теплоты на торцевые поверхности цилиндра приводит к возникновению колебаний температуры в указанных точках с периодом, равным периоду воздействия источников теплоты, и амплитудой, уменьшающейся при удалении точек от оси цилиндра.

Заключение. Предложенный в работе алгоритм расчета нестационарного температурного поля в цилиндрическом теле учитывает изменение теплофизических свойств материала в зависимости от температуры, нелинейность граничных условий, позволяет задавать различные режимы внешнего теплового воздействия и условия теплообмена. Алгоритм применим для решения задач об исследовании теплового состояния цилиндрических тел при лазерной обработке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.

4. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
5. *Димитриенко Ю.И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 368 с.
6. *Зарубин В.С.* Оптимальная толщина охлаждаемой стенки, подверженной местному нагреву // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 1970. № 10. С. 18–21.
7. *Димитриенко Ю.И.*, *Минин В.В.*, *Сыздыков Е.К.* Моделирование внутреннего тепломассопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 9. С. 14–32.
8. *Аттетков А.В.*, *Власова Л.Н.*, *Волков И.К.* Особенности формирования температурного поля в системе под воздействием осциллирующего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4. № 12. С. 553–558.
9. *Григорьянц А.Г.*, *Шиганов И.Н.*, *Мисюров А.И.* Технологические процессы лазерной обработки. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 663 с.
10. *Григорьянц А.Г.* Основы лазерной обработки материалов. М.: Машиностроение, 1989. 300 с.
11. *Углов А.А.*, *Смуров И.Ю.*, *Лашин А.М.*, *Гуськов А.Г.* Моделирование теплофизических процессов импульсного лазерного воздействия на металлы. М.: Наука, 1991. 287 с.
12. *Козлов В.П.* Локальный нагрев полуограниченного тела лазерным источником // Инженерно-физический журнал. 1988. Т. 54. № 3. С. 484–493.
13. *Малов Ю.И.*, *Мартинсон Л.К.*, *Рогожин В.М.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при плазменном напылении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 1994. № 3. С. 3–16.
14. *Чигирёва О.Ю.* Математическое моделирование процесса разогрева двухслойного цилиндра движущимся кольцевым источником теплоты // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 2. С. 98–106.
15. *Мартинсон Л.К.*, *Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
16. *Малов Ю.И.*, *Мартинсон Л.К.* Приближенные методы решения краевых задач. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1989. 26 с.
17. *Чигирёва О.Ю.* Математическое моделирование процесса разогрева цилиндрической поверхности движущимся интенсивным источником тепла // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 6. С. 31–37.
18. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.
19. *Будак Б.М.*, *Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
20. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
21. *Канторович Л.В.*, *Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
22. *Чигирёва О.Ю.* Расчет оптимальной толщины слоя термоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 1. С. 94–101.
23. *Матус П.П.* О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщенными решениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.
24. *Чиркин В.С.* Теплофизические свойства материалов: Справочное руководство. М.: Физматгиз, 1959. 356 с.

REFERENCES

[1] Karslou G., Eger D. Russ. ed.: Teploprovodnost' tverdykh tel [Thermal Conductivity of Solids]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.

[2] Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [The Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1967. 600 p.

[3] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovod-nosti tverdykh tel [Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2001. 550 p.

[4] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering Methods for Solving Problems of Heat Conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.

[5] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of Composite Materials at High Temperatures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1997. 368 p.

[6] Zarubin V.S. The Optimum Thickness of the Cooled Walls under Local Heating. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 1970, no. 10, pp. 18–21 (in Russ.).

[7] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. Modeling Internal Heat and Mass Transfer as Well as Thermal Stresses in Composite Shells under Local Heating. *Mat. Model.* [Math. Models Comput. Simul.], 2011, vol. 23, no. 9, pp. 14–32 (in Russ.).

[8] Attetkov A.V., Vlasova L.N., Volkov I.K. Features of Temperature Field Formation in the System under the Influence of an Oscillating Heat Flux. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2012, vol. 4, no. 12, pp. 553–558 (in Russ.).

[9] Grigor'yants A.G., Shiganov I.N., Misyurov A.I. Tekhnologicheskie protsessy lazernoy obrabotki [Technological Processes of Laser Treatment]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2006. 663 p.

[10] Grigor'yants A.G. Osnovy lazernoy obrabotki materialov [Principles of Laser Treatment of Materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 300 p.

[11] Uglov A.A., Smurov I.Yu., Lashin A.M., Gus'kov A.G. Modelirovanie teplofizicheskikh protsessov impul'snogo lazernogo vozdeystviya na metally [Modeling Thermophysical Processes of Pulsed Laser Effect on Metals]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 287 p.

[12] Kozlov V.P. Local Heating of a Semirestricted Body with Laser Source. *Inzh.-Fiz. Zh.* [J. Eng. Phys.], 1988, vol. 54, no. 3, pp. 484–493 (in Russ.).

[13] Malov Yu.I., Martinson L.K., Rogozhin V.M. Mathematical Modeling Heat and Mass Transfer during Plasma Spraying. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 1994, no. 3, pp. 3–16 (in Russ.).

[14] Chigireva O.Yu. Mathematical Simulation of Warming up of Two-Layer Cylinder by Moving Circular Heat Source. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 2, pp. 98–106 (in Russ.).

[15] Martinson L.K., Malov Yu.I. Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki [Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2002. 368 p.

[16] Malov Yu.I., Martinson L.K. Priblizhennye metody resheniya kraevykh zadach [Approximate Methods for Solving Boundary Value Problems]. Moscow, MVTU im. N.E. Baumana Publ., 1989. 26 p.

[17] Chigireva O.Yu. Mathematical modeling the process of heating the cylindrical surface by moving intense heat source. *Inzh.-Fiz. Zh.* [J. Eng. Phys.], 2006, vol. 79, no. 6, pp. 31–37 (in Russ.).

[18] Chernyshov A.D. Method of Fast Expansions for the Solution of Nonlinear Differential Equations. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* [Comput. Math. Math. Phys.], 2014, vol. 54, no. 1, pp. 13–24 (in Russ.).

[19] Budak B.M., Fomin S.V. Kratnye integraly i ryady [Multiple Integrals and Series]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 608 p.

[20] Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsional'nyy analiz [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 752 p.

[21] Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennye metody vysshego analiza [Approximate Technique of Advanced Analysis]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 708 p.

[22] Chigireva O.Yu. Calculation of Optimal Layer Thickness of Thermal Insulation in Multi-layer Cylindrical Block. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki*, 2005, no. 1, pp. 94–101 (in Russ.).

[23] Matus P.P. On the Well-Posedness of Difference Schemes for a Semilinear Parabolic Equation with Generalized Solutions. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* [Comput. Math. Math. Phys.], 2010, vol. 50, no. 12, pp. 2155–2175 (in Russ.).

[24] Chirkin V.S. Teplofizicheskie svoystva materialov: Spravochnoe rukovodstvo [Thermophysical Properties of Materials: Reference Manual]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 356 p.

Статья поступила в редакцию 17.12.2014

Мартинсон Леонид Карлович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области математического моделирования нелинейных процессов переноса, соавтор трех учебников по математике и физике для вузов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Martinson L.K. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 150 publications in the field of mathematical simulation of nonlinear processes of transfer, co-author of three textbooks on physics and mathematics for universities.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Чигирёва Ольга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области математической физики и математического моделирования.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Chigireva O.Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of publications in the field of mathematical simulation and mathematical physics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мартинсон Л.К., Чигирёва О.Ю. Температурное поле цилиндрического тела в режиме периодического разогрева // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 88–98.

Please cite this article in English as:

Martinson L.K., Chigireva O.Yu. Thermal field of a cylindrical body during cyclic heating. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 3, pp. 88–98.