УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Ю.И. Димитриенко, **Е.А. Губарева**, **Ю.В. Юрин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com; gubareva_ea@pochta.ru; yvyurin@yandex.ru

На основе общего вариационного принципа Лагранжа для трехмерных уравнений теории упругости с помощью теории асимптотических разложений по малому параметру, представляющему собой отношение толщины к характерной длине пластины, без введения гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, выведено вариационное уравнение типа Лагранжа для тонких многослойных пластин. Показано, что вариационное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений теории пластин Кирхгофа – Лява. Разработанная асимптотическая теория пластин дает математически строгое (в асимптотическом смысле) обоснование классической теории пластин Кирхгофа – Лява, но в отличие от классической модели пластин Кирхгофа – Лява разработанная асимптотическая теория позволяет найти распределения всех шести компонент тензора напряжений. Выведены вариационные принципы типа Хеллингера – Рейсснера и Германна для асимптотической теории пластин.

Ключевые слова: многослойные тонкие пластины, асимптотическая теория пластин, метод асимптотического осреднения, асимптотические разложения, вариационный принцип Лагранжа, принцип Хеллингера – Рейсснера, принцип Германна.

VARIATIONAL EQUATIONS OF ASYMPTOTIC THEORY FOR MULTILAYER THIN PLATES

Yu.I. Dimitrienko, **E.A. Gubareva**, **Yu.V. Yurin**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com; gubareva_ea@pochta.ru; yvyurin@yandex.ru

The article presents a derivation of the Lagrange type variational equation for thin multilayer plates based on the variational Lagrange principle for the three-dimensional equations of the elasticity theory with the help of the theory of the asymptotic small-parameter expansions. The parameter was the ratio of a thickness and a typical length of the plate without introducing any hypotheses about the nature of the distribution of both stresses and displacements in thickness. It is shown that the variational equation is equivalent to the differential equation system of the Kirchhoff – Love plate theory. The developed asymptotic plate theory provides a mathematically rigorous (in the asymptotic sense) justification of the classical Kirchhoff – Love plate theory, but unlike the Kirchhoff – Love plate model, the developed asymptotic theory allows finding the distribution of all six components of the stress tensor. Variational principles of Hellinger – Reissner and Hermann types were derived for the asymptotic theory of thin plates.

Keywords: multilayer thin plates, asymptotic plate theory, asymptotic averaging method, asymptotic expansions, Lagrange variational principle, Hellinger – Reissner principle, Hermann principle.

Введение. В настоящее время расчет инженерных тонкостенных конструкций, несмотря на появление мощных вычислительных средств, позволяющих решать сложные задачи теории упругости в трехмерной постановке, осуществляется все же, в основном, с помощью методов двумерных теорий пластин и оболочек. Это связано с тем, что указанными методами удается значительно снизить требования к характеристикам вычислительной техники, главным образом, к оперативной памяти ЭВМ. Поэтому интерес к модификации классических теорий пластин и оболочек, в целях повышения точности расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел, приблизив их к расчетам по трехмерной теории упругости, продолжает оставаться весьма большим [1–3]. Принципиально новый подход к теории тонких пластин, основанный на асимптотическом анализе трехмерных уравнений теории упругости, без принятия каких-либо гипотез относительно характера перемещений, деформаций и напряжений по толщине пластин был предложен в работах [4–19]. В результате применения этот подхода в работах [10, 13] были разработаны асимптотические теории упругих, термоупругих [11], нелинейно-упругих [18], вязкоупругих [14–17] многослойных и композитных пластин, а также двояко-периодических тонких пластин (гофрированных, сотовых, сетчатых конструкций) [12]. Сравнение результатов расчета напряженно-деформированного состояния пластин при изгибе с использованием трехмерной теории упругости и разработанной асимптотической теории пластин проведено в работах [11, 19]. Сравнение показало следующее: асимптотическая теория обеспечивает очень высокую точность расчетов, которую трехмерная теория упругости может дать только при использовании очень мелких конечно-элементных сеток, что при практических приложениях представляет собой значительную проблему. Цель настоящей статьи — вывод вариационных уравнений асимптотической теории пластин, основанных, как и сама теория, на строгом асимптотическом анализе вариационных уравнений трехмерной теории упругости. Эти вариационные уравнения являются теоретической основой для разработки метода конечного элемента для решения задач асимптотической теории пластин. Кроме того, еще одна цель работы — точное математическое обоснование классической теории пластин Кирхгофа – Лява.

Основные допущения асимптотической теории пластин. Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, введем малый параметр $\kappa = h/L \ll 1$ как отношение общей толщины пластины h

к характерному размеру всей пластины L (ее максимальной длине). Введем глобальные (x_k) и локальную (ξ) координаты

$$x_k = \tilde{x}_k/L; \quad \xi = x_3/\kappa, \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\tilde{x}_k$ — обычные декартовы координаты, ориентированные так, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1$ и $O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной поверхности пластины. Предположим, что существует два масштаба изменения перемещений u_k пластины: один по направлениям осей $O\tilde{x}_1$ и $O\tilde{x}_2$, а второй по направлению оси $O\tilde{x}_3$. Координаты x_3 и ξ в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные. Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне значений $-0{,}5 < \xi_3 < 0{,}5$.

Рассмотрим для пластины трехмерную задачу линейной теории упругости [20]

$$\begin{aligned}
&\nabla_j \sigma_{ij} = 0;\\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right);\\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl};\\
&\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3} = -\tilde{p}_{\pm}\delta_{i3}, \quad \Sigma_T: u_i = u_{ei}, \quad \Sigma_T^{\sigma}: \sigma_{ij}n_j = \tilde{S}_{ei};\\
&\Sigma_S: \ [\sigma_{i3}] = 0, \quad [u_3] = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешних поверхностях пластины оболочки — на внешней и внутренней поверхности $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности $\Sigma_T^u \cup \Sigma_T^{\sigma} = \Sigma_T$, а также граничных условий на поверхности контакта Σ_S слоев пластины ($[u_i]$ — скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины.

В уравнениях (2) использованы следующие обозначения: σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; u_j — компоненты вектора перемещений; $\nabla_j = \partial/\partial\tilde{x}_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам; $C_{ijkl}(\xi)$ — компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от координаты $\xi_3 = \xi$, так как тензор различен для разных слоев пластины; $\tilde{S}_{ei}$ — заданный вектор напряжений на торцевой поверхности пластины. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т.е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [21].

Примем основные допущения:

1) давление $\tilde{p}_{\pm}$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$:

$$\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}, \quad p_{\pm} = O(1)E_0, \tag{3}$$

где E_0 — характерное значение модуля упругости материала пластины (размерная величина); $O(1)$ — безразмерная величина порядка 1;

2) сдвиговые напряжения $\sigma_{3j}n_j = \tilde{S}_{e3}$ на части торцевой поверхности пластины Σ_T^{σ} имеют порядок малости $O(\kappa)$, а остальные — порядок $O(1)$:

$$\Sigma_T^{\sigma}: \quad \tilde{S}_{e3} = \kappa S_{e3}, \quad \tilde{S}_{eI} = S_{eI}. \tag{4}$$

Как правило, допущения (3) и (4) соответствуют реальным условиям нагружения тонких пластин.

Асимптотические разложения. Задача (2) содержит локальную координату ξ, а также малый параметр κ в граничных условиях (это коэффициент при давлении). В связи с этим ее решение ищем в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат [10, 11]:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \ldots; \tag{5}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots; \tag{6}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{(2)} + \ldots \tag{7}$$

Здесь и далее индексы, обозначенные прописными буквами I, J, K, L, принимают значения 1, 2, а индексы, обозначенные строчными буквами $i, j, k, l,$ — значения 1, 2, 3.

Будем использовать обозначения для производных по локальной координате $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial\xi$ и по глобальным координатам $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial x_j$, также введем операцию осреднения по толщине пластины

$$< u_i^{(1)} >= \int\limits_{-0{,}5}^{0{,}5} u_i^{(3)} d\xi. \tag{8}$$

Перемещения в пластине. Подставляя асимптотические разложения (5)–(7) в систему уравнений (2) и собирая в ней члены при одинаковых степенях от параметра κ, получаем рекуррентную последовательность специальных локальных задач теории упругости нулевого, первого, второго и третьего и т.д. приближений для нахождения всех членов асимптотических разложений (5)–(7). Подробности этого метода изложены в работах [10, 11]. Для перемещений все члены разложения выше нулевого приближения, т.е. $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)} \ldots$ — линейные функции нулевого приближения $u_k^{(0)}$ и его производных $u_{k/I}^{(0)}$, $u_{k/IK}^{(0)}$ и т.д. После подстановки выражений для функций $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)} \ldots$ в асимптотическое разложение (5), после выбора только главных членов ряда (более высокие асимптотики отбрасываем) получаем, что перемещения в пластине с точностью до членов второго порядка малости имеют вид

$$
\begin{aligned}
u_I &= u_I^{(0)} - \kappa\xi u_{3,I}^{(0)} + 2\kappa\varepsilon_{KL}^{(0)} U_{IKL}(\xi);\\
u_3 &= u_3^{(0)} + \kappa\varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL}(\xi),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где обозначены деформации срединной поверхности пластины в нулевом приближении

$$
\varepsilon_{KL}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{K,L}^{(0)} + u_{L,K}^{(0)}),
\tag{10}
$$

а также функции, относящиеся к известным величинам

$$
U_{iKL}(\xi) =< \int\limits_{-0,5}^{\xi} C_{i3j3}^{-1} C_{j3KL} d\xi > - \int\limits_{-0,5}^{\xi} C_{i3j3}^{-1} C_{j3KL} d\xi.
\tag{11}
$$

Осредняя выражения (9) по толщине с учетом (8) и (11), определяем $< u_I >= u_I^{(0)}$, $< u_3 >= u_3^{(0)}$, т.е. перемещения нулевого приближения $u_k^{(0)}$ являются средними по толщине перемещениями пластины и могут не совпадать с перемещениями срединной поверхности пластины $u_k\Big|_{\xi=0}$, относительно которых, как правило, в теории пластин и формулируются кинематические допущения в приближенных теориях пластин. Для однослойных пластин перемещения $u_k\Big|_{\xi=0}$ и $< u_I >= u_I^{(0)}$ совпадают.

В инженерной практике чаще всего применяют ортотропные или моноклинные материалы [22], содержащие не более чем 13 независимых упругих модулей C_{ijkl}. Тканевые композиты, слоисто-волокнистые композиты с различными углами ориентации волокон — все они принадлежат к моноклинному классу анизотропии. В инженерной практике немоноклинные материалы встречаются крайне редко, это в основном кристаллические материалы, применяемые в электротехнике.

Для моноклинных материалов матрица модулей упругости имеет следующий вид [22]:

$$
(C_{ijkl})=\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{1112}\\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{2212}\\ & & C_{3333} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{3312}\\ & & & 2C_{2323} & \sqrt{2}C_{2313} & 0\\ & \text{симметрия} & & & 2C_{1313} & 0\\ & & & & & 2C_{1212} \end{pmatrix}. \qquad (12)
$$

Для моноклинных материалов ненулевыми являются только 13 констант, указанных в выражении (12), поэтому для них тензор $Z_{IKL} = C^{-1}_{I3j3}C_{j3KL}$ имеет только нулевые компоненты и, следовательно, компоненты тензора третьего ранга $U_{IKL}(\xi)$ все нулевые. Ненулевой является матрица $U_{3KL}(\xi)$:

$$
U_{IKL}(\xi) = 0, \quad U_{3KL}(\xi) =< \int\limits_{-0,5}^{\xi} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} d\xi > - \int\limits_{-0,5}^{\xi} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}} d\xi. \qquad (13)
$$

Подставляя (13) в (9), получаем, что для моноклинных материалов продольные перемещения u_I линейно зависят от поперечной координаты ξ, как и в классических теориях Тимошенко и Кирхгофа – Лява [23–25]:

$$
u_I = u_I^{(0)} - \kappa\xi u_{3,I}^{(0)}. \qquad (14)
$$

Однако этот факт не является допущением, как это обычно принято в классических теориях пластин, а представляет собой итог асимптотических разложений уравнений общей трехмерной теории упругости, т.е. строгим математически доказательным результатом. Для немоноклинных материалов линейного закона распределения продольных перемещений уже может не быть.

В отличие от классических теорий Тимошенко и Кирхгофа – Лява поперечное перемещение u_3 пластины, в соответствии с формулой (9), зависит от поперечной координаты ξ.

Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин. Для вычисления перемещений нулевого приближения $u_k^{(0)}$ согласно разработанному методу [10, 11] получаем осредненные уравнения равновесия тонких пластин

$$
T_{IJ,J} = 0, \quad Q_{J,J} = \Delta\bar{p}, \quad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \qquad (15)
$$

которые по форме совпадают с традиционными уравнениями теории тонких пластин, где T_{IJ} — усилия; M_{IJ} — моменты; Q_I — перерезывающие силы; $\Delta\bar{p} = \kappa^2\Delta p$, $\Delta p = p_+ - p_-$.

В разработанной теории усилия T_{IJ}, моменты M_{IJ} и перерезывающие силы Q_I в пластине вводятся с помощью следующих осредненных соотношений:

$$
\begin{aligned}
&T_{IJ} =< \sigma_{IJ} >=< \sigma_{IJ}^{(0)} > +\kappa < \sigma_{IJ}^{(1)} > + \ldots;\\
&M_{IJ} = \kappa < \xi\sigma_{IJ} >= \kappa < \xi\sigma_{IJ}^{(0)} > +\kappa^2 < \xi\sigma_{IJ}^{(1)} > + \ldots;\\
&Q_I = \kappa < \sigma_{I3} >= \kappa < \sigma_{I3}^{(1)} > +\kappa^2 < \sigma_{I3}^{(2)} > + \ldots
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Подставляя выражения (6), (7) для деформаций и напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$, а также определяющие соотношения системы (2) в интегралы формул (16) и удерживая в них только первые два приближения, находим осредненные определяющие соотношения теории пластин:

$$
\begin{aligned}
&T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL}\eta_{KL} + K_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(0)};\\
&M_{IJ} = B_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL}\eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(0)};\\
&Q_I = K_{IJKL}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2 < \sigma_{I3}^{(2)} > .
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Здесь $\bar{C}_{IJKL} =< C_{IJKL}^{(0)} >=< C_{IJKL} > - < C_{IJk3}C_{k3i3}^{-1}C_{i3KL} >$, $C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJk3}C_{k3i3}^{-1}C_{i3KL}$ — тензоры осредненных упругих констант пластины; $B_{IJKL}{=}\kappa < \xi C_{IJKL}^{(0)} >$, $K_{IJKLM}{=}\kappa < \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} >$;

$$K_{IJKL}{=}\kappa < \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > -C_{IJKL}^{(0)})d\xi >;\ \bar{D}_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} >;$$

$$\bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 < \xi\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} >;\quad \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = N_{IJKLM}^{(0)} + \Phi_{IJKLM};$$

$$N_{IJKLM}^{(0)} = -C_{IJk3}C_{k3P3}^{-1}\int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C_{PMKL}^{(0)} > -C_{PMKL}^{(0)})d\xi =$$

$$= Z_{PIJ}\int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C_{PMKL}^{(0)} > -C_{PMKL}^{(0)})d\xi; \Phi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) -$$

$$- < \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) >= \frac{1}{2}(U_{KMN}\delta_{LS} + U_{LMN}\delta_{KS});\ \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) =$$

$$= -\int\limits_{-0,5}^{\xi} (C_{K3i3}^{-1}\delta_{SL} + C_{L3i3}^{-1}\delta_{SK})C_{i3MN}d\xi.$$

В систему осредненных определяющих соотношений (17) входят деформации нулевого приближения $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ (10), кривизны η_{KL} и градиенты деформаций $\varepsilon_{KL,N}^{(0)}$:

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)},\quad \varepsilon_{IJ,K}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,JK}^{(0)} + u_{J,IK}^{(0)}), \qquad (18)$$

которые зависят от трех функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ глобальных переменных x_I. Как было отмечено выше, для моноклинных материалов тензоры третьего ранга $Z_{IKL} = C_{I3j3}^{-1} C_{j3KL}$ и U_{KMN} имеют только нулевые компоненты, следовательно, для этих материалов обращаются в ноль тензоры $\Phi_{IJKLM} = 0$, $N_{IJKLM}^{(0)} = 0$, $\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = 0$, $\bar{K}_{IJKLM} = 0$, $K_{IJKLM} = 0$, и определяющие соотношения (17) принимают "классический" вид, как в теориях Тимошенко и Кирхгофа – Лява:

$$
\begin{gathered}
T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL}; \\
M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL}; \\
Q_I = \kappa^2 < \sigma_{I3}^{(2)} > .
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Подставляя выражения (18) в (19), а затем в (15), запишем систему осредненных уравнений равновесия пластины относительно трех неизвестных функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$:

$$
\begin{gathered}
\bar{C}_{IJKL} u_{K,LJ}^{(0)} + B_{IJKL} u_{3,KLJ}^{(0)} = 0; \\
B_{IJKL} u_{K,LJI}^{(0)} + D_{IJKL} u_{3,KLJI}^{(0)} = \Delta \bar{p}.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Система имеет четвертый порядок относительно прогиба $u_3^{(0)}$ и третий порядок производных относительно продольных перемещений $u_I^{(0)}$, как в классической теории пластин Кирхгофа – Лява.

Напряжения в пластине. После решения осредненной системы (20) и нахождения функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, вычисляем деформации (10), а затем напряжения по формуле $\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}$. Сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{(0)}$ и поперечное напряжение $\sigma_{33}^{(0)}$, как было установлено в работах [10, 11], в пластине тождественно равны нулю, поэтому для моноклинных материалов равны нулю и деформации $\varepsilon_{I3}^{(0)} = -C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} = 0$:

$$
\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = 0. \tag{21}
$$

Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения $\sigma_{I3}^{(1)}$. Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение — это значение $\sigma_{33}^{(2)}$. В результате, сохраняя в асимптотическом разложении (7) только главные ненулевые члены и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получаем выражения для всех шести компонент тензора напряжений:

$$
\sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}^{(0)};
$$

$$\sigma_{33} = -\kappa^2 \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< \sigma^{(1)}_{3J,J} > -\sigma^{(1)}_{3J,J})d\xi +$$

$$+ \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0,5) + \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< \sigma^{(2)}_{3J,J} > -\sigma^{(2)}_{3J,J})d\xi); \quad (22)$$

$$\sigma_{I3} = \kappa \sigma^{(1)}_{I3} + \kappa^2 \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< \sigma^{(1)}_{IJ,J} > -\sigma^{(1)}_{IJ,J})d\xi.$$

Входящие в выражения (22) напряжения $\sigma^{(1)}_{I3}$, $\sigma^{(1)}_{IJ}$ и $\sigma^{(2)}_{I3}$ вычисляются по формулам (для моноклинных материалов):

$$\sigma^{(0)}_{IJ} = C^{(0)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL};$$
$$\sigma^{(1)}_{IJ} = \xi C^{(0)}_{IJKL}\eta_{KL};$$
$$\sigma^{(1)}_{I3} = \varepsilon^{(0)}_{KL,J} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C^{(0)}_{IJKL} > -C^{(0)}_{IJKL})d\xi; \quad \sigma^{(1)}_{33} = 0; \quad (23)$$
$$\sigma^{(2)}_{I3} = \eta_{KL,J} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< \tilde{\xi} C^{(0)}_{IJKL} > -\tilde{\xi} C^{(0)}_{IJKL})d\tilde{\xi}.$$

Все соотношения (23) содержат только один набор неизвестных функций — деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}$ и компоненты тензора искривлений η_{KL} — эти величины полностью вычисляются после решения осредненных уравнений теории пластин (20). Таким образом, асимптотическая теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений. Важным ее результатом является то, что для моноклинных материалов она приводит (т.е. математически обосновывает) к классическим осредненным уравнениям теории тонких пластин Кирхгофа – Лява.

Вывод вариационного уравнения для асимптотической теории пластин. Рассмотрим общее вариационное уравнение трехмерной задачи линейной теории упругости (2), которое может быть записано в следующем виде [20]:

$$\int\limits_{V} \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV = \int\limits_{\Sigma_\sigma} \tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma, \quad (24)$$

где $\Sigma_\sigma = \Sigma_{3\pm} \cup \Sigma^{\sigma}_{T}$ — часть поверхности пластины, на которой задан вектор напряжений $\tilde{S}_{ei}$ и давление $\tilde{p}_\pm$. Запись $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))$ означает, что тензор напряжений может быть представлен как функция тензора деформаций $\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = (\nabla_l u_k + \nabla_k u_l)/2$ с помощью обобщенного закона Гука $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$.

Согласно асимптотической теории, перемещения пластины могут быть представлены в виде (9) и (14), поэтому вариации перемещений имеют вид $\delta u_I = \delta u_I^{(0)} - \kappa\xi\delta u_{3,I}^{(0)}$; $\delta u_3 = \delta u_3^{(0)} + \kappa\delta\varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL}$. В соответствии с (6) деформации ε_{ij} в асимптотической теории с точностью до членов второго порядка малости имеют вид $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)}$, причем согласно (21) и

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{KL}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{K,L}^{(0)} + u_{L,K}^{(0)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = 0, \\ &\varepsilon_{33}^{(0)} = \varepsilon_{KL}^{(0)} U_{3KL/3} = -\varepsilon_{KL}^{(0)} \frac{C_{33KL}}{C_{3333}}; \\ &\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi\eta_{KL}, \quad \varepsilon_{k3}^{(1)} = -\varepsilon_{KL,J}^{(0)} C_{k3I3}^{-1} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi. \end{aligned} \tag{25}$$

Тогда вариации деформаций составят

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\delta\varepsilon_{ij}^{(1)}. \tag{26}$$

Преобразуем теперь интеграл в левой части функционала (20):

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV = \\ &\qquad = \int\limits_V \sigma_{IJ}\delta\varepsilon_{IJ}dV + 2\int\limits_V \sigma_{k3}\delta\varepsilon_{k3}dV + \int\limits_V \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33}dV. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя в (25) формулы (7) и (26) и учитывая, что величины $\delta\varepsilon_{MN}^{(0)}$,$\delta\eta_{IJ}$ не зависят от координаты ξ, получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV = \\ &\quad = h\iint\limits_{\Sigma_0} \Big\{ < \sigma_{IJ}^{(0)} > \delta\varepsilon_{IJ}^{(0)} + 2 < \sigma_{I3}^{(0)}\delta\varepsilon_{I3}^{(0)} > + < \sigma_{33}^{(0)}\delta\varepsilon_{33}^{(0)} > + \\ &\qquad + \kappa(< \sigma_{IJ}^{(1)} > \delta\varepsilon_{IJ}^{(0)} + < \sigma_{IJ}^{(0)}\delta\varepsilon_{IJ}^{(1)} > + 2 < \sigma_{I3}^{(1)}\delta\varepsilon_{I3}^{(0)} > + \\ &\qquad + 2 < \sigma_{I3}^{(0)}\delta\varepsilon_{I3}^{(1)} > + < \sigma_{33}^{(1)}\delta\varepsilon_{33}^{(0)} > + < \sigma_{33}^{(0)}\delta\varepsilon_{33}^{(1)} >)\Big\} d\Sigma, \end{aligned} \tag{28}$$

где Σ_0 — срединная поверхность пластины.

В силу (21), (23), (25) $\sigma_{i3}^{(0)} = 0$, $\varepsilon_{I3}^{(0)} = 0$, $\sigma_{33}^{(1)} = 0$, тогда выражение (28) приводим к виду

$$\int\limits_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV =$$
$$= h\iint\limits_{\Sigma_0}\Big\{(<\sigma_{IJ}^{(0)}> + \kappa <\sigma_{IJ}^{(1)}>)\delta\varepsilon_{IJ}^{(0)} + \kappa <\sigma_{IJ}^{(0)}\delta\varepsilon_{IJ}^{(1)}>)\Big\}d\Sigma. \quad (29)$$

С учетом $\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi\eta_{KL}$ и обозначений (16) для усилий и моментов выражение (29) можно записать так

$$\int\limits_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))\delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dV = h\iint\limits_{\Sigma_0}\Big\{T_{IJ}\delta\varepsilon_{IJ}^{(0)} + M_{IJ}\delta\eta_{IJ}\Big\}d\Sigma. \quad (30)$$

Преобразуем второй интеграл в (24) как

$$\int\limits_{\Sigma_\sigma}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma = \int\limits_{\Sigma_T^\sigma}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_{3+}}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_{3-}}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma. \quad (31)$$

Поскольку на внешней ($\Sigma_{3+} = \{\xi = 0,5\}$) и внутренней ($\Sigma_{3-} = \{\xi = -0,5\}$) поверхностях согласно (2) задано давление $\tilde{S}_{ei} = -\tilde{p}_\pm\delta_{i3}$, $x \in \Sigma_{3\pm}$, то

$$\int\limits_{\Sigma_{3\pm}}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma = \mp\int\limits_{\Sigma_0}\tilde{p}_\pm\delta u_3 d\Sigma. \quad (32)$$

Интеграл в (31) по части торцевой поверхности Σ_T^σ преобразуем следующим образом: $\int\limits_{\Sigma_T^\sigma}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma = h\int\limits_{C_\sigma} <\tilde{S}_{ei}\delta u_i> dl$, где $C_\sigma \subset \partial\Sigma_0$ — часть контура $\partial\Sigma_0$, ограничивающего срединную поверхность пластины Σ_0, на котором задан вектор напряжений $\tilde{S}_{ei}$; dl — элемент дуги этого контура. Тогда с учетом (14) и (9) имеем

$$\int\limits_{\Sigma_T^\sigma}\tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma = h\int\limits_{C_\sigma} <\tilde{S}_{ei}\delta u_i> dl =$$
$$= h\int\limits_{C_\sigma}\{<S_{eI}>\delta u_I^{(0)} - \kappa <\xi S_{eI}>\delta u_{3,I}^{(0)} + \kappa <S_{e3}>\delta u_3^{(0)}\}dl. \quad (33)$$

Поскольку $\tilde{S}_{ei} = \sigma_{ij}n_j$, входящие в выражение (33) средние величины можно представить как

$$\begin{aligned} <\tilde{S}_{eI}> &= <\sigma_{IJ}> n_J = T_{IJ}n_J = T_{eI};\\ \kappa <\xi\tilde{S}_{eI}> &= \kappa <\xi\sigma_{IJ}> n_J = M_{IJ}n_J = M_{eI};\\ \kappa <\tilde{S}_{e3}> &= \kappa <\sigma_{3J}> n_J = Q_J n_J = Q_e. \end{aligned} \quad (34)$$

Следовательно, поверхностный интеграл (31) с учетом (32)–(34) можно записать так

$$\int\limits_{\Sigma_\sigma} \tilde{S}_{ei}\delta u_i d\Sigma = -\int\limits_{\Sigma_0} (\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-)\delta u_3^{(0)} d\Sigma +$$
$$+ h\int\limits_{C_\sigma} \{T_{eI}\delta u_I^{(0)} - M_{eI}\delta u_{3,I}^{(0)} + Q_e\delta u_3^{(0)}\} dl. \quad (35)$$

Подставляя (35) и (30) в (20), получаем вариационное уравнение

$$h\iint\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ}\delta\varepsilon_{IJ}^{(0)} + M_{IJ}\delta\eta_{IJ}\Big\} d\Sigma = -\int\limits_{\Sigma_0} (\tilde{p}_+ - \tilde{p}_-)\delta u_3^{(0)} d\Sigma +$$
$$+ h\int\limits_{C_\sigma} \{T_{eI}\delta u_I^{(0)} - M_{eI}\delta u_{3,I}^{(0)} + Q_e\delta u_3^{(0)}\} dl.$$

После обезразмеривания всех величин с учетом (2) запишем окончательно искомое вариационное уравнение, соответствующее вариационному принципу Лагранжа для асимптотической теории пластин

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ}\delta\varepsilon_{IJ}^{(0)} + M_{IJ}\delta\eta_{IJ}\Big\} d\Sigma = -\kappa^2\int\limits_{\Sigma_0} \Delta p\delta u_3^{(0)} d\Sigma +$$
$$+ \int\limits_{C_\sigma} \{T_{eI}\delta u_I^{(0)} - M_{eI}\delta u_{3,I}^{(0)} + Q_e\delta u_3^{(0)}\} dl. \quad (36)$$

Покажем, что вариационное уравнение (36) эквивалентно системе осредненных уравнений равновесия пластины (15), к которой следует присоединить граничные условия на контуре $C_u \cup C_\sigma = \partial\Sigma_0$ края пластины C_u: $u_i^{(0)} = u_{ei}$, $u_{3,n}^{(0)} = u_{e3,n}$;

$$C_\sigma\colon\ T_{IJ}n_J = T_{eI},\ Q_J n_J + ((M_{eI} - M_{IJ}n_J)\tau_I)_{,\tau} = Q_e,\ M_{IJ}n_I n_J = M_{eI}n_I, \quad (37)$$

где τ_I, n_I — компоненты единичных векторов касательной и нормали к контуру $\partial\Sigma_0$; $(\,\cdot\,)_{,\tau}$, $(\,\cdot\,)_{,n}$ — производные по касательному направлению и нормали. На вариации $\delta u_i^{(0)}$ накладываются условия

$$C_u : \delta u_i^{(0)} = 0, \quad \delta u_{3,n}^{(0)} = 0. \quad (38)$$

Поскольку нулевые сдвиговые деформации $\varepsilon_{I3}^{(0)} = 0$ можно представить в виде $\varepsilon_{I3}^{(0)} = 0 = \dfrac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + \gamma_I)$ [10, 11], где $\gamma_I = u_{I/3}^{(1)} = -u_{3,I}^{(0)}$ — углы поворота нормали к срединной поверхности пластины и $\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)} = \gamma_{K,L}$, уравнение (36) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ}\delta u_{I,J}^{(0)} + M_{IJ}\delta\gamma_{I,J}\Big\} d\Sigma =$$

$$= -\int\limits_{\Sigma_0} \Delta\bar{p}\delta u_3^{(0)} d\Sigma + \int\limits_{C_\sigma} \{T_{eI}\delta u_I^{(0)} + M_{eI}\delta\gamma_I + Q_e\delta u_3^{(0)}\} dl. \quad (39)$$

Применяя к левой части (39) правило дифференцирования произведения функций, получаем

$$-\int_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ,J}\delta u_I^{(0)} + M_{IJ,J}\delta\gamma_I + \Delta\bar{p}\delta u_3^{(0)}\Big\} d\Sigma +$$
$$+\int\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ}\delta u_I^{(0)} + M_{IJ}\delta\gamma_I\Big\}_{,J} d\Sigma = \int\limits_{C_\sigma} \{T_{eI}\delta u_I^{(0)} + M_{eI}\delta\gamma_I + Q_e\delta u_3^{(0)}\} dl.$$

Используя формулы перехода от поверхностного интеграла к контурному [21], запишем

$$-\int\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ,J}\delta u_I^{(0)} + M_{IJ,J}\delta\gamma_I - \Delta\bar{p}\delta u_3^{(0)}\Big\} d\Sigma =$$
$$= \int\limits_{C_\sigma} \{(T_{eI} - T_{IJ}n_J)\delta u_I^{(0)} + (M_{eI} - M_{IJ}n_J)\delta\gamma_I + Q_e\delta u_3^{(0)}\} dl.$$

Повторяя процедуру для производных моментов имеем

$$-\int\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ,J}\delta u_I^{(0)} - (\Delta\bar{p} - M_{IJ,IJ})\delta u_3^{(0)}\Big\} d\Sigma =$$
$$= \int\limits_{C_\sigma} \{(T_{eI} - T_{IJ}n_J)\delta u_I^{(0)} + (M_{eI} - M_{IJ}n_J)\delta\gamma_I +$$
$$+ (Q_e - M_{IJ,J}n_I)\delta u_3^{(0)}\} dl. \quad (40)$$

Преобразуем выражение $M_I\delta\gamma_I$ (где $M_I \equiv M_{eI} - M_{IJ}n_J$) и переходим к производным $\delta u_{3,n}^{(0)}$ и $\delta u_{3,\tau}^{(0)}$ по нормали n_I и касательной τ_I к контуру $\partial\Sigma_0$:

$$M_I\delta u_{3,I}^{(0)} = M_I\tau_I\delta u_{3,\tau}^{(0)} + M_I n_I \delta u_{3,n}^{(0)} =$$
$$= -(M_I\tau_I)_{,\tau}\delta u_3^{(0)} + (M_I\tau_I\delta u_3^{(0)})_{,\tau} + M_I n_I\delta u_{3,n}^{(0)}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (50) и учитывая условия (36), получаем

$$-\int\limits_{\Sigma_0} \Big\{T_{IJ,J}\delta u_I^{(0)} - (\Delta\bar{p} - M_{IJ,IJ})\delta u_3^{(0)}\Big\} d\Sigma =$$
$$= \int\limits_{C_\sigma} \Big\{(T_{eI} - T_{IJ}n_J)\delta u_I^{(0)}\Big\} dl +$$

$$+\int\limits_{C_\sigma}\{(Q_e - M_{IJ,J}n_I - (M_I\tau_I)_{,\tau})\delta u_3^{(0)} + M_I n_I \delta u_{3,n}^{(0)}\}dl+$$

$$+\sum_\alpha (M_I\tau_I\delta u_3^{(0)})_\alpha, \quad (42)$$

где $(M_I\tau_I\delta u_3^{(0)})_\alpha$ — скачки функций в точках разрыва на кривой C_σ. Если такие скачки отсутствуют, то $(M_I\tau_I\delta u_3^{(0)})_\alpha = 0$, при ненулевых скачках всегда можно принять $\delta u_3^{(0)} = 0$.

В силу произвольности вариаций переменных $\delta u_I^{(0)}$, $\delta u_3^{(0)}$ на поверхности Σ_0 и вариаций $\delta u_I^{(0)}$, $\delta u_3^{(0)}$, $\delta u_{3,n}^{(0)}$ на контуре C_σ из уравнения (42) следуют дифференциальные уравнения равновесия (15) и граничные условия (37).

Вариационные принципы Хеллингера – Рейсснера и Германна для асимптотической теории пластин. Будем исходить из вариационного уравнения (36). Введем столбцы усилий, моментов и обобщенных усилий $\underset{3}{\{T\}} = (T_{11}, T_{22}, T_{12})^{\text{т}}$, $\underset{3}{\{M\}} = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^{\text{т}}$, $\underset{6}{\left\{\tilde{T}\right\}} = \left(\{T\}^3, \{M\}^{\text{т}}\right)^{\text{т}}$; столбец обобщенных деформаций $\underset{6}{\{e\}} = (\varepsilon_{11}^{(0)}, \varepsilon_{22}^{(0)}, \varepsilon_{12}^{(0)}, \eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{12})^{\text{т}}$; столбец перемещений $\underset{3}{\{u\}} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})^{\text{т}}$; столбцы обобщенных поверхностных нагрузок и моментов $\underset{3}{\{T_e\}} = (T_{e1}, T_{e2}, Q_e)^{\text{т}}$, $\underset{2}{\{M_e\}} = (M_{e1}, M_{e2})^{\text{т}}$. Тогда уравнение (36) можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} \delta\{\varepsilon\}\, d\Sigma + \delta\tilde{A}_\Sigma^e = 0. \quad (43)$$

Здесь $\delta\tilde{A}_\Sigma^e = \iint\limits_{\Sigma_0} \{\Delta\bar{p}\}^{\text{т}} \delta\{u\}\, d\Sigma - \int\limits_{C_\sigma} \left(\{T_e\}^{\text{т}} \delta\{u\} + \{M_e\}^{\text{т}} [L_\gamma]\delta\{u\}\right) dl$ — работа внешних сил; $\underset{3}{\{\Delta\bar{p}\}} = (0, 0, \Delta\bar{p})^{\text{т}}$; $(\gamma_1, \gamma_2)^{\text{т}} = \underset{2\times 3}{[L_\gamma]}\,\underset{3}{\{u\}}$; $\underset{2\times 3}{[L_\gamma]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial_1 \\ 0 & 0 & -\partial_2 \end{bmatrix}$; $\partial_I = \dfrac{\partial}{\partial x_I}$ — операторы дифференцирования по глобальным координатам.

Соотношения между обобщенными деформациями и перемещениями запишем в символическом виде

$$\underset{6}{\{\varepsilon\}} = \underset{6\times 3}{[L]}\,\underset{3}{\{u\}}, \quad (44)$$

где $\underset{6\times 3}{[L]}$ — матрица дифференциального оператора,

$$\underset{6\times 3}{[L]} = \begin{bmatrix} \underset{3\times 3}{[L_\varepsilon]} \\ \underset{3\times 3}{[L_\eta]} \end{bmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{[L_\varepsilon]} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 1/2\partial_2 & 1/2\partial_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underset{3\times 3}{[L_\eta]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial_{11}^2 \\ 0 & 0 & -\partial_{22}^2 \\ 0 & 0 & -\partial_{12}^2 - \partial_{21}^2 \end{bmatrix};$$

$\partial_{IJ}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_J \partial x_I}$ — соответствующие дифференциальные операторы.

Определяющие соотношения для пластин (19) могут быть записаны в виде обобщенных соотношений между координатными столбцами $\left\{\tilde{T}\right\}$ и $\{e\}$: $\underset{6}{\left\{\tilde{T}\right\}} = \underset{6\times 6}{[G]}\underset{6}{\{e\}}$, где $\underset{6\times 6}{[G]}$ — обобщенная матрица упругости,

$$\underset{6\times 6}{[G]} = \begin{pmatrix} \underset{3\times 3}{[\bar{C}]} & \underset{3\times 3}{[B]} \\ \underset{3\times 3}{[B]} & \underset{3\times 3}{[D]} \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{[\bar{C}]} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1112} \\ \bar{C}_{2211} & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2212} \\ \bar{C}_{1211} & \bar{C}_{1222} & \bar{C}_{1212} \end{pmatrix},$$

$$\underset{3\times 3}{[B]} = \begin{pmatrix} B_{1111} & B_{1122} & B_{1112} \\ B_{2211} & B_{2222} & B_{2212} \\ B_{1211} & B_{1222} & B_{1212} \end{pmatrix}, \quad \underset{3\times 3}{[D]} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{pmatrix}.$$

Подставив (44) в (43) и добавив согласно общей схеме вариационного принципа Хеллингера – Рейсснера нулевое слагаемое, имеем

$$\delta J_\Sigma(u, \tilde{T}) = \iint\limits_{\Sigma_0} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} [L]\, \delta \{u\}\, d\Sigma +$$
$$+ \iint\limits_{\Sigma_0} \delta \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} \left([L]\{u\} - [G]^{-1}\left\{\tilde{T}\right\}\right) d\Sigma + \delta \tilde{A}_\Sigma^e = 0. \quad (45)$$

Далее полагаем, что $\{u\}$ и $\left\{\tilde{T}\right\}$ — независимые системы функций, и соотношение (44) не выполняется. Тогда (45) является самостоятельным уравнением.

Функционал J_Σ может быть записан явным образом

$$J_\Sigma(u, \tilde{T}) = \iint\limits_{\Sigma_0} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} [L]\{u\}\, d\Sigma - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma_0} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} [G]^{-1} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} d\Sigma + \tilde{A}_\Sigma^e, \quad (46)$$

где

$$\tilde{A}^e_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma_0} \{\Delta\bar{p}\}^{\text{т}} \{u\}\, d\Sigma - \int_{C_\sigma} \left(\{T_e\}^{\text{т}} \{u\} + \{M_e\}^{\text{т}} [L_\gamma] \{u\}\right) dl \qquad (47)$$

— суммарная работа внешних сил.

Вариационное уравнение

$$\delta J_{\Sigma}(u, \tilde{T}) = 0 \qquad (48)$$

вместе с уравнениями (46) и (47) соответствует вариационному принципу Хеллингера – Рейсснера для асимптотической теории пластин.

Поскольку в выражение для дифференциального оператора L_η входят вторые производные прогибов $u_3^{(0)}$, применение функционала в форме (46) в методе конечных элементов (МКЭ) приводит к необходимости использования аппроксимации прогибов обладающей непрерывной производной на границе конечного элемента (эрмитовы конечные элементы). Чтобы избежать этого преобразуем первый интеграл в (46)

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \{\tilde{T}\}^{\text{т}} [L] \{u\}\, d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma_0} \{T\}^{\text{т}} [L_\varepsilon] \{u\}\, d\Sigma + \iint\limits_{\Sigma_0} \{M\}^{\text{т}} [L_\eta] \{u\}\, d\Sigma =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma_0} \{T\}^{\text{т}} [L_\varepsilon] \{u\}\, d\Sigma - \iint\limits_{\Sigma_0} \left([L_M] \{M\}\right)^{\text{т}} [L_\gamma] \{u\}\, d\Sigma +$$
$$+ \int_{C_\sigma} \left(\{M\}^{\text{т}} [N][L_\gamma] \{u\}\right) dl, \qquad (49)$$

где $\underset{2\times3}{[L_M]} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}$ — дифференциальный оператор; $\underset{3\times2}{[N]} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}$ — матрица нормалей. Подставляя (49) в функционал J_Σ, получаем функционал Германна

$$J_{\Sigma}(u, \tilde{T}) = \iint\limits_{\Sigma_0} \{T\}^{\text{т}} [L_\varepsilon] \{u\}\, d\Sigma - \iint\limits_{\Sigma_0} \left([L_M] \{M\}\right)^{\text{т}} [L_\gamma] \{u\}\, d\Sigma -$$
$$- \frac{1}{2} \iint\limits_{\Sigma_0} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} [G]^{-1} \left\{\tilde{T}\right\}^{\text{т}} d\Sigma + \tilde{\tilde{A}}^e_{\Sigma}. \qquad (50)$$

Здесь

$$\tilde{\tilde{A}}^e_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma_0} \{\Delta\bar{p}\}^{\text{т}} \{u\}\, d\Sigma -$$

$$-\int\limits_{C_\sigma} \left(\{T_e\}^{\text{т}}\{u\} + \left(\{M_e\}^{\text{т}} - \{M\}^{\text{т}}[N]\right)[L_\gamma]\{u\}\right) dl. \quad (51)$$

Функционал (50) свободен от указанного выше недостатка.

Подставляя (50) и (51) в (48), получаем вариационное уравнение соответствующее вариационному принципу Германна для асимптотической теории пластин.

Выводы. На основе вариационного принципа Лагранжа для трехмерных уравнений теории упругости с помощью теории асимптотических разложений по малому параметру, представляющему собой отношение толщины к характерной длине пластины, без введения какихлибо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, выведено вариационное уравнение типа Лагранжа для тонких многослойных пластин. Показано, что это вариационное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений теории пластин Кирхгофа – Лява, но в отличие от классической модели пластин Кирхгофа – Лява разработанная асимптотическая теория позволяет найти распределения всех шести компонент тензора напряжений. Разработанная асимптотическая теория пластин дает математически строгое (в асимптотическом смысле) обоснование классической теории пластин Кирхгофа – Лява, показывая, что именно эта теория является результатом применения метода асимптотических разложений к уравнениям трехмерной теории упругости. Отличие от классической теории Кирхгофа – Лява заключается лишь в нелинейной зависимости прогиба от поперечной координаты. Выведены также вариационные принципы Хеллингера – Рейсснера и Германна для асимптотической теории пластин.

Работа выполнены при поддержке гранта Президента РФ МК-5961.2015.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И.*, *Куликов Г.М.* Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов // Механика композит. материалов. 1988. № 4. С. 698–704.
2. *Зверяев Е.М.*, *Макаров Г.И.* Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.
3. *Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–483.
4. *Шешенин С.В.* Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 71–79.
5. *Шешенин С.В.*, *Ходос О.А.* Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошной среды. 2011. Т. 4. № 2. С. 128–139.
6. *Kohn R.V.*, *Vogelius M.* A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. 1984. Vol. 20. No. 4. P. 333–350.

7. *Панасенко Г.П.*, *Резцов М.В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // ДАН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1061–1065.
8. *Levinski T.*, *Telega J.J.* Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. Singapore; London: World Sci. Publ., 2000. 739 p.
9. *Kolpakov A.G.* Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 228 p.
10. *Димитриенко Ю.И.* Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. № 3. 2012. С. 86–100.
11. *Димитриенко Ю.И.*, *Яковлев Д.О.* Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. Т. 20. № 2. 2014. С. 260–282.
12. *Димитриенко Ю.И.*, *Губарева Е.А.*, *Сборщиков С.В.* Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36–57.
13. *Моделирование* и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым заполнителем / Ю.И. Димитриенко, Н.Н. Федонюк, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков, А.А. Прозоровский, В.С. Ерасов, Н.О. Яковлев // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 66–82.
14. *Димитриенко Ю.И.*, *Губарева Е.А.*, *Федонюк Н.Н.*, *Яковлев Д.О.* Метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 11. С. 23–34.
15. *Димитриенко Ю.И.*, *Губарева Е.А.*, *Сборщиков С.В* Моделирование упруго-диссипативных характеристик слоисто-волокнистых композитов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. Вып. 4(28). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html
16. *Димитриенко Ю.И.*, *Губарева Е.А.*, *Сборщиков С.В.*, *Федонюк Н.Н.* Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волокнистых полимерных композиционных материалов // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 11. С. 748–770. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/734246.html (дата обращения: 19.01.2015) DOI: 10.7463/1114.0734246
17. *Димитриенко Ю.И.*, *Губарева Е.А.*, *Яковлев Д.О.* Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 10. С. 359–382. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/730105.html (дата обращения: 19.01.2015) DOI: 10.7463/1014.0730105
18. *Димитриенко Ю.И.*, *Юрин Ю.В.*, *Губарева Е.А.* Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 4. С. 36–57.
19. *Димитриенко Ю.И.*, *Яковлев Д.О.* Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html 20.
20. *Димитриенко Ю.И.* Основы механики твердого тела. Механика сплошной среды. Т. 4. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 580 с.
21. *Димитриенко Ю.И.* Тензорный анализ. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
22. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 576 с.
23. *Алфутов Н.А.*, *Зиновьев П.А.*, *Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1980. 324 с.
24. *Белкин А.Е.*, *Гаврюшин С.С.* Расчет пластин методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 232 с.
25. *Попов Б.Г.* Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 294 с.

REFERENCES

[1] Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. The Generalized Model of the Mechanics of Thin-Walled Structures Made of Composite Materials. *Composite Mechanics and Design*, 1988, no. 4, pp. 698–704 (in Russ.).

[2] Zveryaev E.M., Makarov G.I. The General Method of Constructing Theories Like Tymoshenko. *Prikl. Mat. Mekh*. [J. Appl. Math. Mech.], 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 308–321 (in Russ.).

[3] Zveryaev E.M. Analysis of the Hypotheses Used in the Theory of Beams and Slabs. *Prikl. Mat. Mekh*. [J. Appl. Math. Mech.], 2003, vol. 67, iss. 3, pp. 472–483 (in Russ.).

[4] Sheshenin S.V. Asymptotic analysis for periodic in plane plates. *Izv. RAN. MTT* [Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body], 2006, no. 6, pp. 71–79 (in Russ.).

[5] Sheshenin S.V., Khodos O.A. Effective Stiffness of Corrugated Plates. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy* [Computational Continuum Mechanics], 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139 (in Russ.).

[6] Kohn R.V., Vogelyus M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.

[7] Panasenko G.P., Reztsov M.V. Averaging the Three-Dimensional Problem of Elasticity Theory in an Inhomogeneous Plate. *Dokl. AN SSSR* [Reports of Acad. Sci. USSR], 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065 (in Russ.).

[8] Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000, 739 p.

[9] Kolpakov A.G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 228 p.

[10] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic Theory of Multilayer Thin Plates. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 86–100 (in Russ.).

[11] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Journal on Composite Mechanics and Design], 2014, vol. 20, no. 2, pp. 259–282 (in Russ.).

[12] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structure. *Mat. modelirovanie i chislennye metody* [Math. Modeling and Computational Methods], 2014, no. 1, pp. 36–57 (in Russ.).

[13] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Prozorovskiy A.A., Erasov V.S., Yakovlev N.O. Modeling and development of three-layer sandwich composite materials with honecomb core. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 5, pp. 66–82 (in Russ.).

[14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Fedonyuk N.N., Yakovlev D.O. A method of calculation of energy dissipation in hybrid composite structures. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 11, pp. 23–34 (in Russ.).

[15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V. Modeling of elasic-dissipative properties of laminated fibrous composites. *Jelektr. nauchno-tehn. Izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2014, no. 4 (28). URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html

[16] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Fedonyuk N.N. Simulation of Viscoelastic Properties of Fibrous Laminated Polymer Composite Materials. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education"], 2014, no. 11. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/734246.html (accessed 19.01.2015). DOI: 10.7463/1114.0734246

[17] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. The Asymptotic Theory of Viscoelasticity of Multilayer Thin Composite Plates. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. “Nauka i obrazovanie”* [El. Sc.-Tech. Publ. “Science and Education”], 2014, no. 10, pp. 359–382. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/730105.html (accessed 19.01.2015). DOI: 10.7463/1014.0730105

[18] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Asymptotic theory of thermocreep for multilayer thin plates. *Mat. modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2014, no. 4, pp. 36–57 (in Russ.).

[19] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Comparison analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimentional theory of elastisity. *Jelektr. nauchno-tehn. Izd. “Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii”* [El. Sc.-Techn. Publ. “Eng. J.: Science and Innovation”, 2013, iss. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html

[20] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]. Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela [Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2013, 624 p.

[21] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. [Continuum mechanics. In 4 vol.]. Vol. 1. Tenzornyi analiz [Tensor analysis]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 367 p.

[22] Dimitrienko Yu.I. Tenzornoye ischislenie [Tensor calculus]. Moscow, Vish. Shk. Publ., 2001. 576 p.

[23] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. Raschet mnogosloynih plastin i obolochek iz kompzitscionnih materialov [Calculation of multilayer composite plates and shells]. Moscow, Mashiostroenie Publ., 1980. 324 p.

[24] Belkin A.E., Gavrushin S.S. Raschet plastin metodom konechnih elementov [Calculation of plates by finite element method]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 232 p.

[25] Popov B.G. Raschet mnogosloynih konstrukchiy variachionno-raznostnimi metodami [Calculation of multilayer structures by variation-matrix methods]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 1993. 294 p.

Статья поступила в редакцию 17.02.2015

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра “Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов” МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Dimitrienko Yu.I. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematics, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of the Scientific-Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development, Bauman Moscow State Technical University, author of over 300 research publications in the fields of continuum mechanics, computational mechanics, mechanics and thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science, computational gasdynamics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 30 научных работ в области механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, математического моделирования, механики композитов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Gubareva E.A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of Mathematics, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, author of 30 research publications in the fields of continuum mechanics, trybology, mathematical modeling, composite mechanics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Юрин Юрий Викторович — аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области вычислительной математики и механики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yurin Yu.V. — Ph.D. student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University, author of over 10 research publications in the fields of computational mathematics and mechanics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 67–87.

Please cite this article in English as:

Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Variational equations of asymptotic theory for multilayer thin plates. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 4, pp. 67–87.