УДК 517.946

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ*

И.А. Рудаков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: rudakov_ia@mail.ru

Рассмотрена задача о периодических по времени решениях квазилинейного волнового уравнения с коэффициентами общего вида, зависящими от переменной x. Доказано существование счетного числа периодических решений в случае однородных граничных условий Дирихле на отрезке, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост. Доказательство проведено вариационным методом. Периодические решения являются критическими точками функционала энергии, существование которых доказывается с помощью метода Файрайсла. В случае, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности, приведены формулировка теоремы о существовании и регуляризации по крайней мере одного периодического решения, а также условия, при которых периодическое решение единственно. Доказательство теоремы получено с использованием принципа Лере – Шаудера о неподвижной точке и опирается на ранние работы автора настоящей статьи.

***Ключевые слова*:** волновое уравнение, периодические решения, задача Штурма – Лиувилля, критические точки функционала.

PERIODIC OSCILLATIONS OF AN UNHOMOGENEOUS STRING WITH FIXED ENDS

I.A. Rudakov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: rudakov_ia@mail.ru

The paper considers the problem of time-periodic solutions to the quasi-linear wave equation with x-dependent coefficients of a general form. The author proves the existence of a denumerable number of periodic solutions, if there are homogeneous Dirichlet boundary conditions on the segment when the nonlinear term features a power-law growth. The proof is based on a variational method. Periodic solutions are energy functional critical points, the existence of which is proved with the help of the Feireisle method. The author formulates a theorem about the existence and the regularization of at least one periodic solution in the case when the nonlinear term satisfies a non-resonance condition at infinity. The author also describes the conditions under which the periodic solution is unique. The proof of the theorem is obtained using the Lera – Schauder principle of a fixed point and it is based on the author's previous research. Keywords: wave equation, periodic solution, Sturm – Liouville problem, functional critical point.

***Keywords*:** wave equation, periodic solutions, Sturm – Liouville problem, functional critical points.

*Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 1.2640.2014.

Введение. Рассмотрим задачу о периодических решениях волнового уравнения

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(x,t,u) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R; \tag{1}$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R; \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in R. \tag{3}$$

Функция $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(x) \in C^2[0,\pi], \quad p(x) > 0 \;\; \forall x \in [0,\pi]. \tag{4}$$

Уравнение более общего вида $\rho(z)u_{tt} - (\mu(z)u_z)_z + h(z,t,u) = 0$, описывающее распространение сейсмических волн, приводится к уравнению (1) с помощью замены переменной $x = \int\limits_0^z \sqrt{\dfrac{\rho(s)}{\mu(s)}}ds$. Здесь $\rho(z)$ — плотность породы; $\mu(z)$ — коэффициент эластичности; $p = \sqrt{\rho\mu}$ — акустический импеданс [1].

Введем обозначения:

$$\Omega = [0,\pi] \times R \backslash (TZ); \quad \eta_p(x) = \frac{1}{2}\frac{p''}{p} - \frac{1}{4}\left(\frac{p'}{p}\right)^2;$$

$$B = \int\limits_0^\pi \eta_p(x)dx; \quad Z_+ = N \bigcup \{0\}.$$

Задача о периодических решениях квазилинейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами исследовалась во многих работах, например, [2–7]. Существование периодических по времени решений для волнового уравнения с переменными коэффициентами в случае, когда функция $\eta_p(x)$ сохраняет постоянный знак $\eta_p(x) > 0 \; \forall x \in [0,\pi]$ было доказано в работах [1, 8–10], для случая $\eta_p(x) < 0 \; \forall x \in [0,\pi]$ — в работе [11]. В настоящей работе доказано существование периодических по времени решений задачи (1)–(3) при условии, когда функция $\eta_p(x)$ может изменять знак на отрезке $[0,\pi]$.

Квазилинейное волновое уравнение. Предположим, что существуют положительные константы A_1, A_2, A_3, A_4, r такие, что при всех $(x,t,u) \in \Omega \times R$ выполнено неравенство

$$A_3|u|^{r-1} - A_4 \le |g(x,t,u)| \le A_1|u|^{r-1} - A_2, \tag{5}$$

где

$$r > 2, \quad \frac{2}{r}A_1 < A_3 \le A_1. \tag{6}$$

Будем искать периодические решения, для которых период времени имеет вид

$$T = 2\pi\frac{b}{a}, \quad a, b \in N, \quad \text{НОД}(a,b) = 1. \tag{7}$$

Решение задачи (1)–(3) представим суммой ряда Фурье. Для построения соответствующей ортонормированной системы запишем задачу Штурма – Лиувилля в виде уравнений

$$-(p(x)\varphi'(x))' = \lambda p(x)\varphi(x); \tag{8}$$

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим пространства $L_2(0,\pi)$ и $L_2(\Omega)$, скалярное произведение в которых задается равенствами

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_{[0,\pi]} \varphi(x)\psi(x)p(x)dx, \quad \varphi,\psi \in L_2(0,\pi);$$

$$(u,v) = \int\limits_{\Omega} u(x,t)v(x,t)p(x)dx\,dt, \quad u,v \in L_2(\Omega).$$

Для любой функции $u \in L_2(\Omega)$ обозначим $||u|| = \sqrt{(u,u)}$.

Задача, описываемая уравнениями (8), (9), имеет положительные, простые собственные значения $\lambda = \lambda_n^2$, $n \in N$ $(\lambda_n > 0)$, которым соответствуют собственные функции $\varphi_n(x)$ [12]. Предположим, что функции $\varphi_n(x)$ нормированы в пространстве $L_2(0,\pi)$. Согласно теореме Стеклова, система функций $\{\varphi_n(x)\}$ является полной ортонормированной в пространстве $L_2(0,\pi)$. Из уравнений (8), (9) следует, что система функций $\left\{\dfrac{\varphi_n'(x)}{\lambda_n}\right\}$ также ортонормирована в пространстве $L_2(0,\pi)$. Для задачи Штурма – Лиувилля (8), (9) доказано следующее асимптотическое представление собственных значений [12]:

$$\lambda_n = n + \frac{B}{2\pi}\frac{1}{n} + \alpha_n, \tag{10}$$

где $\alpha_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \in N$.

Пусть $H_1(\Omega)$ — пространство Соболева, полученное замыканием пространства $C^\infty(\Omega)$ по норме $||u||_1 = \left(\displaystyle\int\limits_{\Omega} (u^2 + u_x^2 + u_t^2)p(x)dxdt\right)^{1/2}$,

$H_1^0(\Omega)$ — пространство, полученное замыканием по норме $||\cdot||_1$ пространства бесконечно дифференцируемых во множестве Ω функций, финитных по x на отрезке $[0,\pi]$ при каждом t. Система функций

$$\Lambda = \left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n(x),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right),\ \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right)\right\}_{m,n\in N}$$

является полной ортонормированной в пространстве $L_2(\Omega)$ системой. Обозначим D множество конечных линейных комбинаций функций из системы Λ. Определим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, для которого $D(A_0) = D$ и $A_0\varphi = p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x \ \forall\varphi \in D(A_0)$. Пусть $\overline{A}_0\varphi = \dfrac{1}{p}A_0\varphi \ \forall\varphi \in D(A_0)$. Обозначим $A = (\overline{A}_0)^*$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Функции из системы Λ — собственные функции операторов $\overline{A}_0$ и A с собственными значениями $\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\dfrac{a}{b}m\right)^2$, $n \in N$, $m \in Z_+$, которым соответствуют собственные функции $T_m\varphi_n(x)\cos((a/b)mt)$, $n \in N, m \in Z_+$, $T_m\varphi_n(x)\sin((a/b)mt)$, $n, m \in N$. Здесь

$$T_m = \begin{cases} 1\Big/\sqrt{T}, m = 0; \\ \sqrt{2}\Big/\sqrt{T}, m \in N. \end{cases}$$

Обозначим $\sigma(A) = \{\mu_{nm} | n \in N, m \in Z_+\}$.

С учетом представления (10) можно записать представление $\mu_{nm} = \dfrac{1}{b^2}(nb - am)(nb + am) + \dfrac{B}{\pi} + \overline{\alpha}_n$, где $\overline{\alpha}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда следует существование единственной предельной точки B/π у множества $\sigma(A)$. При $B \neq 0$ обозначим через n_0 такое натуральное число, что $|\overline{\alpha}_n| < |B|/(2\pi)$ при $n > n_0$.

Стандартно доказываются следующие свойства оператора A: 1) оператор A самосопряжен в пространстве $L_2(\Omega)$; 2) $R(A)$ замкнут в пространстве $L_2(\Omega)$; 3) $L_2(\Omega) = \mathrm{Ker}A \oplus R(A)$; 4) при $B \neq 0$ пространство $\mathrm{Ker}A$ конечномерно [1].

При $r > 1$ норму в пространстве $L_r(\Omega)$ определим равенством $||u||_r = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^r p(x)dx\right)^{1/r}$, $u \in L_r(\Omega)$.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *называется функция* $u \in L_r(\Omega)$ *такая, что* $\displaystyle\int_\Omega u(\varphi_{tt} - (p(x)\varphi'_x)'_x)dx\,dt + \int_\Omega g(x,t,u)\varphi\,dx\,dt = 0 \ \forall\varphi \in D.$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(4), (7)$, *функция* g *непрерывна на* $\Omega \times R$, T — *периодична по* t, *удовлетворяет требованиям* $(5), (6)$ *и либо функция* g *не зависит от* t, *либо* $g(x,t,-u) = -g(x,t,u)$ *при всех* $(x,t,u) \in \Omega \times R$. *Предположим также, что либо* $B > 0$ *и функция* g *не убывает по* u *при всех* $(x,t) \in \Omega$, *либо* $B < 0$ *и функция* g *не возрастает по* u *при всех* $(x,t) \in \Omega$. *Тогда для любого* $d > 0$ *существует обобщенное решение* $u \in L_r(\Omega)$ *задачи* (1)–(3) *такое, что* $||u||_r \geq d$.

◄ Рассмотрим случай $B > 0$ (случай $B < 0$ аналогичен). Обозначим

$$M = \{(n,m) \in N \times Z_+ | \mu_{nm} \neq 0, bn \neq am\} \bigcup \bigcup \left\{ (n,m) \in N \times Z_+ | \mu_{nm} \neq 0, m = \frac{b}{a} n, \frac{n}{a} \in N, n \leq n_0 \right\};$$

$$\Lambda_1 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos nt,\ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin nt \middle| n, \frac{n}{a} \in N,\ n > n_0 \right\};$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi_n(x) | n \in N \right\} \bigcup \bigcup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \cos \frac{a}{b} mt, \sqrt{\frac{2}{T}} \varphi_n(x) \sin \frac{a}{b} mt \middle| (n,m) \in M, m \neq 0 \right\};$$

$N_1 = \mathrm{Ker}(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$ — замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ конечных линейных комбинаций функций из множества Λ_1, $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$. Отметим, что на N_2 собственные значения оператора A равны $B/\pi + \overline{\alpha}_n$ и принадлежат к интервалу $(B/(2\pi), 3B/(2\pi))$.

Введем конечномерное подпространство $E_n = N_1 \oplus N_{2n} \oplus N_{3n}$, где $2n > n_0$ и N_{2n}, N_{3n} — линейные оболочки множеств

$$\left\{ \varphi_k(x) \cos kt, \varphi_k(x) \sin kt \middle| k, \frac{k}{a} \in N, n_0 < k \leq n \right\};$$

$$\left\{ \varphi_k(x) \cos \frac{a}{b} mt, \varphi_k(x) \sin \frac{a}{b} mt \, |(k,m) \in M, k, m \leq n \right\} \bigcup \bigcup \left\{ \varphi_k(x) \cos kt, \varphi_k(x) \sin kt \middle| k, \frac{k}{a} \in N, k \leq n_0 \right\}.$$

Рассмотрим на подпространстве E_n функционал $F(u) = \frac{1}{2}(Au, u) + \int\limits_{\Omega} G(x,t,u)\, dxdt$, где $G(x,t,u) = \int\limits_0^u g(x,t,s)\, ds$.

Доказательство теоремы проведем, используя метод Файрайсла [14], разобьем доказательство на две части.

1. Доказательство существования критических точек $F|_{E_n}$.

2. Переход к пределу при $n \to \infty$.

1. *Доказательство существования критических точек* $F|_{E_n}$. Представим $E_n = G_c \oplus L_c$, где G_c, L_c — линейные комбинации собственных функций оператора A с собственными значениями больши-

ми или не меньшими c. Из условия (5) выведем**

$$\frac{1}{r}A_3\left|u\right|^r - A_5\left|u\right| \le G\left(x,t,u\right) \le \frac{1}{r}A_1|u|^r + A_2|u| \ \ \forall x,t,u.$$

Поэтому для любого действительного $c > 0$ и любой функции $u \in G_c$ получим

$$F\left(u\right) \ge \frac{1}{2}c||u||^2 + \frac{A_3}{r}||u||_r^r - A_5||u||_{L_1} \ge A_6||u||^r - \frac{1}{2}|c|||u||^2 - A_7||u||.$$

Обозначим $h\left(\tau\right) = A_6\tau^r - \dfrac{1}{2}|c|\tau^2 - A_7\tau$. Функция $h(\tau)$ ограничена снизу и $h\left(\tau\right) \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$. Поэтому существует $m\left(c\right) = \min\limits_{[0,+\infty)} h\left(\tau\right) - 1$. Следовательно,

$$F\left(u\right) > m\left(c\right) \quad \forall u \in G_c. \tag{11}$$

Разложим функцию $u \in E_n$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{(n,m)\in N\times Z_+} \varphi_n\left(x\right)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt\right).$$

Обозначим

$$|||u|||_s = \sum_{(n,m)\in N\times Z_+} \left|\mu_{nm}\right|^s\left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right).$$

Возьмем число $\alpha \in \left(\dfrac{r-2}{2(r-1)}, \dfrac{r}{2(r-1)}\right)$ и обозначим $\beta = 2\alpha\dfrac{r-1}{r}$. Используя неравенство Хаусдорфа – Юнга и Гельдера, выведем

$$||u||_r \le C_1|||u|||_\beta \ \ \forall u \in H_{3n}. \tag{12}$$

Обозначим $S_n = \left\{u \in E_n \middle| \, |||u|||_\beta = 1\right\}$.

Лемма 1. *Для любого действительного числа* d *существует число* $w(d) < 0$ *такое, что*

$$F(u) \le d \ \ \forall u \in \{v \in L_{w(d)} \, |||\,|v|||_\beta = 1\}.$$

◀ Пусть $w < 0$. На множестве N_{2n} собственные значения оператора A положительные. Следовательно, $L_\omega \subseteq N_{3n}$. Пусть $u \in L_\omega \bigcap S_n$, a_{mk}, b_{mk} — коэффициенты фурье-функции u. Используя (12), выведем существование константы $C > 0$ такой, что

$$F\left(u\right) \le$$
$$\le -\frac{1}{2}\sum_{(m,k)\in M}\left|\mu_{mk}\right|\left(a_{mk}^2 + b_{mk}^2\right) + \frac{A_1}{r}\int\limits_\Omega |u|^r dxdt + A_2\int\limits_\Omega |u|dxdt \le$$

**Здесь и далее буквами с индексами $A_1, A_2, \ldots; C_1, C_2, \ldots$ обозначим положительные константы.

$$\leq -\frac{1}{2} \sum_{(m,k)\in M} |\mu_{mk}|^{\beta} |\mu_{mk}|^{1-\beta} \left(a_{mk}^2 + b_{mk}^2\right) + C|||u|||_{\beta}^{r} + C|||u|||_{\beta} \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}|w|^{1-\beta}|||u|||_{\beta}^{2} + 2C = -\frac{1}{2}|w|^{1-\beta} + 2C \to -\infty$$

при $|w| \to \infty$. Откуда вытекает утверждение леммы. ▶

Возьмем произвольное $c < 0$. Зафиксируем число $c_1 < \omega(c)$ такое, что $L_{c_1} \subset L_{\omega(c)}$ $\left(L_{c_1} \neq L_{\omega(c)}\right)$. Обозначим $\gamma(c) = \min(m(c_1), c - 1)$.

Докажем, что на отрезке $[\gamma(c), c]$ есть критическое значение $F\big|_{E_n}$. Предположим противное. Тогда стандартно доказывается существование непрерывного отображения $h : E_n \to E_n$ такого, что $h(\{u|F(u) \leq c\}) \subseteq \{u|F(u) \leq \gamma(c)\}$ и h является нечетным отображением, если функция g нечетна относительно u, или $h(u(\cdot, t + \tau)) = h(u)(\cdot, t + \tau)$ $\forall \tau \in [0, T]$, если функция g не зависит от t [14]. Пусть $P : E_n \to L_{c_1}$ — ортогональный проектор в пространстве $L_2(\Omega)$. Докажем, что

$$Ph(u) \neq 0 \;\; \forall u \subset S_n \bigcap L_{\omega(c)}. \tag{13}$$

Предположим противное, т.е. существует $u_0 \in S_n \bigcap L_{\omega(c)}$ такое, что $Ph(u_0) = 0$. Тогда $h(u_0) \in G_{\omega(c)} \subset G_{c_1}$, поскольку $c_1 < \omega(c)$. Тогда из (11) следует

$$F(h(u_0)) > m(c_1). \tag{14}$$

Поскольку $u_0 \in L_{\omega(c)} \bigcap S_n$, имеем $F(u_0) \leq c$. Таким образом, $F(h(u_0)) \leq \gamma(c) \leq m(c_1)$. Это противоречит (14). Следовательно, верно (13). Однако Ph — отображение сферы в пространстве $L_{\omega(c)}$ на подпространство меньшей размерности. Если функция g нечетна относительно u, то это противоречит теореме Борсук – Улама [14]. Если функция g не зависит от t, то это противоречит S^1-теореме Борсук – Улама [14]. Существует критическая точка u_n функционала в $F\big|_{E_n}$ такая, что $F(u_n) \in [\gamma(c), c]$, т.е.

$$(Au_n, w) + \int_{\Omega} g(x, t, u_n)\, w\, dx\, dt = 0 \;\; \forall w \in E_n; \tag{15}$$

$$\gamma(A) \leq \frac{1}{2}(Au_n, u_n) + \int_{\Omega} G(x, t, u_n)\; dx\, dt \leq c. \tag{16}$$

Умножим (15) на 1/2 и примем

$$w = u_n : \;\frac{1}{2}(Au_n, u_n) + \frac{1}{2}\int_{\Omega} g(x, t, u_n)\, u_n dx\, dt = 0.$$

Вычтем из полученного уравнения выражение (16) и запишем

$$-\gamma(c) \geq \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} g(x,t,u_n)\, u_n - G(x,t,u_n)\right) dx\, dt \geq -c.$$

Из (5), (6) выведем

$$\delta |u|^r - \left(\frac{A_4}{2} + A_2\right)|u| - A_8 \leq \frac{1}{2} u g(x,t,u_n) -$$
$$- G(x,t,u_n) \leq \left(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{r}A_3\right)|u|^r + \left(\frac{A_2}{2} + A_5\right)|u| + A_8.$$

Здесь $\delta = \dfrac{1}{2}A_3 - \dfrac{1}{r}A_1$. Следовательно, существуют константы C_1, $C_2 > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} ||u_n||_r \leq C_2; \\ ||u_n||_r^r + C_2 ||u_n||_r + C_2 \geq C_1 |c|. \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку $||u_n||_r^r + 1 \geq ||u_n||_r$, найдем

$$||u_n||_r^r \geq \frac{C_1|c| - 2C_2}{C_2 + 1}. \tag{18}$$

►

2. *Переход к пределу при* $n \to \infty$. Из (17) следует существование подпоследовательности, которую также обозначим u_n, $u_n \to u$ в пространстве $L_r(\Omega)$ слабо, $g(x,t,u_n) \to h$ в $L_q(\Omega)$ слабо. Здесь $q = (r-1)/r$. Докажем, что u — решение (обобщенное).

Пусть $u_n = u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}$, $u = u_1 + u_2 + u_3$; $u_k, u_{kn} \in N_k$, $k \in \{1,2,3\}$. Тогда $u_{kn} \to u_k$ слабо в пространстве $L_2(\Omega)$, $k \in \{1,2,3\}$. На пространстве N_2 оператор A ограничен. Следовательно, $Au_{2n} \to Au_2$ слабо в пространстве $L_2(\Omega)$. Действительно, для любого $\varphi \in L_2(\Omega)$ имеем $(Au_{2n}, \varphi) = (Au_{2n}, \varphi_2) = (u_{2n}, A\varphi_2) \to (u_2, A\varphi_2) = (Au_2, \varphi)$, где φ_2 — ортогональная проекция в пространстве $L_2(\Omega)$ функции φ на подпространство N_2.

Пусть $a_{mk}^n, b_{mk}^n, a_{mk}^0, b_{mk}^0$ — коэффициенты Фурье u_n и u. Обозначим $J_R = \sum\limits_{|\mu_{mk}| \geq R} |\mu_{mk}| \left((a_{mk}^n)^2 + (b_{mk}^n)^2\right)$. Возьмем $R > 2c_1 + c_1^2$ и

$$w = \sum_{|\mu_{mk}| \geq R} \operatorname{sgn}(\mu_{mk})\, \varphi_m(x) \left(a_{mk}^n \cos\left(\frac{a}{b}kt\right) + b_{mk}^n \sin\left(\frac{a}{b}kt\right)\right).$$

Подставим w в (15). Используя (12) и неравенство Гельдера, получим

$$J_R = -\int\limits_{\Omega} g(x,t,u_n)\, w dx\, dt \leq ||g(x,t,u_n)||_q ||w||_r \leq C_3 C_1 ||w||_\beta =$$

$$= C_3 C_1 \sqrt{\sum_{|\mu_{mk}|\geq R} \frac{|\mu_{mk}|}{|\mu_{mk}|^{1-\beta}} \left((a^n_{mk})^2 + (b^n_{mk})^2\right)} \leq \frac{C_4}{R^{\frac{1-\beta}{2}}} \sqrt{J_R}.$$

Следовательно, $J_R \leq \dfrac{C_4^2}{R^{1-\beta}} \to 0$ при $R \to \infty$, отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(m,k)\in M} \mu_{mk} \left((a^n_{mk})^2 + (b^n_{mk})^2\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (Au_{3n}, u_{3n}) = \sum_{(m,k)\in M} \mu_{mk} \left(\left(a^0_{mk}\right)^2 + \left(b^0_{mk}\right)^2\right).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в (15) при фиксированном $w \in E_{n_1}, n_1 \in N$:

$$(Au_2, w) + (u_3, Aw) + \int_\Omega hw dx\, dt = 0. \qquad (19)$$

Докажем методом монотонности, что $h = g\,(x, t, u)$. Для любого элемента $v \in L_r(\Omega) \bigcap D\,(A)$ имеем

$$(Av_2 - Au_{2n}, v_2 - u_{2n}) +$$
$$+ \int_\Omega \left(g\,(x, t, v) - g\,(x, t, u_n)\right)(v - u_n)\, dxdt \geq 0. \qquad (20)$$

Примем в (15) $w = u_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left[(Au_{2n}, u_{2n}) + \int_\Omega g\,(x, t, u_n)\, u_n dxdt\right] =$$
$$= - \sum_{(m,k)\in M} \mu_{mk} \left(\left(a^0_{mk}\right)^2 + \left(b^0_{mk}\right)^2\right). \qquad (21)$$

Подставим в (19) $w = u_n$ и устремим $n \to \infty$: $(Au_2, u_2) + \int_\Omega hu\, dx\, dt = - \sum_{(m,k)\in M} \mu_{mk} \left(\left(a^0_{mk}\right)^2 + \left(b^0_{mk}\right)^2\right)$. Откуда из (21) получим

$$\lim_{n\to\infty} \left[(Au_{2n}, u_{2n}) + \int_\Omega g\,(x, t, u_n)\, u_n dx\, dt\right] =$$
$$= (Au_2, u_2) + \int_\Omega hudxdt. \qquad (22)$$

Перейдем в (20) к пределу при $n \to \infty$: $(Av_2 - Au_2, v_2 - u_2) +$

$+\int\limits_{\Omega}(g(x,t,v)-h)(v-u)\,dx\,dt \geq 0$. Возьмем $v = u+\tau\psi$, $\tau > 0$, $\psi \in L_r \bigcap D(A)$: $\tau(A\psi,\psi_2) + \int\limits_{\Omega}(g(x,t,u+\tau\psi)-h)\psi dx\,dt \geq 0$. Устремим $\tau \to 0$: $\int\limits_{\Omega}(g(x,t,u)-h)\psi dx\,dt \geq 0 \ \ \forall\psi \in L_r(\Omega)\bigcap D(A)$. Следовательно, $h = g(x,t,u)$. Отсюда и (19) следует, что u является обобщенным решением. Оценка $||u||_r \geq d$ вытекает из (5), (18), (22). Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний неоднородной струны

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = g(x,t,u) + f(x,t), \ \ 0 < x < \pi, \ \ t \in R. \tag{23}$$

Предположим, что нелинейное слагаемое g удовлетворяет следующему условию: существуют $\alpha, \beta \in R$, $C \in (0,+\infty)$ такие, что

$$\alpha \leq \frac{g(x,t,u)}{p(x)u} \leq \beta \ \ \forall u \in (-\infty,-C)\bigcup(C,+\infty), \ \forall(x,t) \in \Omega. \tag{24}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $g \in C^1(\Omega \times R)$, T периодична по t, выполнены условия (4), (7) и существуют положительные константы M_1, M_2 такие, что $|g_t(x,t,u)| \leq M_1|u| + M_2 \ \forall(x,t,u) \in \Omega \times R$. Предположим, что либо $B < 0$ и выполнено условие (24), в котором $\alpha > B/\pi$, $[\alpha,\beta]\bigcap\sigma(A) = \varnothing$ и $\ -\gamma \leq \dfrac{g_u(x,t,u)}{p(x)} \leq M_3 \ \forall(x,t,u) \in \Omega \times R$, либо $B > 0$ и выполнено условие (24), где $\beta < B/\pi$, $[-\beta,-\alpha]\bigcap\sigma(A) = \varnothing$ и $\ -\gamma \leq -\dfrac{g_u(x,t,u)}{p(x)} \leq M_3 \ \forall(x,t,u) \in \Omega \times R$, $M_3 > 0$, $\gamma \in (0,|B|/\pi)$. Тогда для любой функции $f(x,t) \in H_1(\Omega)$ задача (2), (3), (23) имеет обобщенное решение $u \in H_1^0(\Omega)$.*

Доказательство существования решения опирается на теорему 3.1, приведенную в работе [10], доказательство гладкости решения дано в работе [15].

Замечание. *Полученное в теореме 2 решение будет единственно, если дополнительно условиям этой теоремы потребовать при $B < 0$ выполнения условия*

$$\alpha(u-v)^2 \leq \frac{1}{p(x)}(g(x,t,u)-g(x,t,v))(u-v) \leq$$
$$\leq \beta(u-v)^2 \forall u,v \in R, \forall(x,t) \in \Omega,$$

а при $B > 0$ — условия

$$\alpha(u-v)^2 \leq \frac{1}{p(x)}(g(x,t,v)-g(x,t,u))(u-v) \leq$$
$$\leq \beta(u-v)^2 \quad \forall u,v \in R, \forall(x,t) \in \Omega.$$

Заключение. Согласно теоремам 1, 2 и замечанию, в случае степенного роста по u нелинейного слагаемого волновое уравнение может иметь счетное число периодических решений, у которых L_r-норма стремится к бесконечности, а если нелинейное слагаемое имеет по u не более чем линейный рост, то волновое уравнение может иметь только одно периодическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barby V.*, *Pavel N.H.* Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x-dependent coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 349. No. 5. P. 2035–2048.
2. *Rabinowitz P.* Free vibration for a semilinear wave equation // Comm. Pure Aple. Math. 1978. Vol. 31. No. 1. P. 31–68.
3. *Bahri A.*, *Brezis H.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1980. Vol. 85. P. 310–320.
4. *Brezis H.*, *Nirenberg L.* Forced vibration for a nonlinear wave equations // Comm. Pure Aple. Math. 1978. Vol. 31. No. 1. P. 1–30.
5. *Плотников П.И.* Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Матем. Сб. 1988. Т. 136 (178). № 4 (8). С. 546–560.
6. *Feireisl E.* On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // Chechosl. Math. J. 1988. Vol. 38. No. 1. P. 78–87.
7. *Рудаков И.А.* Нелинейные колебания струны // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., Мех. 1984. № 2. С. 9–13.
8. *Рудаков И.А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами // Матем. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 3. С. 427–438.
9. *Shuguan J.* Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x-dependent coefficients // Calc. Var. 2008. Vol. 32. P. 137–153.
10. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами // Матем. Сб. 2007. Т. 198. № 4 (8). С. 546–560.
11. *Кондратьев В.А.*, *Рудаков И.А.* О периодических решениях квазилинейного волнового уравнения // Матем. заметки. 2009. Т. 85. Вып. 1. С. 36–53.
12. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2003. 351 с.
13. *Рудаков И.А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Известия РАН. Сер. Матем. 2006. № 1. С. 1–10.
14. *Feirisl E.* On the existence of the multiplicity periodic solutions of rectangle thin plate // Chechosl. Math. J. 1998. Vol. 37. No. 2. P. 334–341.
15. *Рудаков И.А.* О периодических по времени решениях квазилинейного волнового уравнения // Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 226–232.

REFERENCES

[1] Barby V., Pavel N.H. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x-dependent coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1997, vol. 349, no. 5, pp. 2035–2048.

[2] Rabinowitz P. Free vibration for a semilinear wave equation. *Comm. Pure Aple. Math.*, 1978, vol. 31, no. 1, pp. 31–68.
[3] Bahri A., Brezis H. Periodic solutions of a nonlinear wave equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* A, 1980, vol. 85, pp. 310–320.
[4] Brezis H., Nirenberg L. Forced vibration for a nonlinear wave equations. *Comm. Pure Aple. Math.*, 1978, vol. 31, no. 1, pp. 1–30.
[5] Plotnikov P.I. Existence of a Countable Set of Periodic Solutions of the Forced Vibration Problem for a Weakly Nonlinear Wave Equation. *Mat. Sb*. [Sbornik: Mathematics], 1988, vol. 136 (178), no. 4 (8), pp. 546–560 (in Russ.).
[6] Feireisl E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term. *Chechosl. Math. J.*, 1988, vol. 38, no. 1, pp. 78–87.
[7] Rudakov I.A. Nonlinear Vibrations of a String. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat., Mekh*. [Moscow Univ. Math., Mech. Bull.], 1984, no. 2, pp. 9–13 (in Russ.).
[8] Rudakov I.A. Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equation with Non-Regular Coefficients. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2004, vol. 76, iss. 3, pp. 427–438 (in Russ.).
[9] Shuguan J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x-dependet coefficients. *Calc. Var.*, 2008, vol. 32, pp. 137–153.
[10] Rudakov I.A. Periodic Solutions of a Quasilinear Wave Equation with Variable Coefficients. *Mat. Sb*. [Sbornik: Mathematics], 2007, vol. 198, no. 4 (8), pp. 546–560 (in Russ.).
[11] Kondrat'ev V.A., Rudakov I.A. Periodic Solutions of a Quasilinear Wave Equation. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2009, vol. 85, iss. 1, pp. 36–53 (in Russ.).
[12] Trikomi F. Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]. Moscow, URSS Publ., 2003. 351 p.
[13] Rudakov I.A. Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equation with Homogeneous Boundary Conditions. *Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat*. [Bull. Russ. Acad. Sci.: Math.], 2006, no. 1, pp. 1–10 (in Russ.).
[14] Feirisl E. On the existence of the multiplicity periodic solutions of rectangle thin plate. *Chechosl. Math. J.*, 1998, vol. 37, no. 2, pp. 334–341.
[15] Rudakov I.A. On the Time-Periodic Solutions of Quasi-Linear Wave Equation. *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Institute], 2010, vol. 270, pp. 226–232 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 12.02.2015

Рудаков Игорь Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прикладной математики. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Rudakov I.A. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematics, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, author specializes in the field of applied mathematics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Рудаков И.А. Периодические колебания неоднородной струны с закрепленными концами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 3–14.

Please cite this article in English as:

Rudakov I.A. Periodic oscillations of an unhomogeneous string with fixed ends. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 4, pp. 3–14.