

УДК 517.946

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ*

И.А. Рудаков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: rudakov_ia@mail.ru

Рассмотрена задача о периодических по времени решениях квазилинейного волнового уравнения с коэффициентами общего вида, зависящими от переменной x . Доказано существование счетного числа периодических решений в случае однородных граничных условий Дирихле на отрезке, если нелинейное слагаемое имеет степенной рост. Доказательство проведено вариационным методом. Периодические решения являются критическими точками функционала энергии, существование которых доказывается с помощью метода Файрайсла. В случае, когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию нерезонансности на бесконечности, приведены формулировка теоремы о существовании и регуляризации по крайней мере одного периодического решения, а также условия, при которых периодическое решение единственно. Доказательство теоремы получено с использованием принципа Лере – Шаудера о неподвижной точке и опирается на ранние работы автора настоящей статьи.

Ключевые слова: волновое уравнение, периодические решения, задача Штурма – Лиувилля, критические точки функционала.

PERIODIC OSCILLATIONS OF AN UNHOMOGENEOUS STRING WITH FIXED ENDS

I.A. Rudakov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: rudakov_ia@mail.ru

The paper considers the problem of time-periodic solutions to the quasi-linear wave equation with x -dependent coefficients of a general form. The author proves the existence of a denumerable number of periodic solutions, if there are homogeneous Dirichlet boundary conditions on the segment when the nonlinear term features a power-law growth. The proof is based on a variational method. Periodic solutions are energy functional critical points, the existence of which is proved with the help of the Feireisle method. The author formulates a theorem about the existence and the regularization of at least one periodic solution in the case when the nonlinear term satisfies a non-resonance condition at infinity. The author also describes the conditions under which the periodic solution is unique. The proof of the theorem is obtained using the Lera – Schauder principle of a fixed point and it is based on the author's previous research. Keywords: wave equation, periodic solution, Sturm – Liouville problem, functional critical point.

Keywords: wave equation, periodic solutions, Sturm – Liouville problem, functional critical points.

*Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 1.2640.2014.

Введение. Рассмотрим задачу о периодических решениях волнового уравнения

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + g(x, t, u) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R; \quad (1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R; \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in R. \quad (3)$$

Функция $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(x) \in C^2[0, \pi], \quad p(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (4)$$

Уравнение более общего вида $\rho(z)u_{tt} - (\mu(z)u_z)_z + h(z, t, u) = 0$, описывающее распространение сейсмических волн, приводится к

уравнению (1) с помощью замены переменной $x = \int_0^z \sqrt{\frac{\rho(s)}{\mu(s)}} ds$.

Здесь $\rho(z)$ — плотность породы; $\mu(z)$ — коэффициент эластичности; $p = \sqrt{\rho\mu}$ — акустический импеданс [1].

Введем обозначения:

$$\Omega = [0, \pi] \times R \setminus (TZ); \quad \eta_p(x) = \frac{1}{2} \frac{p''}{p} - \frac{1}{4} \left(\frac{p'}{p} \right)^2;$$

$$B = \int_0^\pi \eta_p(x) dx; \quad Z_+ = N \cup \{0\}.$$

Задача о периодических решениях квазилинейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами исследовалась во многих работах, например, [2–7]. Существование периодических по времени решений для волнового уравнения с переменными коэффициентами в случае, когда функция $\eta_p(x)$ сохраняет постоянный знак $\eta_p(x) > 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$ было доказано в работах [1, 8–10], для случая $\eta_p(x) < 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$ — в работе [11]. В настоящей работе доказано существование периодических по времени решений задачи (1)–(3) при условии, когда функция $\eta_p(x)$ может изменять знак на отрезке $[0, \pi]$.

Квазилинейное волновое уравнение. Предположим, что существуют положительные константы A_1, A_2, A_3, A_4, r такие, что при всех $(x, t, u) \in \Omega \times R$ выполнено неравенство

$$A_3|u|^{r-1} - A_4 \leq |g(x, t, u)| \leq A_1|u|^{r-1} - A_2, \quad (5)$$

где

$$r > 2, \quad \frac{2}{r} A_1 < A_3 \leq A_1. \quad (6)$$

Будем искать периодические решения, для которых период времени имеет вид

$$T = 2\pi \frac{b}{a}, \quad a, b \in N, \quad \text{НОД}(a, b) = 1. \quad (7)$$

Решение задачи (1)–(3) представим суммой ряда Фурье. Для построения соответствующей ортонормированной системы запишем задачу Штурма – Лиувилля в виде уравнений

$$-(p(x)\varphi'(x))' = \lambda p(x)\varphi(x); \tag{8}$$

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим пространства $L_2(0, \pi)$ и $L_2(\Omega)$, скалярное произведение в которых задается равенствами

$$(\varphi, \psi) = \int_{[0, \pi]} \varphi(x)\psi(x)p(x)dx, \quad \varphi, \psi \in L_2(0, \pi);$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x, t)v(x, t)p(x)dx dt, \quad u, v \in L_2(\Omega).$$

Для любой функции $u \in L_2(\Omega)$ обозначим $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Задача, описываемая уравнениями (8), (9), имеет положительные, простые собственные значения $\lambda = \lambda_n^2$, $n \in N$ ($\lambda_n > 0$), которым соответствуют собственные функции $\varphi_n(x)$ [12]. Предположим, что функции $\varphi_n(x)$ нормированы в пространстве $L_2(0, \pi)$. Согласно теореме Стеклова, система функций $\{\varphi_n(x)\}$ является полной ортонормированной в пространстве $L_2(0, \pi)$. Из уравнений (8), (9) следует, что система функций $\left\{ \frac{\varphi'_n(x)}{\lambda_n} \right\}$ также ортонормирована в пространстве $L_2(0, \pi)$. Для задачи Штурма – Лиувилля (8), (9) доказано следующее асимптотическое представление собственных значений [12]:

$$\lambda_n = n + \frac{B}{2\pi} \frac{1}{n} + \alpha_n, \tag{10}$$

где $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \in N$.

Пусть $H_1(\Omega)$ – пространство Соболева, полученное замыканием пространства $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} (u^2 + u_x^2 + u_t^2)p(x)dx dt \right)^{1/2}$, $H_1^0(\Omega)$ – пространство, полученное замыканием по норме $\|\cdot\|_1$ пространства бесконечно дифференцируемых во множестве Ω функций, финитных по x на отрезке $[0, \pi]$ при каждом t . Система функций

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x) \cos\left(\frac{a}{b}mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x) \sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right\}_{m, n \in N}$$

является полной ортонормированной в пространстве $L_2(\Omega)$ системой. Обозначим D множество конечных линейных комбинаций функций

из системы Λ . Определим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, для которого $D(A_0) = D$ и $A_0\varphi = p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Пусть $\bar{A}_0\varphi = \frac{1}{p}A_0\varphi \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Обозначим $A = (\bar{A}_0)^*$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Функции из системы Λ – собственные функции операторов \bar{A}_0 и A с собственными значениями $\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{a}{b}m\right)^2, n \in N, m \in Z_+$, которым соответствуют собственные функции $T_m\varphi_n(x) \cos((a/b)mt), n \in N, m \in Z_+, T_m\varphi_n(x) \sin((a/b)mt), n, m \in N$. Здесь

$$T_m = \begin{cases} 1/\sqrt{T}, m = 0; \\ \sqrt{2}/\sqrt{T}, m \in N. \end{cases}$$

Обозначим $\sigma(A) = \{\mu_{nm} | n \in N, m \in Z_+\}$.

С учетом представления (10) можно записать представление $\mu_{nm} = \frac{1}{b^2}(nb - am)(nb + am) + \frac{B}{\pi} + \bar{\alpha}_n$, где $\bar{\alpha}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Откуда следует существование единственной предельной точки B/π у множества $\sigma(A)$. При $B \neq 0$ обозначим через n_0 такое натуральное число, что $|\bar{\alpha}_n| < |B|/(2\pi)$ при $n > n_0$.

Стандартно доказываются следующие свойства оператора A : 1) оператор A самосопряжен в пространстве $L_2(\Omega)$; 2) $R(A)$ замкнут в пространстве $L_2(\Omega)$; 3) $L_2(\Omega) = \text{Ker}A \oplus R(A)$; 4) при $B \neq 0$ пространство $\text{Ker}A$ конечномерно [1].

При $r > 1$ норму в пространстве $L_r(\Omega)$ определим равенством

$$\|u\|_r = \left(\int_{\Omega} |u|^r p(x) dx \right)^{1/r}, u \in L_r(\Omega).$$

Определение. *Обобщенным решением задачи (1)–(3) называется функция $u \in L_r(\Omega)$ такая, что $\int_{\Omega} u(\varphi_{tt} - (p(x)\varphi'_x)'_x) dx dt + \int_{\Omega} g(x, t, u)\varphi dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in D$.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4), (7), функция g непрерывна на $\Omega \times R$, T – периодична по t , удовлетворяет требованиям (5), (6) и либо функция g не зависит от t , либо $g(x, t, -u) = -g(x, t, u)$ при всех $(x, t, u) \in \Omega \times R$. Предположим также, что либо $B > 0$ и функция g не убывает по u при всех $(x, t) \in \Omega$, либо $B < 0$ и функция g не возрастает по u при всех $(x, t) \in \Omega$. Тогда для любого $d > 0$ существует обобщенное решение $u \in L_r(\Omega)$ задачи (1)–(3) такое, что $\|u\|_r \geq d$.*

◀ Рассмотрим случай $B > 0$ (случай $B < 0$ аналогичен). Обозначим

$$M = \{(n, m) \in N \times Z_+ | \mu_{nm} \neq 0, bn \neq am\} \cup \bigcup \left\{ (n, m) \in N \times Z_+ | \mu_{nm} \neq 0, m = \frac{b}{a}n, \frac{n}{a} \in N, n \leq n_0 \right\};$$

$$\Lambda_1 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x) \cos nt, \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x) \sin nt \mid n, \frac{n}{a} \in N, n > n_0 \right\};$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi_n(x) \mid n \in N \right\} \cup \bigcup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x) \cos \frac{a}{b}mt, \sqrt{\frac{2}{T}}\varphi_n(x) \sin \frac{a}{b}mt \mid (n, m) \in M, m \neq 0 \right\};$$

$N_1 = \text{Ker}(A)$, $N_2 = \overline{L(\Lambda_1)}$ — замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ конечных линейных комбинаций функций из множества Λ_1 , $N_3 = \overline{L(\Lambda_2)}$. Отметим, что на N_2 собственные значения оператора A равны $B/\pi + \bar{\alpha}_n$ и принадлежат к интервалу $(B/(2\pi), 3B/(2\pi))$.

Введем конечномерное подпространство $E_n = N_1 \oplus N_{2n} \oplus N_{3n}$, где $2n > n_0$ и N_{2n}, N_{3n} — линейные оболочки множеств

$$\left\{ \varphi_k(x) \cos kt, \varphi_k(x) \sin kt \mid k, \frac{k}{a} \in N, n_0 < k \leq n \right\};$$

$$\left\{ \varphi_k(x) \cos \frac{a}{b}mt, \varphi_k(x) \sin \frac{a}{b}mt \mid (k, m) \in M, k, m \leq n \right\} \cup \bigcup \left\{ \varphi_k(x) \cos kt, \varphi_k(x) \sin kt \mid k, \frac{k}{a} \in N, k \leq n_0 \right\}.$$

Рассмотрим на подпространстве E_n функционал $F(u) = \frac{1}{2}(Au, u) + \int_{\Omega} G(x, t, u) dxdt$, где $G(x, t, u) = \int_0^u g(x, t, s) ds$.

Доказательство теоремы проведем, используя метод Файрайсла [14], разобьем доказательство на две части.

1. Доказательство существования критических точек $F|_{E_n}$.
2. Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$.

1. *Доказательство существования критических точек $F|_{E_n}$.* Представим $E_n = G_c \oplus L_c$, где G_c, L_c — линейные комбинации собственных функций оператора A с собственными значениями больши-

ми или не меньшими c . Из условия (5) выведем**

$$\frac{1}{r}A_3|u|^r - A_5|u| \leq G(x, t, u) \leq \frac{1}{r}A_1|u|^r + A_2|u| \quad \forall x, t, u.$$

Поэтому для любого действительного $c > 0$ и любой функции $u \in G_c$ получим

$$F(u) \geq \frac{1}{2}c\|u\|^2 + \frac{A_3}{r}\|u\|_r^r - A_5\|u\|_{L_1} \geq A_6\|u\|^r - \frac{1}{2}|c|\|u\|^2 - A_7\|u\|.$$

Обозначим $h(\tau) = A_6\tau^r - \frac{1}{2}|c|\tau^2 - A_7\tau$. Функция $h(\tau)$ ограничена снизу и $h(\tau) \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Поэтому существует $m(c) = \min_{[0, +\infty)} h(\tau) - 1$. Следовательно,

$$F(u) > m(c) \quad \forall u \in G_c. \tag{11}$$

Разложим функцию $u \in E_n$ в ряд Фурье:

$$u = \sum_{(n,m) \in N \times Z_+} \varphi_n(x) \left(a_{nm} \cos \frac{a}{b}mt + b_{nm} \sin \frac{a}{b}mt \right).$$

Обозначим

$$\|u\|_s = \sum_{(n,m) \in N \times Z_+} |\mu_{nm}|^s (a_{nm}^2 + b_{nm}^2).$$

Возьмем число $\alpha \in \left(\frac{r-2}{2(r-1)}, \frac{r}{2(r-1)} \right)$ и обозначим $\beta = 2\alpha \frac{r-1}{r}$.

Используя неравенство Хаусдорфа – Юнга и Гельдера, выведем

$$\|u\|_r \leq C_1 \|u\|_\beta \quad \forall u \in H_{3n}. \tag{12}$$

Обозначим $S_n = \{u \in E_n \mid \|u\|_\beta = 1\}$.

Лемма 1. Для любого действительного числа d существует число $w(d) < 0$ такое, что

$$F(u) \leq d \quad \forall u \in \{v \in L_{w(d)} \mid \|v\|_\beta = 1\}.$$

◀ Пусть $w < 0$. На множестве N_{2n} собственные значения оператора A положительные. Следовательно, $L_w \subseteq N_{3n}$. Пусть $u \in L_w \cap S_n$, a_{mk}, b_{mk} – коэффициенты фурье-функции u . Используя (12), выведем существование константы $C > 0$ такой, что

$$\begin{aligned} F(u) &\leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_{(m,k) \in M} |\mu_{mk}| (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) + \frac{A_1}{r} \int_{\Omega} |u|^r dxdt + A_2 \int_{\Omega} |u| dxdt \leq \end{aligned}$$

**Здесь и далее буквами с индексами $A_1, A_2, \dots; C_1, C_2, \dots$ обозначим положительные константы.

$$\begin{aligned} &\leq -\frac{1}{2} \sum_{(m,k) \in M} |\mu_{mk}|^\beta |\mu_{mk}|^{1-\beta} (a_{mk}^2 + b_{mk}^2) + C \|u\|_\beta^r + C \|u\|_\beta \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} |w|^{1-\beta} \|u\|_\beta^2 + 2C = -\frac{1}{2} |w|^{1-\beta} + 2C \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

при $|w| \rightarrow \infty$. Откуда вытекает утверждение леммы. ►

Возьмем произвольное $c < 0$. Зафиксируем число $c_1 < \omega(c)$ такое, что $L_{c_1} \subset L_{\omega(c)}$ ($L_{c_1} \neq L_{\omega(c)}$). Обозначим $\gamma(c) = \min(m(c_1), c - 1)$.

Докажем, что на отрезке $[\gamma(c), c]$ есть критическое значение $F|_{E_n}$. Предположим противное. Тогда стандартно доказывается существование непрерывного отображения $h : E_n \rightarrow E_n$ такого, что $h(\{u | F(u) \leq c\}) \subseteq \{u | F(u) \leq \gamma(c)\}$ и h является нечетным отображением, если функция g нечетна относительно u , или $h(u(\cdot, t + \tau)) = h(u)(\cdot, t + \tau) \forall \tau \in [0, T]$, если функция g не зависит от t [14]. Пусть $P : E_n \rightarrow L_{c_1}$ — ортогональный проектор в пространстве $L_2(\Omega)$. Докажем, что

$$Ph(u) \neq 0 \quad \forall u \in S_n \cap L_{\omega(c)}. \quad (13)$$

Предположим противное, т.е. существует $u_0 \in S_n \cap L_{\omega(c)}$ такое, что $Ph(u_0) = 0$. Тогда $h(u_0) \in G_{\omega(c)} \subset G_{c_1}$, поскольку $c_1 < \omega(c)$. Тогда из (11) следует

$$F(h(u_0)) > m(c_1). \quad (14)$$

Поскольку $u_0 \in L_{\omega(c)} \cap S_n$, имеем $F(u_0) \leq c$. Таким образом, $F(h(u_0)) \leq \gamma(c) \leq m(c_1)$. Это противоречит (14). Следовательно, верно (13). Однако Ph — отображение сферы в пространстве $L_{\omega(c)}$ на подпространство меньшей размерности. Если функция g нечетна относительно u , то это противоречит теореме Борсук–Улама [14]. Если функция g не зависит от t , то это противоречит S^1 -теореме Борсук–Улама [14]. Существует критическая точка u_n функционала в $F|_{E_n}$ такая, что $F(u_n) \in [\gamma(c), c]$, т.е.

$$(Au_n, w) + \int_{\Omega} g(x, t, u_n) w \, dx \, dt = 0 \quad \forall w \in E_n; \quad (15)$$

$$\gamma(A) \leq \frac{1}{2} (Au_n, u_n) + \int_{\Omega} G(x, t, u_n) \, dx \, dt \leq c. \quad (16)$$

Умножим (15) на $1/2$ и примем

$$w = u_n : \frac{1}{2} (Au_n, u_n) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(x, t, u_n) u_n \, dx \, dt = 0.$$

Вычтем из полученного уравнения выражение (16) и запишем

$$-\gamma(c) \geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} g(x, t, u_n) u_n - G(x, t, u_n) \right) dx dt \geq -c.$$

Из (5), (6) выведем

$$\begin{aligned} \delta |u|^r - \left(\frac{A_4}{2} + A_2 \right) |u| - A_8 &\leq \frac{1}{2} u g(x, t, u_n) - \\ - G(x, t, u_n) &\leq \left(\frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{r} A_3 \right) |u|^r + \left(\frac{A_2}{2} + A_5 \right) |u| + A_8. \end{aligned}$$

Здесь $\delta = \frac{1}{2} A_3 - \frac{1}{r} A_1$. Следовательно, существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\|u_n\|_r \leq C_2; \tag{17}$$

$$\|u_n\|_r^r + C_2 \|u_n\|_r + C_2 \geq C_1 |c|.$$

Поскольку $\|u_n\|_r^r + 1 \geq \|u_n\|_r$, найдем

$$\|u_n\|_r^r \geq \frac{C_1 |c| - 2C_2}{C_2 + 1}. \tag{18}$$

2. *Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$.* Из (17) следует существование подпоследовательности, которую также обозначим $u_n, u_n \rightarrow u$ в пространстве $L_r(\Omega)$ слабо, $g(x, t, u_n) \rightarrow h$ в $L_q(\Omega)$ слабо. Здесь $q = (r - 1)/r$. Докажем, что u – решение (обобщенное).

Пусть $u_n = u_{1n} + u_{2n} + u_{3n}, u = u_1 + u_2 + u_3; u_k, u_{kn} \in N_k, k \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $u_{kn} \rightarrow u_k$ слабо в пространстве $L_2(\Omega), k \in \{1, 2, 3\}$. На пространстве N_2 оператор A ограничен. Следовательно, $Au_{2n} \rightarrow Au_2$ слабо в пространстве $L_2(\Omega)$. Действительно, для любого $\varphi \in L_2(\Omega)$ имеем $(Au_{2n}, \varphi) = (Au_{2n}, \varphi_2) = (u_{2n}, A\varphi_2) \rightarrow (u_2, A\varphi_2) = (Au_2, \varphi)$, где φ_2 – ортогональная проекция в пространстве $L_2(\Omega)$ функции φ на подпространство N_2 .

Пусть $a_{mk}^n, b_{mk}^n, a_{mk}^0, b_{mk}^0$ – коэффициенты Фурье u_n и u . Обозначим $J_R = \sum_{|\mu_{mk}| \geq R} |\mu_{mk}| ((a_{mk}^n)^2 + (b_{mk}^n)^2)$. Возьмем $R > 2c_1 + c_1^2$ и

$$w = \sum_{|\mu_{mk}| \geq R} \operatorname{sgn}(\mu_{mk}) \varphi_m(x) \left(a_{mk}^n \cos\left(\frac{a}{b} kt\right) + b_{mk}^n \sin\left(\frac{a}{b} kt\right) \right).$$

Подставим w в (15). Используя (12) и неравенство Гельдера, получим

$$J_R = - \int_{\Omega} g(x, t, u_n) w dx dt \leq \|g(x, t, u_n)\|_q \|w\|_r \leq C_3 C_1 \|w\|_{\beta} =$$

$$= C_3 C_1 \sqrt{\sum_{|\mu_{mk}| \geq R} \frac{|\mu_{mk}|}{|\mu_{mk}|^{1-\beta}} ((a_{mk}^n)^2 + (b_{mk}^n)^2)} \leq \frac{C_4}{R^{\frac{1-\beta}{2}}} \sqrt{J_R}.$$

Следовательно, $J_R \leq \frac{C_4^2}{R^{1-\beta}} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} ((a_{mk}^n)^2 + (b_{mk}^n)^2) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Au_{3n}, u_{3n}) = \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} \left((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2 \right). \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (15) при фиксированном $w \in E_{n_1}, n_1 \in N$:

$$(Au_2, w) + (u_3, Aw) + \int_{\Omega} h w dx dt = 0. \quad (19)$$

Докажем методом монотонности, что $h = g(x, t, u)$. Для любого элемента $v \in L_r(\Omega) \cap D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} (Av_2 - Au_{2n}, v_2 - u_{2n}) + \\ + \int_{\Omega} (g(x, t, v) - g(x, t, u_n)) (v - u_n) dx dt \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Примем в (15) $w = u_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Au_{2n}, u_{2n}) + \int_{\Omega} g(x, t, u_n) u_n dx dt \right] &= \\ &= - \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} \left((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставим в (19) $w = u_n$ и устремим $n \rightarrow \infty$: $(Au_2, u_2) + \int_{\Omega} h u dx dt = - \sum_{(m,k) \in M} \mu_{mk} \left((a_{mk}^0)^2 + (b_{mk}^0)^2 \right)$. Откуда из (21) получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(Au_{2n}, u_{2n}) + \int_{\Omega} g(x, t, u_n) u_n dx dt \right] &= \\ &= (Au_2, u_2) + \int_{\Omega} h u dx dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Перейдем в (20) к пределу при $n \rightarrow \infty$: $(Av_2 - Au_2, v_2 - u_2) +$

$$+ \int_{\Omega} (g(x, t, v) - h)(v - u) dx dt \geq 0. \text{ Возьмем } v = u + \tau\psi, \tau > 0,$$

$$\psi \in L_r \cap D(A): \tau(A\psi, \psi_2) + \int_{\Omega} (g(x, t, u + \tau\psi) - h)\psi dx dt \geq 0.$$

$$\text{Устремим } \tau \rightarrow 0: \int_{\Omega} (g(x, t, u) - h)\psi dx dt \geq 0 \quad \forall \psi \in L_r(\Omega) \cap D(A).$$

Следовательно, $h = g(x, t, u)$. Отсюда и (19) следует, что u является обобщенным решением. Оценка $\|u\|_r \geq d$ вытекает из (5), (18), (22). Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний неоднородной струны

$$p(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = g(x, t, u) + f(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R. \quad (23)$$

Предположим, что нелинейное слагаемое g удовлетворяет следующему условию: существуют $\alpha, \beta \in R, C \in (0, +\infty)$ такие, что

$$\alpha \leq \frac{g(x, t, u)}{p(x)u} \leq \beta \quad \forall u \in (-\infty, -C) \cup (C, +\infty), \quad \forall (x, t) \in \Omega. \quad (24)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $g \in C^1(\Omega \times R)$, T периодична по t , выполнены условия (4), (7) и существуют положительные константы M_1, M_2 такие, что $|g_t(x, t, u)| \leq M_1|u| + M_2 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times R$. Предположим, что либо $B < 0$ и выполнено условие (24), в котором $\alpha > B/\pi$, $[\alpha, \beta] \cap \sigma(A) = \emptyset$ и $-\gamma \leq \frac{g_u(x, t, u)}{p(x)} \leq M_3 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times R$, либо $B > 0$ и выполнено условие (24), где $\beta < B/\pi$, $[-\beta, -\alpha] \cap \sigma(A) = \emptyset$ и $-\gamma \leq -\frac{g_u(x, t, u)}{p(x)} \leq M_3 \quad \forall (x, t, u) \in \Omega \times R, M_3 > 0, \gamma \in (0, |B|/\pi)$. Тогда для любой функции $f(x, t) \in H_1(\Omega)$ задача (2), (3), (23) имеет обобщенное решение $u \in H_1^0(\Omega)$.

Доказательство существования решения опирается на теорему 3.1, приведенную в работе [10], доказательство гладкости решения дано в работе [15].

Замечание. Полученное в теореме 2 решение будет единственно, если дополнительно условиям этой теоремы потребовать при $B < 0$ выполнения условия

$$\alpha(u - v)^2 \leq \frac{1}{p(x)}(g(x, t, u) - g(x, t, v))(u - v) \leq \beta(u - v)^2 \quad \forall u, v \in R, \quad \forall (x, t) \in \Omega,$$

а при $B > 0$ — условия

$$\alpha(u - v)^2 \leq \frac{1}{p(x)}(g(x, t, v) - g(x, t, u))(u - v) \leq \\ \leq \beta(u - v)^2 \quad \forall u, v \in R, \forall (x, t) \in \Omega.$$

Заключение. Согласно теоремам 1, 2 и замечанию, в случае степенного роста по u нелинейного слагаемого волновое уравнение может иметь счетное число периодических решений, у которых L_r -норма стремится к бесконечности, а если нелинейное слагаемое имеет по u не более чем линейный рост, то волновое уравнение может иметь только одно периодическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barby V., Pavel N.H. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x -dependent coefficients // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1997. Vol. 349. No. 5. P. 2035–2048.
2. Rabinowitz P. Free vibration for a semilinear wave equation // *Comm. Pure Appl. Math.* 1978. Vol. 31. No. 1. P. 31–68.
3. Bahri A., Brezis H. Periodic solutions of a nonlinear wave equation // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* 1980. Vol. 85. P. 310–320.
4. Brezis H., Nirenberg L. Forced vibration for a nonlinear wave equations // *Comm. Pure Appl. Math.* 1978. Vol. 31. No. 1. P. 1–30.
5. Плотников П.И. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // *Матем. Сб.* 1988. Т. 136 (178). № 4 (8). С. 546–560.
6. Feireisl E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // *Czechosl. Math. J.* 1988. Vol. 38. No. 1. P. 78–87.
7. Рудаков И.А. Нелинейные колебания струны // *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., Мех.* 1984. № 2. С. 9–13.
8. Рудаков И.А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами // *Матем. заметки.* 2004. Т. 76. Вып. 3. С. 427–438.
9. Shuguan J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x -dependent coefficients // *Calc. Var.* 2008. Vol. 32. P. 137–153.
10. Рудаков И.А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами // *Матем. Сб.* 2007. Т. 198. № 4 (8). С. 546–560.
11. Кондратьев В.А., Рудаков И.А. О периодических решениях квазилинейного волнового уравнения // *Матем. заметки.* 2009. Т. 85. Вып. 1. С. 36–53.
12. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2003. 351 с.
13. Рудаков И.А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // *Известия РАН. Сер. Матем.* 2006. № 1. С. 1–10.
14. Feirisl E. On the existence of the multiplicity periodic solutions of rectangle thin plate // *Czechosl. Math. J.* 1998. Vol. 37. No. 2. P. 334–341.
15. Рудаков И.А. О периодических по времени решениях квазилинейного волнового уравнения // *Тр. МИАН.* 2010. Т. 270. С. 226–232.

REFERENCES

- [1] Barby V., Pavel N.H. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x -dependent coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1997, vol. 349, no. 5, pp. 2035–2048.

- [2] Rabinowitz P. Free vibration for a semilinear wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1978, vol. 31, no. 1, pp. 31–68.
- [3] Bahri A., Brezis H. Periodic solutions of a nonlinear wave equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1980, vol. 85, pp. 310–320.
- [4] Brezis H., Nirenberg L. Forced vibration for a nonlinear wave equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1978, vol. 31, no. 1, pp. 1–30.
- [5] Plotnikov P.I. Existence of a Countable Set of Periodic Solutions of the Forced Vibration Problem for a Weakly Nonlinear Wave Equation. *Mat. Sb.* [Sbornik: Mathematics], 1988, vol. 136 (178), no. 4 (8), pp. 546–560 (in Russ.).
- [6] Feireisl E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term. *Czechosl. Math. J.*, 1988, vol. 38, no. 1, pp. 78–87.
- [7] Rudakov I.A. Nonlinear Vibrations of a String. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. I: Mat., Mekh.* [Moscow Univ. Math., Mech. Bull.], 1984, no. 2, pp. 9–13 (in Russ.).
- [8] Rudakov I.A. Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equation with Non-Regular Coefficients. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2004, vol. 76, iss. 3, pp. 427–438 (in Russ.).
- [9] Shuguan J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x -dependent coefficients. *Calc. Var.*, 2008, vol. 32, pp. 137–153.
- [10] Rudakov I.A. Periodic Solutions of a Quasilinear Wave Equation with Variable Coefficients. *Mat. Sb.* [Sbornik: Mathematics], 2007, vol. 198, no. 4 (8), pp. 546–560 (in Russ.).
- [11] Kondrat'ev V.A., Rudakov I.A. Periodic Solutions of a Quasilinear Wave Equation. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2009, vol. 85, iss. 1, pp. 36–53 (in Russ.).
- [12] Triкоми F. Дифференциальные уравнения [Differential Equations]. Moscow, URSS Publ., 2003. 351 p.
- [13] Rudakov I.A. Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equation with Homogeneous Boundary Conditions. *Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci.: Math.], 2006, no. 1, pp. 1–10 (in Russ.).
- [14] Feirisl E. On the existence of the multiplicity periodic solutions of rectangle thin plate. *Czechosl. Math. J.*, 1998, vol. 37, no. 2, pp. 334–341.
- [15] Rudakov I.A. On the Time-Periodic Solutions of Quasi-Linear Wave Equation. *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Institute], 2010, vol. 270, pp. 226–232 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 12.02.2015

Рудаков Игорь Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прикладной математики. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Rudakov I.A. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematics, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, author specializes in the field of applied mathematics. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Рудаков И.А. Периодические колебания неоднородной струны с закрепленными концами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 3–14.

Please cite this article in English as:

Rudakov I.A. Periodic oscillations of an unhomogeneous string with fixed ends. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 4, pp. 3–14.