

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-122-133

УДК 532.6

## **ФОРМА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В РАВНОВЕСИИ СО СВОЕЙ СМАЧИВАЮЩЕЙ ПЛЕНКОЙ**

**А.С. Романов, А.В. Семиколонов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: rolmal@bk.ru; avsemik@mail.ru

*Проанализирована форма свободной поверхности частично смачивающей жидкости при малых толщинах с учетом дополнительного химического потенциала (расклинивающего давления) для частиц жидкости. В рамках развиваемой теории продемонстрирована возможность равновесия объемной фазы жидкого слоя с тонкой смачивающей пленкой.*

**Ключевые слова:** частично смачивающая жидкость, тонкая пленка, поверхностное натяжение, расклинивающее давление, краевой угол.

## **THE FORM OF THE FREE LIQUID SURFACE IN EQUILIBRIUM WITH ITS WETTING FILM**

**A.S. Romanov, A.V. Semikolenov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: rolmal@bk.ru; avsemik@mail.ru

*The paper analyzes the free surface form of partially wetting liquid with small thickness taking into account some additional chemical potential (disjoining pressure) for liquid particles. The equilibrium of bulk phase of a liquid layer with a thin wetting film is possible according to the developed theory.*

**Keywords:** partially wetting liquid, thin film, surface tension, disjoining pressure, wetting angle.

**Введение.** Форма свободной поверхности тонких слоев жидкости, находящихся в равновесии определяется поверхностным натяжением, объемными и поверхностными силами, действующими на жидкость, и условиями смачивания. Условия смачивания при неполном (частичном) смачивании могут быть сформулированы, например, как условие Юнга для краевого угла смачивания на линии контакта свободной поверхности жидкости с твердым телом (на линии трехфазного контакта).

Учет поверхностного натяжения формально не представляет затруднений в рамках гидродинамики капельной жидкости [1]. Однако при наличии поверхностного натяжения попытки выполнить условие Юнга для краевого угла смачивания наталкиваются на принципиально непреодолимые трудности (например, см. работу [2]).

Возникающие проблемы удается решить, если вместо условия Юнга, которое задается на линии трехфазного контакта, переформулировать задачу с учетом дополнительного химического потенциала (или расклинивающего давления), которым обладают частицы жидкости в тонких слоях жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Очевидно, что именно расклинивающее давление ответственно за форму свободной поверхности вблизи линии трехфазного контакта. В настоящее время термин “расклинивающее давление” является общепринятым, был впервые введен Б.В. Дерягиным [3, 4]. В рамках такого подхода удается в замкнутом непротиворечивом виде сформулировать соответствующую задачу математической физики [5]. Уникальная зависимость расклинивающего давления от толщины жидкой пленки и угла наклона свободной поверхности, с одной стороны, приводит к вырождению соответствующих уравнений гидродинамики на линии трехфазного контакта, а с другой, к выполнению условия Юнга.

В рамках такой модели в работе [6] рассмотрено равновесие объемной части жидкости со своей  $\alpha$ -пленкой. Такая возможность подтверждена экспериментально [3, 4, 7]. Универсальный закон для формы свободной поверхности частично смачивающей жидкости, находящейся в равновесии со своей  $\alpha$ -пленкой, также найден в работе [6].

В экспериментах доказана возможность существования в специальных условиях смачивающей пленки, толщина которой превосходит толщину  $\alpha$ -пленки [8]. В этой же работе определена форма свободной поверхности в переходной зоне от мениска к смачивающей пленке. Согласно результатам экспериментов, в этой переходной зоне реализуется достаточно протяженный пологий участок свободной поверхности жидкости, форма которого может быть объяснена исключительно действием расклинивающего давления. Результаты экспериментов в работе [8] проанализированы на основе теории Фрумкина – Дерягина, в рамках которой используется изотерма расклинивающего давления, строго справедливая только для плоских слоев жидкости [3, 4, 8].

Если толщина жидкой пленки переменная, то исходя из общих соображений, расклинивающее давление неизбежно должно зависеть от угла наклона свободной поверхности жидкости к твердой подложке. Так, в работах [9, 10] был вычислен химический потенциал жидких частиц на свободной поверхности жидкости, свободно лежащей на твердой подложке, и явно зависящий от угла наклона. В основу вычислений был положен потенциал взаимодействия молекул Ван-дер-Ваальса – Лондона. Как показано в работах авторов настоящей статьи, несмотря на грубость таких вычислений, они позволяют правильно интерпретировать экспериментальные данные и в замкнутом непротиворечивом виде сформулировать задачу о форме свободной поверхности для частично смачивающей жидкости [5, 11, 12]. В этой модели

смачивания угол смачивания Юнга интерпретируется как угол наклона свободной поверхности, при котором меняется знак раскливающего давления. В настоящее время подобный подход плодотворно развивается во многих исследованиях (например, [13–29]).

В настоящей работе в рамках этого же подхода проанализирована форма свободной поверхности частично смачивающей жидкости в области перехода в находящуюся в равновесии смачивающую пленку.

**Постановка задачи.** Необходимым термодинамическим условием равновесия изотермического слоя жидкости, нагруженного раскливающим давлением, является постоянство ее свободной энергии во всем объеме [30]. отождествим потенциальную энергию взаимодействия молекул с их химическим потенциалом [31], тогда необходимое условие термодинамического равновесия можно записать в виде

$$\Omega_F \equiv P + F = \text{const}, \quad (1)$$

где  $\Omega_F$  — свободная энергия единицы объема жидкости [30];  $P$  — давление;  $F$  — химический потенциал жидкости, рассчитанный на единицу объема.

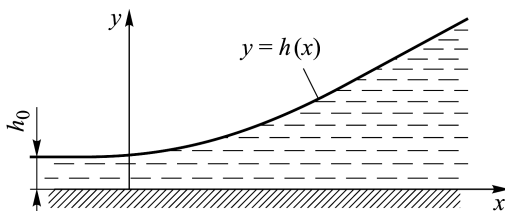
Не теряя общности, будем полагать, что в объемной части жидкости  $F = 0$ ,  $P = P_0$  (действием силы тяжести в жидкой пленке пренебрегаем вследствие малости ее толщины). Тогда постоянная в соотношении (1) равна  $P_0$ . Если на поверхности пленки задано давление  $P < P_0$ , то форма жидкой пленки может быть определена из соотношения

$$\Phi = P_0 - P \equiv -\Delta P > 0. \quad (2)$$

Здесь  $\Phi = F|_{y=h(x)}$ , т.е.  $\Phi$  — химический потенциал молекул жидкости на поверхности жидкой пленки (рис. 1);  $\Delta P$  — избыточное отрицательное давление на поверхности жидкой пленки.

Химический потенциал на поверхности жидкой пленки (с точностью до аддитивной постоянной) зададим в виде [4, 14]:

$$\Phi = \Phi_\alpha(h) - \sigma \frac{d^2 h}{dx^2}, \quad (3)$$



**Рис. 1. Форма поверхности жидкости**

где  $\Phi_\alpha(h)$  — дополнительный химический потенциал на свободной поверхности, определяемый эффектами второго рода, которые проявляются в очень тонких слоях жидкости, и равный с точностью до знака расклинивающему давлению;  $\sigma = \frac{8A_{LL}}{15r_0^2}$ ;  $A_{LL}$  — постоянная Гамакера для взаимодействия жидкость–жидкость;  $r_0$  — размер молекулы жидкости.

В рамках рассматриваемой модели дополнительный химический потенциал задается в виде

$$\Phi_\alpha = \frac{\pi}{12h^3} [(n_L^2 a_{LL} - n_L n_S a_{LS}) G(\alpha) - n_L n_S a_{LS} G(\pi - \alpha)], \quad (4)$$

где  $n_L, n_S$  — концентрации молекул жидкости и твердого тела;  $a_{LL}, a_{LS}$  — постоянные взаимодействия молекул жидкость–жидкость и жидкость–твердое тело;  $G(\alpha) = 1 + \cos^3 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$ ;  $\alpha$  — угол наклона свободной поверхности жидкости по отношению к твердой поверхности, отсчитываемый со стороны жидкости. Соответствующие постоянные Гамакера равны  $A_{LL} = a_{LL} n_L^2$ ,  $A_{LS} = a_{LS} n_L n_S$ .

Функция  $\Phi_\alpha(h)$  при  $h = 0$  имеет особенность, которая не может быть скомпенсирована:  $\Phi_\alpha(h) \neq 0$  при  $h \rightarrow 0$ , т.е. на линии трехфазного контакта. Анализ функции  $\Phi_\alpha(h)$  показывает, что при выполнении условия  $A_{LL} > A_{LS}$  (молекулы жидкости взаимодействуют между собой сильнее, чем с молекулами твердого тела) всегда существует некоторое значение угла  $\alpha = \alpha_e$ ,  $\pi > \alpha_e > 0$ , такое, что  $\Phi_\alpha(h) = 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Именно это значение угла наклона свободной поверхности жидкости  $\alpha = \alpha_e$  следует отождествить с равновесным углом смачивания Юнга на линии трехфазного контакта. Наиболее простое выражение для равновесного угла смачивания получается в случае выполнения условия  $\alpha_e^2 \ll 1$ , тогда

$$\alpha_e = \left[ \frac{16}{3} (1 - \beta) \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (5)$$

Выражение (4) при выполнении указанного сильного неравенства также упрощается

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi A_{LL}}{48 h^3} \left[ \frac{16}{3} (1 - \beta) - \alpha^4 \right], \quad (6)$$

где  $\beta = \frac{A_{LS}}{A_{LL}} < 1$ . Далее будем полагать соотношения (5) и (6) выполненными.

Явление образования очень тонкой полимолекулярной пленки постоянной толщины на поверхности твердого тела, находящейся в равновесии с объемной фазой жидкости и образующей с ней краевые

углы, было впервые отмечено А.Н. Фрумкиным и Б.В. Дерягиным. Физическая причина образования такой  $\alpha$ -пленки и, в более общем случае, смачивающей пленки, — силы, которые должны быть отнесены к структурным силам, т.е. к силам, связанным с изменением энтропии жидкости у поверхности твердого тела. В настоящее время общей теории структурной составляющей расклинивающего давления не существует вследствие сложности проблемы, имеющей квантовую природу, и большого числа разнообразных физико-химических факторов, действующих на поверхности твердого тела.

**Основные результаты.** Для построения механической модели образования смачивающей пленки предположим, что под действием структурных сил изменяется концентрация молекул жидкости в некотором тонком слое жидкости на поверхности твердого тела. Тогда, проводя те же вычисления, что и при выводе соотношения (4), находим выражение для составляющей расклинивающего давления  $\Phi_\alpha(h)$ , отличающееся от соотношения (4) наличием дополнительного слагаемого:

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{12h^3} \left[ (n_L^2 a_{LL} - n_L n_S a_{LS}) G(\alpha) - n_L n_S a_{LS} G(\pi - \alpha) - 6n_L \Delta n_L a_{LL} \frac{\delta}{h} \right]. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta n_L$  — среднее по толщине изменение концентрации молекул;  $\delta$  — толщина слоя жидкости, в котором происходит изменение концентрации молекул. Далее примем, что  $\Delta n_L > 0$ , так как именно в этом случае образуется смачивающая пленка.

В приближении формул (5), (6) соотношение (7) переписывается в виде

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{48} \frac{A_{LL}}{h^3} \left[ \frac{16}{3} (1 - \beta) - \alpha^4 - \frac{k}{h} \right], \quad k = 24 \frac{\Delta n_L}{n_L} \delta. \quad (8)$$

В формулах (3)–(8) присутствуют трудноизмеримые в рамках экспериментов величины, которые определяют характерные масштабы изучаемых явлений и известны только по порядку, например, постоянные Гамакера  $A_{LL}$ ,  $A_{LS}$  и размер атома  $r_0$ . Поэтому в качестве характерных величин удобнее принять значения величин, непосредственно измеряемых в экспериментах, сохраняя при этом общий теоретический вид обсуждаемых закономерностей.

В связи с этим отождествим величину  $\sigma$  с поверхностным натяжением [5]. За одну из естественных характерных величин примем равновесный угол смачивания  $\alpha_e$ .

В литературе имеется достаточно много экспериментальных данных относительно возможных типов изотерм расклинивающего давления в плоских слоях жидкости, свободно лежащих на твердой подложке. Вид изотермы расклинивающего давления  $\Pi(h) = -\Phi_\alpha(h)|_{\alpha=0}$ , соответствующий рассматриваемому случаю (8), приведен на рис. 2. Качественный вид этой изотермы находится в полном соответствии с экспериментальными изотермами расклинивающего давления для частично смачивающих жидкостей [3, 4, 8]. Характерная величина для этой изотермы — толщина  $\alpha$ -пленки (см. рис. 2). Учитывая, что при  $h = h_\alpha$  расклинивающее давление  $\Pi(h_\alpha) = 0$ , принимая  $\alpha = 0$  в (8), находим коэффициент  $k = \alpha_e^4 h_\alpha$ .

Другая характерная величина — толщина  $h_m$ , при которой расклинивающее давление достигает минимума. Исследуя на экстремум функцию  $\Pi(h)$ , получаем  $h_m = \frac{4}{3}h_\alpha$ ,  $\Pi_m = \frac{3^2\pi}{2^{12}h_\alpha^3}\alpha_e^4 A_{LL}$ . Эти величины отмечены на рис. 2.

Толщина смачивающей полимолекулярной пленки  $h_0$  также отмечена на рис. 2. Такая толщина смачивающей пленки реализуется, если в эксперименте достигается отрицательное избыточное давление  $\Delta P < 0$ . Возможные значения избыточного отрицательного давления принадлежат к интервалу  $-\Pi_m < \Delta P < 0$ , и, соответственно,  $h_\alpha < h_0 < h_m$ .

Для оценки вычислим значение минимума давления на изотерме расклинивающего давления  $\Pi_m$ . В качестве примера зададим  $\alpha_e = 0,3$ ,  $h_\alpha = 10^{-9}$  м,  $A_{LL} = 10^{-20}$  Дж, тогда  $\Pi_m \approx 550$  Па, что вполне реально в рамках рассматриваемой модели для изотермы расклинивающего давления.

Объединяя соотношения (1)–(8), с учетом найденных оценок для естественных характерных величин окончательно получаем уравнение свободной поверхности в виде

$$\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{4^4}{3^3} \Pi_m \frac{h_\alpha^3}{h^3} \left[ \alpha_e^4 - \left( \frac{dh}{dx} \right)^4 - \alpha_e^4 \frac{h_\alpha}{h} \right] = -\Delta P. \quad (9)$$

Анализ уравнения для формы свободной поверхности жидкости (9) удобнее проводить в безразмерных переменных. Для этого примем  $h = h_\alpha \eta$ ,  $x = h_\alpha x^*$ ,  $\left( \frac{dh}{dx} \right)^2 = \alpha_e^2 \varphi$ . Тогда в указанных безразмерных

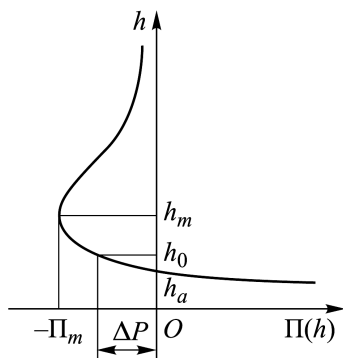


Рис. 2. Изотерма расклинивающего давления

переменных после понижения порядка уравнения (9) получим

$$\lambda \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{1}{\eta^3} \left[ 1 - \varphi^2 - \frac{1}{\eta} \right] = -\frac{27}{256}\beta, \quad (10)$$

где  $\lambda = \frac{27}{512} \frac{\sigma \alpha_e^2}{h_\alpha \Pi_m}$ ;  $\beta = \frac{|\Delta P|}{\Pi_m}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$  – безразмерные критерии.

Уравнение (10) должно быть дополнено граничным условием

$$\varphi = 0, \quad \eta = \eta_0, \quad (11)$$

где  $\eta_0 = \frac{h_0}{h_\alpha}$  – величина, определяемая как минимальный действительный корень уравнения

$$\frac{1}{\eta^3} \left[ 1 - \frac{1}{\eta} \right] = \frac{27}{256}\beta, \quad (12)$$

так как именно при  $h = h_0$  достигается минимальная толщина смачивающей пленки (см. рис. 2).

Согласно приведенным выше оценкам, значение безразмерной толщины смачивающей пленки принадлежит к интервалу  $1 < \eta_0 < 4/3$ . Полагая  $\eta_0 = 1 + \underline{\underline{Q}}(\beta)$ , из уравнения (12) получаем оценку

$$\eta_0 \approx 1 + \frac{27}{256}\beta, \quad 0 < \beta \ll 1. \quad (13)$$

Зависимость  $\eta_0(\beta)$ , полученная численно, приведена на рис. 3.

Характер интегральных кривых уравнения (10) может быть исследован методом изоклин. В интересующей нас области изменения переменных качественный вид интегральных кривых на плоскости  $(\varphi, \eta)$  приведен на рис. 4. Кривая, приведенная на рис. 4, *a*, построена при  $\beta = 0$ , а кривая, показанная на рис. 4, *b*, – при некотором произвольном значении  $\beta$  в допустимом интервале изменения  $0 < \beta < 1$ .

При отсутствии отрицательного расклинивающего давления, т.е. при  $\beta = 0$  (см. рис. 4, *a*), на внешней границе переходного слоя от  $\alpha$ -пленки к объемной части жидкости выполняется условие Юнга, так как  $\varphi \approx 1$  при  $\eta \gg 1$ . Этот факт уже был отмечен в работе [6].

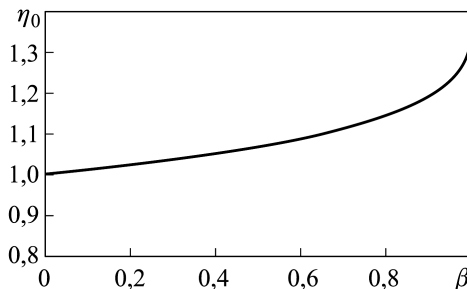
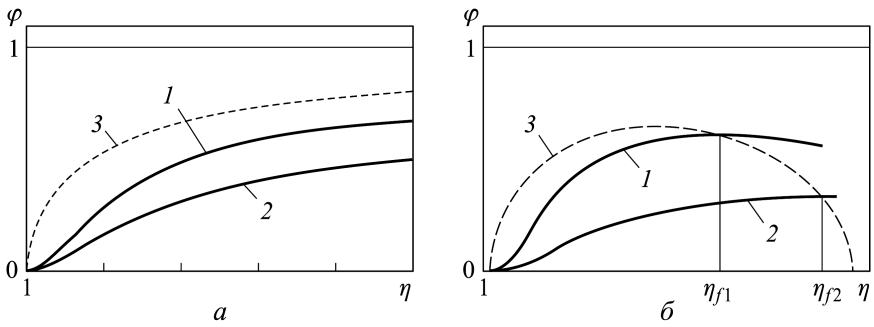


Рис. 3. Полученная численно зависимость  $\eta_0(\beta)$



**Рис. 4.** Качественный вид интегральных кривых на плоскости  $(\varphi, \eta)$ , полученный при решении уравнения (10) при  $\beta = 0$  (а) и  $0 < \beta < 1$  при  $\lambda_2 > \lambda_1$  (б): 1, 2 – характерный вид интегральных кривых, удовлетворяющих граничному условию (11); 3 –  $d\varphi/d\eta = 0$

В случае равновесия при отрицательном избыточном давлении, т.е. при  $0 < \beta < 1$ , выводы теории в рамках рассматриваемой здесь модели не являются столь очевидными. Это связано с тем, что при выводе основных соотношений (4) и (7) использовалась достаточно грубая механическая модель взаимодействия молекул, особенно в части зависимости структурной составляющей расклинивающего давления от толщины жидкой пленки. Несмотря на это, разрабатываемая в настоящей работе теория качественно правильно описывает форму свободной поверхности жидкости, наблюдаемую в экспериментах [8].

В качестве основной особенности формы свободной поверхности жидкости в переходном слое в работе [8] отмечена разность толщины полимолекулярной смачивающей пленки и минимальной высоты мениска в аппроксимации его формы кривой постоянной кривизны  $H_0 > h_0$  (в обозначениях, принятых в работе [8] и в настоящей статье). Этот принципиальный экспериментальный факт теоретически объясняется наличием точки перегиба профиля свободной поверхности, так как интегральная кривая всегда пересекается с кривой 3, для которой  $d\varphi/d\eta = 0$  (см. рис. 4, б).

**Заключение.** По мнению авторов настоящей статьи, несмотря на всю ее продуктивность, теория, развиваемая на основе уравнения Фрумкина–Дерягина для краевого угла смачивания обладает недостатком, связанным с игнорированием очевидной зависимости расклинивающего давления от угла наклона свободной поверхности жидкости, что учтено в данной работе. Отметим также, что анализ формы свободной поверхности становится значительно проще, если экспериментальная информация о равновесном краевом угле смачивания  $\alpha_e$  непосредственно участвует в построении соответствующей феноменологической теории.



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости* / А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков, Н.Д. Копачевский, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов; под ред. А.Д. Мышкиса. Киев: Наукова думка, 1992. 592 с.
2. *Пухначев В.В., Солонников В.А.* К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46. № 6. С. 961–971.
3. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В.* Смачивающие пленки. М.: Наука, 1984. 160 с.
4. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Мулер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
5. *Романов А.С.* Об одном способе гидродинамического описания растекания частично смачивающей жидкости по плоской твердой поверхности // Коллоидный журнал. 1990. Т. 52. № 1. С. 72–78.
6. *Романов А.С., Семиколонов А.В.* Форма свободной поверхности жидкости, находящейся в равновесии со своей  $\alpha$ -пленкой // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 8.  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/872.html>
7. *Жен П.Ж.* Смачивание: статика и динамика // УФН. 1987. Т. 151. № 4. С. 619–681.
8. *Вода в дисперсных системах* / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев, Ф.Д. Овчаренко и др. М.: Химия, 1989. 288 с.
9. *Miller C.A., Rukenshtein E.* The Origin of Flow during Wetting of Solids // J. Col. Interface Sci. 1974. Vol. 48. No. 3. P. 368–373.
10. *Del Cerro M.C.G., Jameson G.* Theory for equilibrium contact angle between a gas, a liquid and solid // J. Chem. Soc. Faraday Trans. I. 1976. Vol. 72. P. 883–895.
11. *Романов А.С., Семиколонов А.В.* Моделирование гидродинамики распада тонкой пленки частично смачивающей жидкости // Вычислительная математика и математическая физика. 1995. Т. 35. № 5. С. 643–647.
12. *Романов А.С., Семиколонов А.В.* Моделирование гидродинамики растекания капли частично смачивающей жидкости под действием горизонтальной силы // Вычислительная математика и математическая физика. 1999. Т. 39. № 7. С. 1163–1167.
13. *Boryan Radoev, Klaus W. Stükelhuber, Roumen Tsekov, Philippe Letocart.* Wetting film dynamics and stability // Col. Interface Sci. Ser. 3. 2007. P. 151–172.
14. *Bing Dai, L. Gary Leal, Antonio Redondo.* Disjoining pressure for nonuniform thin films // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. P. 061602.
15. *Алиев И.Н., Юрченко С.О.* О нелинейных волнах, распространяющихся по поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 5. С. 137–148.
16. *Алиев И.Н., Юрченко С.О.* Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 156–166.
17. *Saramago B.* Thin liquid wetting films // Current Opinion in Colloid & Interface Science. 2010. Vol. 15. No. 5. P. 330–340.
18. *Ren W., Hu D., E W.* Continuum models for the contact line problem // Physics of Fluids. 2010. Vol. 22. No. 10. P. 102103–102119.
19. *Ajoy Patra, Dipankar Bandyopadhyay, Gaurav Tomar, Ashutosh Sharma, Gautam Biswas.* Instability and dewetting of ultrathin solid viscoelastic films on homogeneous and heterogeneous substrates // Journal of Chemical Physics. 2011. Vol. 134. No. 6. P. 064705–064711.
20. *Boinovich L., Emelyanko A.* Wetting and surface forces // Adv. Colloid Interface Sci. 2011. Vol. 165. P. 60–69.
21. *Tsekov R., Toshev B.V.* Capillary pressure of van der Waals liquid nanodrops // Коллоидный журнал. 2012. Т. 74. № 2. С. 266–268.

22. Colosqui C.E., Kavousanakis M.E., Papathanasiou A.G., Kevrekidis I.G. Mesoscopic model for microscale hydrodynamics and interfacial phenomena: slip, films, and contact-angle hysteresis // *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2013. Vol. 87. No. 1. P. 013302.
23. Nikolov A., Wasan D. Wetting-dewetting films: the role of structural forces // *Advances in Colloid and Interface Science*. 2014. Vol. 206. P. 207–221.
24. Boinovich L., Emelyanko A. The prediction of wettability of curved surfaces on the basis of the isotherms of the disjoining pressure // *Col. Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*. 2011. Vol. 383. P. 10–16.
25. Popescu M.N., Oshanin G., Dietrich S., Cazabat A.-M. Precursor films in wetting phenomena // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2012. Vol. 24. P. 243102.
26. Moulton D.E., Lega J. Effect of disjoining pressure in a thin film equation with nonuniform forcing // *European J. of Applied Math*. 2013. Vol. 24. P. 887–920.
27. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions // *Annu. Rev. Fluid Mech*. 2013. Vol. 45. P. 269–292.
28. David N. Sibley, Andreas Nold, Nikos Sava, Serafim Kalliadasis. A comparison of slip, disjoining pressure, and interface formation models for contact line motion through asymptotic analysis of thin two-dimensional droplet spreading // *J. of Engineering Math*. August 2014.
29. Kaustav Chaudhury, Palash V. Acharya, Suman Chakraborty. Influence of disjoining pressure on the dynamics of steadily moving long bubbles inside narrow cylindrical capillaries // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89. P. 053002.
30. Базаров И.П. Термодинамика. СПб.: Лань, 2010. 377 с.
31. Ruckenstein E., Dunn C.S. Slip velocity during Wetting of Solids // *J. Col. Interface Sci*. 1977. Vol. 59. No. 1. P. 135–138.

## REFERENCES

- [1] Myshkis A.D., ed., Babskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods for solving problems in fluid mechanics for the conditions of weightlessness]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1992. 592 p.
- [2] Pukhnachev V.V., Solonnikov V.A. On the question of dynamic contact angle. *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1982, vol. 46, no. 6, pp. 961–971 (in Russ.).
- [3] Deryagin B.V., Churaev N.V. *Smachivayushchie plenki* [Wetting films]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 160 p.
- [4] Deryagin B.V., Churaev N.V., Muler V.M. *Poverkhnostnye sily* [Surface forces]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 399 p.
- [5] Romanov A.S. Method of hydrodynamic description of the spreading of a partially wetting liquid over a flat solid surface. *Colloid Journal*, 1990, vol. 52, no. 1, pp. 72–78.
- [6] Romanov A.S., Semikolenov A.V. Depressurized capillary filling in the asymptotic theory of wetting. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2013, iss. 4. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/699.html>
- [7] De Gennes P.G. Wetting: Statics and Dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 1985, vol. 57, pp. 827–863. DOI: 10.1103/RevModPhys.57.827
- [8] Deryagin B.V., Churaev N.V., Ovcharenko F.D. et al. *Voda v dispersnykh sistemakh* [Water in disperse systems]. Moscow, Khimiya Publ., 1989. 288 p.
- [9] Miller C.A., Rukenshtein E. The Origin of Flow during Wetting of Solids. *J. Col. Interface Sci.*, 1974, vol. 48, no. 3, pp. 368–373.
- [10] Del Cerro M.C.G., Jameson G. Theory for equilibrium contact angle between a gas, a liquid and solid. *J. Chem. Soc. Faraday Trans. I*, 1976, vol. 72, pp. 883–895.

- [11] Romanov A.S., Semikolenov A.V. A simulation of the hydrodynamics of the disintegration of a thin film of partially wetting liquid. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, vol. 35, no. 5, pp. 643–647.
- [12] Romanov A.S., Semikolenov A.V. Simulation of spreading hydrodynamics for a droplet of an incompletely wetting liquid under a horizontal force. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1999, vol. 39, no. 7, pp. 1163–1167.
- [13] Boryan Radoev, Klaus W. Stükelhuber, Roumen Tsekov, Philippe Letocart. Wetting film dynamics and stability. *Col. Interface Sci. Ser. 3*, 2007, pp. 151–172.
- [14] Bing Dai, L., Leal Gary, Redondo Antonio. Disjoining pressure for nonuniform thin films. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, p. 061602.
- [15] Aliev I.N., Yurchenko S.O. Nonlinear waves spreading over the nonviscous conductive liquid surface in the electric field. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2009, no. 5, pp. 137–148 (in Russ.).
- [16] Aliev I.N., Yurchenko S.O. Perturbation transition of the charged interface of non-miscible nonviscous liquids in the clearance between two electrodes. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2010, no. 5, pp. 156–166 (in Russ.).
- [17] Saramago B. Thin liquid wetting films. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 330–340.
- [18] Ren W., Hu D., E W. Continuum models for the contact line problem. *Physics of Fluids*, 2010, vol. 22, no. 10, pp. 102103–102119.
- [19] Ajoy Patra, Dipankar Bandyopadhyay, Gaurav Tomar, Ashutosh Sharma, Gautam Biswas. Instability and dewetting of ultrathin solid viscoelastic films on homogeneous and heterogeneous substrates. *Journal of Chemical Physics*, 2011, vol. 134, no. 6, pp. 064705–064711.
- [20] Boinovich L., Emelyanko A. Wetting and surface forces. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2011, vol. 165, pp. 60–69.
- [21] Tsekov R., Toshev B.V. Capillary pressure of van der Waals liquid nanodrops. *Colloid Journal*, 2012, vol. 74, no. 2, pp. 266–268.
- [22] Colosqui C.E., Kavousanakis M.E., Papathanasiou A.G., Kevrekidis I.G. Mesoscopic model for microscale hydrodynamics and interfacial phenomena: slip, films, and contact-angle hysteresis. *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2013, vol. 87, no. 1, p. 013302.
- [23] Nikolov A., Wasan D. Wetting-dewetting films: the role of structural forces. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2014, vol. 206, pp. 207–221.
- [24] Boinovich L., Emelyanko A. The prediction of wettability of curved surfaces on the basis of the isotherms of the disjoining pressure. *Col. Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*, 2011, vol. 383, pp. 10–16.
- [25] Popescu M.N., Oshanin G., Dietrich S., Cazabat A.-M. Precursor films in wetting phenomena. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 2012, vol. 24, p. 243102.
- [26] Moulton D.E., Lega J. Effect of disjoining pressure in a thin film equation with nonuniform forcing. *European J. of Applied Math.*, 2013, vol. 24, pp. 887–920.
- [27] Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2013, vol. 45, pp. 269–292.
- [28] David N. Sibley, Andreas Nold, Nikos Savva, Serafim Kalliadasis. A comparison of slip, disjoining pressure, and interface formation models for contact line motion through asymptotic analysis of thin two-dimensional droplet spreading. *J. of Engineering Math.*, 2014, August.
- [29] Kaustav Chaudhury, Palash V. Acharya, Suman Chakraborty. Influence of disjoining pressure on the dynamics of steadily moving long bubbles inside narrow cylindrical capillaries. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, p. 053002.
- [30] Bazarov I.P. Термодинамика [Thermodynamics]. St. Petersburg, Lan’ Publ., 2010. 377 p.

[31] Ruckenstein E., Dunn C.S. Slip velocity during Wetting of Solids. *J. Col. Interface Sci.* 1977, vol. 59, no. 1, pp. 135–138.

Статья поступила в редакцию 25.05.2015

Романов Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Romanov A.S. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Physics department, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Семиколенов Андрей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Semikolenov A.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Physics department, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

#### **Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Романов А.С., Семиколенов А.В. Форма свободной поверхности жидкости, находящейся в равновесии со своей смачивающей пленкой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 122–133.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-122-133

#### **Please cite this article in English as:**

Romanov A.S., Semikolenov A.V. The form of the free liquid surface in equilibrium with its wetting film. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 1, pp. 122–133.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-122-133

---

### **Вниманию авторов журнала**

#### **“Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”**

Редакция журнала принимает к рассмотрению статьи, оформленные в соответствии с действующими правилами, по следующей тематике

#### **Математика**

- Вещественный, комплексный и функциональный анализ
- Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- Математическая физика
- Теория вероятностей и математическая статистика
- Математическая логика, алгебра и теория чисел
- Вычислительная математика