УДК 524.852

МОДЕЛИ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ В КОНТЕКСТЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

И.В. Фомин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: ingvor@inbox.ru

Рассмотрено построение моделей с нетривиальной кинетической частью в контексте точных решений уравнений динамики скалярного поля в рамках оценки тензорно-скалярного отношения. Найдено различие инфляционных параметров для стандартной инфляции медленного скатывания и для инфляционных моделей, основанных на точных решениях уравнений эволюции скалярного поля.

***Ключевые слова*:** инфляция, скалярное поле, точные решения.

MODELS WITH NON-TRIVIAL KINETIC PART WITHIN EXACT SOLUTIONS TO EQUATIONS FOR DYNAMICS OF SCALAR FIELD

I.V. Fomin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: ingvor@inbox.ru

The paper considers the construction of models with a nontrival kinetic part within the exact solutions to the scalar field equations of motion while estimating the tensor-to-scalar ratio. The difference between the standard inflationary parameters of the slow rolling and the inflationary models based on the exact solutions of the scalar field equations of motion was found.

***Keywords*:** inflation, scalar field, exact solutions.

Введение. В стандартных инфляционных моделях медленного скатывания тензорно-скалярное отношение имеет, как правило, небольшое значение. Это обусловлено спецификой построения таких моделей [1–4]. В работах [5, 6] указана неправомерность ограничения формы потенциала скалярного поля и проведены оценки тензорно-скалярного отношения. Это приводит к необходимости построения инфляционных моделей с большим значением вклада гравитационных волн в анизотропию реликтового излучения.

В моделях с нетривиальной кинетической частью тензорно-скалярное отношение может иметь большое значение за счет высокой скорости распространения гравитационных возмущений.

Динамика скалярного поля. Рассмотрим безмассовое скалярное поле, которое определяет плотность энергии во Вселенной на инфляционной стадии. Действие запишем следующим образом:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}L=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)\right]. \qquad (1)$$

Из уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\partial^\mu \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta\partial^\mu\phi} - \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta\phi} = 0$$

получим уравнение $\Box\phi + V'(\phi) = 0$, где $V'(\phi) = dV(\phi)/d\phi$. Учитывая кривизну пространства–времени, запишем оператор д'Аламбера в виде

$$\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\right).$$

Окончательное уравнение, определяющее динамику инфляционного поля, будет иметь вид [1]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + V'(\phi) = 0, \tag{2}$$

где $H = \dot{a}/a$ — параметр Хаббла; a — масштабный фактор.

Поскольку скалярное поле в силу равенства нулю недиагональных компонент тензора Эйнштейна зависит только от времени, можно отбросить третий член уравнения (2)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) и уравнение Эйнштейна

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right]$$

определяют эволюцию скалярного поля.

Плотность энергии и плотность давления. Варьируя действие (1) по метрике $g^{\mu\nu}$, получаем выражение для тензора энергии–импульса $T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}L$. Сравнивая с релятивистским тензором энергии–импульса идеальной жидкости $T_{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p$ запишем уравнения для плотности энергии ρ_ϕ и плотности давления p_ϕ:

$$T_0^0 = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2};$$

$$T_i^i = p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2}.$$

Из уравнений Эйнштейна следует, что инфляционное поле пространственно однородно, поэтому отбрасываем пространственные производные [1]. Если $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, то получаем условие $\rho_\phi \simeq -p_\phi$, что является условием инфляционной стадии. Инфляция управляется вакуумной энергией инфляционного поля и, таким образом, получается деситтеровское расширение.

Приближение медленного скатывания. Такое приближение определяет часть потенциала, где происходит инфляция. Необходимо выполнение двух условий [1].

1. Потенциальная энергия поля больше кинетической $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$.

2. Ограничение на вторую производную скалярного поля $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$.

В таком случае космологические уравнения динамики поля и расширения Вселенной будут иметь вид

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_P}; \tag{4}$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'_\phi(\phi). \tag{5}$$

Определим параметры медленного скатывания.

Разделим уравнение (5) на $3H$ и возьмем производную по времени. В результате получим $\ddot{\phi} = -\dfrac{V''}{3H}\dot{\phi} + \dfrac{V'}{3H^2}\dot{H}$. После деления обеих частей на $3H\dot{\phi}$ имеем

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = -\frac{1}{3}\left(M_P^2\frac{V''}{V} - \frac{\dot{H}}{H^2}\right).$$

Следует отметить, что было использовано приближенное уравнение (4).

Теперь можно записать параметры медленного скатывания

$$\varepsilon(\phi) \cong -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{M_P^2}{2}\left(\frac{V'_\phi}{V}\right),$$

где V'_ϕ — производная потенциала $V(\phi)$ по полю ϕ, $\eta(\phi) = M_P^2\dfrac{V''}{V}$.

Параметр ε показывает, насколько параметр H изменился со времени инфляции. Таким образом, $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2 = (1-\varepsilon)H^2$, инфляция может быть достигнута только при $\varepsilon < 1$. В общем случае режим медленного скатывания может быть достигнут, если $\varepsilon \ll 1$ и $\eta \ll 1$. Однако эти условия только ограничивают форму потенциала [5].

Модели с нетривиальной кинетической частью. Запишем действие, описывающее скалярное поле, которое взаимодействует с гравитационным следующим образом [7]:

$$S = S_g + S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{R}{16\pi} + p(\phi, X)\right),$$

где R — скаляр Риччи; $p(\phi, X)$ — функция скалярного поля ϕ; $X = \dfrac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$.

В случае обычного скалярного поля зависимость величины X от величины p тривиальна: $p = X + V(\phi)$, в то время как k-инфляция основана на нетривиальной зависимости p от X. В случае однородного скалярного поля $X = (1/2)\,\dot{\phi}$ и закон сохранения энергии записывается в виде $\dot{\varepsilon} = -3H(\varepsilon + p)$, в результате получаем уравнения для скалярного поля $\ddot{\phi} + 3p_{,X} H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0$. Скорость распространения возмущений можно определить как

$$c_S^2 = \frac{p_{,X}}{\varepsilon_{,X}} = \left[1 + 2X\frac{p_{,XX}}{p_{,X}}\right].$$

Обобщение инфляционных моделей медленного скатывания. Из уравнения (3) следует, что инфляция может происходить, если условие $X_{,p} \ll p$ соблюдется достаточно долгое время. Это может быть достигнуто двумя путями. Первый путь: рассматривая скалярное поле с $p = X - V(\phi)$, можно выбрать плоский потенциал $V(\phi)$, такой, что $X \ll V$ более чем для 75 e-фолдов. Число e-фолдов определяется как $N = \int\limits_{t_{in}}^{t_{end}} H dt$, где t_{in} и t_{end} — время начала и завершения космологической инфляции [1]. Это стандартная инфляция медленного скатывания, и в этом случае $c_S = 1$.

Второй путь представляет k-инфляция, где p — функция X, такая, что $p_{,X}$ мало. Здесь инфляция полностью основана на кинетической части и может происходить даже если поле эволюционирует очень быстро (X велико). Для k-инфляции $c_S^2 \ll 1$.

Рассмотрим эволюцию скалярного поля в режиме медленного скатывания с плоским потенциалом, но нетривиальной кинетической частью. В таких моделях допускается $c_S^2 > 1$ в течение инфляции и, таким образом, тензорно-скалярное отношение увеличивается [7, 8].

Запишем лагранжиан следующего вида: $p = K(X) + V(\phi)$. В этом случае $\varepsilon = 2XK_{,X} - K - V$, и уравнение для скалярного поля приводится к виду $\ddot{\phi} + 3p_{,X} H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0$. Условия медленного скатывания $XK_{,X} \ll V$, $K \ll V$, $|\ddot{\phi}| \ll \dfrac{V_{,\phi}}{\varepsilon_{,X}}$ сохраняются по крайней мере для 75 e-фолдов, так что для потенциала $V(\phi)$ происходит обычный режим медленного скатывания. Например, $K(X) = \alpha X^{\beta}$. Получаем $c_S^2 = 1/(2\beta - 1)$. Следовательно, рассмотрев нетривиальную кинетическую часть $K(X)$, можно получить произвольную скорость c_S, которая становится свободным параметром теории.

Тензорно-скалярное отношение можем записать в виде [7, 8]

$$\frac{T}{S} = 27\left(c_S\left(1 + \frac{p}{\varepsilon}\right)\right)_{k=aH}. \qquad (6)$$

Здесь все величины вычисляются в тот момент, когда возмущения с волновым числом k пересекают радиус Хаббла $k = aH$. Амплитуда скалярных возмущений является свободным параметром теории и может быть взята из наблюдений. Следовательно, в моделях, в которых $c_S > 1$, масштабы энергий должны быть выше, чем в инфляции медленного скатывания.

Тензорно-скалярное отношение можно оценить на основе параметров инфляции. Существует различие точных решений и решений, полученных из приближения медленного скатывания. Это различие можно определить путем сравнения параметра медленного скатывания ε и инфляционного параметра для точных решений γ.

Различие параметров ε и γ. Определим различие параметров медленного скатывания ε и инфляционного параметра γ, который является аналогом параметра ε для точных решений.

Запишем параметр медленного скатывания $\varepsilon = \dfrac{M_P^2}{2}\left(\dfrac{V'_\phi}{V}\right)$. В таком случае параметр γ будет определяться как $\gamma = \dfrac{M_P^2}{2}\left(\dfrac{W'_\phi}{W}\right)$, где $W = (1/2)\,\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ — потенциал полной энергии [5].

Вычислим их отношение

$$\left[\frac{\gamma(t)}{\varepsilon(t)}\right]^{1/2} = \frac{W'_\phi}{W}\frac{V}{V'_\phi} = \left(\frac{W'_\phi}{W}\right)\frac{W-(1/2)\dot{\phi}^2}{W'_\phi-(1/2)(\dot{\phi}^2)'_\phi}. \tag{7}$$

Исходя из уравнений эволюции скалярного поля [6], отношение (7) можно переписать в виде

$$\left[\frac{\gamma(t)}{\varepsilon(t)}\right]^{1/2} = \left[1+\frac{1}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}\right]\left[1+\frac{\ddot{H}}{H\dot{H}}\right]^{-1}. \tag{8}$$

Рассматривая $\gamma = -\dot{H}/H^2$, получаем

$$\frac{1}{3-\gamma(t)}\left[\frac{\gamma(t)}{\varepsilon(t)}\right]^{1/2} = \frac{1}{3}\left[1+\frac{\ddot{H}}{H\dot{H}}\right]^{-1}.$$

Обозначим $f(t) = \dfrac{1}{3}\left[1+\dfrac{\ddot{H}}{H\dot{H}}\right]^{-1}$ и в результате запишем выражение для параметра медленного скатывания ε через параметр инфляции γ:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{f^2(t)(3-\gamma)^2}. \tag{9}$$

Можно также найти параметр γ из параметра медленного скатывания ε:

$$\gamma = 1+\frac{1-\sqrt{1+4f^2(t)\varepsilon}}{2\varepsilon}. \tag{10}$$

Уравнения (8)–(10) позволяют найти взаимосвязь между параметром медленного скатывания ε и инфляционным параметром γ.

Следовательно, можно перейти от оценок тензорно-скалярного отношения, основанных на приближении медленного скатывания, к точному значению и определить различие.

Построение модели. Рассмотрим лагранжиан $p(\phi, X) = \frac{1}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha X}\right] - V(\phi)$, где α — константа.

Вычислим $p_{,X} = \alpha e^{\alpha X}, p_{,XX} = -\alpha^2 e^{\alpha X}$. Таким образом, скорость распространения космологических возмущений составит

$$c_S^2 = \left[1 + 2X\frac{p_{,XX}}{p_{,X}}\right]^{-1} = \frac{1}{1 - 2\alpha X}. \tag{11}$$

Согласно (11), в предельном случае $X \to 0$ скорость распространения возмущений c_S равна скорости света.

Запишем систему уравнений эволюции скалярного поля

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0; \tag{12}$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right]. \tag{13}$$

Из системы уравнений (12), (13) получим $(1/2)\dot{\phi}^2 = -2M_P^2\dot{H}$. Отсюда с учетом $H = \dot{a}/a$ из уравнения (11) находим

$$c_S^2 = \frac{a^2}{2\alpha M_P^2(\ddot{a}a - \dot{a}^2) + a^2}.$$

Таким образом, исходя из вида масштабного фактора, можно определить скорость распространения космологических возмущений.

Проведем расчет скорости распространения космологических возмущений для экспоненциальной инфляции и деситтеровских решений.

В случае экспоненциальной инфляции

$$a(t) = a_0 t^n; \quad c_S^2 = \frac{1}{1 - \frac{4\alpha M_P^2 n}{t^2}}.$$

Для деситтеровского решения

$$a(t) = a_0 \cosh(\lambda t); \; c_S^2 = \frac{\cosh(\lambda t)^2}{4\alpha M_P^2\lambda^2 + \cosh(\lambda t)^2}.$$

Согласно (6), скорость распространения космологических возмущений связана с отношением амплитуд тензорных и скалярных возмущений $T/S = 4\gamma$ на пересечении радиуса Хаббла

$$\gamma = \frac{27}{4}\left(c_S\left(1 + \frac{p}{\varepsilon}\right)\right)_{k=aH}.$$

Следовательно, значение c_S^2 на пересечении возмущениями радиуса Хаббла позволяет оценить различие параметров медленного скатывания ε и инфляционного параметра γ, что дает возможность корректно сопоставить космологические модели с наблюдательными данными.

Заключение. В работе было проведено исследование моделей с нетривиальной кинетической частью в контексте сравнения точных и приближенных решений уравнений эволюции скалярного поля. Найдена связь между значением скорости космологических возмущений и видом масштабного фактора.

В теориях с нетривиальной кинетической частью вклад гравитационных волн в анизотропию реликтового излучения может быть существенно больше, чем в простых инфляционных моделях. Увеличение тензорно-скалярного отношения приводит к большей B-компоненте поляризации реликтового излучения, т.е. лучшей возможности обнаружения гравитационных волн. Другим важным следствием таких моделей является более высокие энергии инфляции и, таким образом, более высокая температура перенагрева, чем в случае простой инфляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liddle A.R.*, *Lyth D.H.* The cold dark matter density perturbation // Phys. Rep. 1993. Vol. 231. Iss. 1–2. P. 1–105. DOI: 10.1016/0370-1573(93) 90114-S
2. *Lyth D.H.* What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy? // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. Iss. 10. P. 1861–1863. URL: https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.78.1861
3. *Wilkinson* Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Observations: Implications for Cosmology / D.N. Spergel, R. Bean, O. Dorre, M.R. Nolta, C.L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H.V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R.S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S.S. Meyer, N. Odegard , G.S. Tucker, J.L. Weiland, E. Wollack, E.L. Wright (WMAP collaboration) // ApJ. 2007. URL: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0603449.pdf.
4. *Planck* 2013 results. I. Overview of products and scientific results // Astronomy & Astrophysics manuscript. No. Planck Mission / P.A.R. Ade, N. Aghanim, M.I.R. Alves, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela et al. (Planck Collaboration), 2013. URL: http://arxiv.org/pdf/1303.5062v2.pdf (дата обращения: 10.09.2014). DOI: 10.1051/0004-6361/201321529
5. *Chervon S.V.*, *Novello M.*, *Triay R.* Exact Cosmology and Specification of an Inflationary Scenario // Gravitation & Cosmology. 2005. Vol. 11. No. 4 (44). P. 329–332.
6. *Chervon S.V.*, *Fomin I.V.* On the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation // Gravitation & Cosmology. 2007. Vol. 13. No. 2 (50). P. 163–167. DOI: 10.1134/S0202289308020060
7. *Mukhanov V.*, *Vikman A.* Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation // JCAP 0602:004. 2006. 9 p. URL: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0512066v2.pdf (дата обращения: 10.09.2014).
8. *Vikman A.* Inflation with large gravitational waves // astro-ph/0606033. 2006. URL: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0606033.pdf (дата обращения: 10.09.2014).

REFERENCES

[1] Liddle A.R., Lyth D.H. The cold dark matter density perturbation. *Phys. Rep.*, 1993, vol. 231, iss. 1–2, pp. 1–105. DOI: 10.1016/0370-1573 (93) 90114-S

[2] Lyth D.H. What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy? *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, iss. 10, pp. 1861–1863. URL: https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.78.1861

[3] Spergel D.N., Bean R., Dorre O., Nolta M.R., Bennett C.L., Dunkley J., Hinshaw G., Jarosik N., Komatsu E., Page L., Peiris H.V., Verde L., Halpern M., Hill R.S., Kogut A., Limon M., Meyer S.S., Odegard N., Tucker G.S., Weiland J.L., Wollack E., Wright E.L. (WMAP collaboration). Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Observations: Implications for Cosmology. *ApJ.*, 2007. URL: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0603449.pdf

[4] Ade P.A.R., Aghanim N., Alves M.I.R., Armitage-Caplan C., Arnaud M., Ashdown M., Atrio-Barandela F. et al. (Planck Collaboration). Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics manuscript*, no. Planck Mission, 2013. URL: http://arxiv.org/pdf/1303.5062v2.pdf (accessed 10.09.2014). DOI: 10.1051/0004-6361/201321529

[5] Chervon S.V., Novello M., Triay R. Exact Cosmology and Specification of an Inflationary Scenario. *Gravitation & Cosmology*, 2005, vol. 11, no. 4 (44), pp. 329–332.

[6] Chervon S.V., Fomin I.V. On the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation. *Gravitation & Cosmology*, 2007, vol. 13, no. 2 (50), pp. 163–167. DOI: 10.1134/S0202289308020060

[7] Mukhanov V., Vikman A. Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation. *JCAP* 2006, 0602:004. 9 p. URL: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0512066v2.pdf (accessed 10.09.2014).

[8] Vikman A. Inflation with large gravitational waves. *astro-ph*/0606033. 2006. URL: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0606033.pdf (accessed 10.09.2014).

Статья поступила в редакцию 29.12.2014

Фомин Игорь Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области космологии, теории космологической инфляции.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Fomin I.V. — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of Physics and Mathematics, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University, author of over 20 research publications in the fields of cosmology and theory of cosmological inflation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Фомин И.В. Модели с нетривиальной кинетической частью в контексте точных решений уравнений динамики скалярного поля // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 37–44.

Please cite this article in English as:

Fomin I.V. Models with non-trivial kinetic part within exact solutions to equations for dynamics of scalar field. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 4, pp. 37–44.