УДК 517.938+517.977

А. Н. Канатников

УПРАВЛЯЕМО ИНВАРИАНТНЫЕ КОМПАКТЫ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С УПРАВЛЕНИЕМ

Для дискретных систем с управлением предложены методы локализации управляемо инвариантных компактов. Описаны свойства соответствующих локализирующих множеств. Построены локализующие множества для управляемо инвариантных компактов системы Хенона с управлением.

E-mail: Skipper@bmstu.ru

Ключевые слова: дискретная система, управление, управляемо инвариантное множество, локализующее множество.

Рассмотрим дискретную систему с управлением вида

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n), \tag{1}$$

где $F\colon X \times U \to X$ — отображение, непрерывное на X при каждом фиксированном $u \in U$. Для таких систем поставим задачу локализации положительно и отрицательно управляемо инвариантных множеств с дополнительным условием компактности. Под локализацией таких множеств мы понимаем построение множеств в фазовом пространстве X системы, содержащих все указанные множества.

В работе функциональный метод локализации, ранее разработанный для непрерывных и дискретных динамических систем [1–5], переносится на дискретные системы с управлением. Установлены свойства локализирующих множеств. Построены локализующие множества для управляемо инвариантных компактов системы Хенона с управлением.

Локализирующие множества. Множество M в фазовом пространстве X системы (1) называется положительно управляемо инвариантным, если существует такая обратная связь $h\colon X \to U$, что для любой точки $x_0 \in M$ положительная полутраектория замкнутой системы $x_{n+1} = F(x_n, h(x_n))$, начинающаяся в точке x_0, целиком содержится в M [6, 7].

Дискретный характер времени позволяет понятие положительно управляемо инвариантного множества свести к некоторому одношаговому условию.

Лемма 1. *Множество M в фазовом пространстве X системы* (1) *положительно управляемо инвариантно тогда и только тогда*, *когда*

$$M \subset \bigcup_{u \in U} F_u^{-1}(M) = F_\cup^{-1}(M), \tag{2}$$

где $F_u^{-1}(M) = \{x \in X \colon F(x,u) \in M\}$.

Замечание 1. Лемма 1 — аналог утверждения, доказанного Бертсекасом [8].

Ограничимся рассмотрением положительно управляемо инвариантных множеств с дополнительным свойством компактности — положительно управляемо инвариантных компактов. Поставим задачу оценки положения положительно управляемо инвариантных компактов систем с управлением, понимая под этим построение локализирующих множеств, т.е. таких множеств в фазовом пространстве системы, которые включают в себя все положительно управляемо инвариантные компакты [2–4].

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$. Введем множества

$$\Sigma_\varphi^+ = \Big\{x \in X \colon \sup_{u \in U} \varphi(F(x,u)) - \varphi(x) \geq 0\Big\},$$
$$\Sigma_\varphi^- = \Big\{x \in X \colon \inf_{u \in U} \varphi(F(x,u)) - \varphi(x) \leq 0\Big\}.$$

Для множества $Q \subset X$ положим

$$\varphi_{\inf}^r(Q) = \inf_{x \in \Sigma_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x), \qquad \varphi_{\sup}^r(Q) = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x).$$

Теорема 1. *Любой положительно управляемо инвариантный компакт системы* (1), *содержащийся в* $Q \subset X$, *содержится в множестве*

$$\Omega_\varphi^r(Q) = \{x \in Q \colon \varphi_{\inf}^r(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}^r(Q)\}.$$

Доказательство. Пусть K — положительно управляемо инвариантный компакт, содержащийся в Q. Функция φ достигает на этом компакте наибольшего значения в некоторой точке $x^* \in K$. Согласно условию положительной инвариантности K, существует такое управление $u^* \in U$, что $F(x^*, u^*) \in K$. Отсюда вытекает, что $\varphi(F(x^*, u^*)) \leq \varphi(x^*)$. Следовательно, $x^* \in \Sigma_\varphi^-$ и для любой точки $x \in K$

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^*) \leq \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x) = \varphi_{\sup}^r(Q).$$

Аналогично доказывается неравенство $\varphi(x) \geq \varphi_{\inf}^r(Q)$, $x \in K$. Оба неравенства означают, что $K \subset \Omega_\varphi^r(Q)$. Теорема доказана.

Понятие отрицательно управляемо инвариантного множества не так очевидно (с точки зрения задач теории управления), как понятие положительно управляемо инвариантного множества. Можно предложить, по крайней мере, три варианта определения отрицательно управляемо инвариантного множества:

1) как множества M, для которого существует такая обратная связь $h\colon X \to U$, что для замнутой системы $x_{n+1} = F(x_n, h(x_n))$ любая отрицательная полутраектория, заканчивающаяся в x_0, целиком содержится в M;

2) как множества M, для которого любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такую последовательность управлений u_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$, что для системы (1) любая отрицательная полутраектория, заканчивающаяся в x_0 и определяемая соотношениями $x_{n+1} = F(x_n, u_n)$, $n = -1, -2, \ldots$, целиком содержится в M;

3) как множества M, для которого любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такое управление $u \in U$, что множество $F_u^{-1}(x_0)$ целиком содержится в M.

При выборе определения следует исходить из того, что если система обратима, то отрицательно управляемо инвариантное множество исходной системы должно быть положительно управляемо инвариантным для обратной системы. Уточним это требование. Если для каждого $u \in U$ отображение $x \to F(x, u)$ является гомеоморфизмом, то систему (1) назовем обратимой. При этом система

$$x_{n+1} = H(x_n, u_n), \tag{3}$$

где отображение H определено соотношением $H(F(x, u), u) = x$, называется обратной системе (1).

Лемма 2. *Для обратимой системы* (1) *следующие условия эквивалентны*:

1) *множество $M \subset X$ является положительно управляемо инвариантным для системы* (3), *обратной системе* (1);

2) *любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такую последовательность управлений u_{-n}, $n = 1, 2, \ldots$, что для системы* (1) *соответствующая отрицательная полутраектория, заканчивающаяся в x_0, целиком содержится в M*;

3) *любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такое управление $u \in U$, что $F_u^{-1}(x_0) \subset M$.*

Доказательство. Условие 3 в силу того, что при любом фиксированном $u \in U$ отображение $x \to F(x, u)$ биективно, равносильно условию: любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такое управление $u \in U$, что $H(x_0, u) \in M$, или $x_0 \in H_u^{-1}(M)$. Кратко последнее условие можно записать так: $x_0 \in \bigcup\limits_{u \in U} H_u^{-1}(M)$. Это значит, что условие 3 эквивалентно условию 1 положительной управляемой инвариантности M для обратной системы.

Условие 2, переформулированное для обратной системы (3), звучит так: любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такую последовательность управлений u_n, $n = 1, 2, \ldots$, что последовательность точек x_n, определяемая соотношениями $x_n = H(x_{n-1}, u_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ (положительная полутраектория обратной системы, начинающаяся в x_0), целиком содержится в M. Из этого условия сразу следует, что при $u = u_1$ имеем $x_1 = H(x_0, u) \in M$, откуда $x_0 \in F_u^{-1}(M)$. Следовательно, $M \subset F_{\mathrm{U}}^{-1}(M)$, т.е. множество M является положительно управляемо инвариантным для обратной системы.

Наоборот, любое положительно управляемо инвариантное множество обратной системы удовлетворяет условию 2. Действительно, для произвольно выбранной точки $x_0 \in M$ существует управление u_0, при котором $x_1 = H(x_0, u_0) \in M$. Для точки x_1 существует управление u_1, при котором $x_2 = H(x_1, u_1) \in M$. Продолжая так и далее, получаем последовательность управлений u_n, которой соответствует положительная полутраектория обратной системы, целиком лежащая в M. Остается отметить, соотношения $x_{k+1} = H(x_k, u_k)$ эквивалентны соотношениям $x_k = F(x_{k+1}, u_k)$. Полагая $\tilde{x}_{-n} = x_n$, $\tilde{u}_{-n} = u_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, заключаем, что последовательности управлений $\tilde{u}_{-n}$ соответствует отрицательная полутраектория $\tilde{x}_{-n}$ прямой системы, заканчивающаяся в точке x_0 и целиком содержащаяся в множестве M.

З а м е ч а н и е 2. В случае обратимой системы (1) условие существования для множества $M \subset X$ обратной связи, при которой любая отрицательная полутраектория замкнутой системы, заканчивающаяся в x_0, целиком содержится в M, оказывается не эквивалентным условию положительной управляемой инвариантности M для обратной системы (3). Действительно, указанная обратная связь может быть устроена так, что замкнутая система $x_{n+1} = F(x_n, u(x_n))$ не будет обратимой. В этом случае замкнутая система будет иметь несколько отрицательных полутраекторий, заканчивающихся в точке x_0, и уже в силу этого обстоятельства указанное условие не эквивалентно условию положительной управляемой инвариантности M для обратной системы. Таким образом, первый из трех предложенных вариантов определения отрицательно управляемо инвариантного множества не удовлетворяет требованию обратимости этого понятия для обратимых систем.

Проведенный анализ показывает, что остается два кандидата на определение отрицательно управляемо инвариантного множества: второй и третий. Третий кандидат оказывается предпочтительнее, поскольку представляет собой одношаговую процедуру, в то время как второй вариант к одношаговой процедуре не сводится.

Множество $M \subset X$ назовем отрицательно управляемо инвариантным для системы (1), если любой точке $x_0 \in M$ можно поставить в соответствие такое управление $u \in U$, что множество $F_u^{-1}(x_0)$ целиком содержится в M.

Лемма 3. *Множество $M \subset X$ отрицательно управляемо инвариантно для системы* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$M \subset \hat{F}_{\cup}(M), \tag{4}$$

где $\hat{F}_{\cup}(M) = \bigcup\limits_{u \in U} \hat{F}_u(M)$, а $\hat{F}_u(M)$ — множество точек $x \in X$, для которых $F_u^{-1}(x) \subset M$.

Доказательство. Условие, что $F_u^{-1}(x_0)$ целиком содержится в M можно записать в виде $x_0 \in \hat{F}_u(M)$. С учетом этого отрицательная управляемая инвариантность множества M означает, что для любой точки $x_0 \in M$ существует такое управление $u \in U$, что $x_0 \in \hat{F}_u(M)$. Это эквивалентно включению (4). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что

$$\hat{F}_u(M) = X \setminus F(X \setminus M, u).$$

Далее ограничимся рассмотрением отрицательно управляемо инвариантных множеств с дополнительным условием компактности — отрицательно управляемо инвариантных компактов.

Введем в рассмотрение множества

$$\check{\Sigma}_{\varphi}^{+} = \Big\{ x \in X \colon \inf_{u \in U} \sup_{z \in F_u^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \le 0 \Big\},$$

$$\check{\Sigma}_{\varphi}^{-} = \Big\{ x \in X \colon \sup_{u \in U} \inf_{z \in F_u^{-1}(x)} \varphi(z) - \varphi(x) \ge 0 \Big\}.$$

Если $F_u^{-1}(x) = \varnothing$, то полагаем

$$\sup_{z \in F_u^{-1}(x)} \varphi(z) = -\infty, \qquad \inf_{z \in F_u^{-1}(x)} \varphi(z) = \infty,$$

так что в этом случае $x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{+}$ и $x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{-}$.

Для произвольного множества $Q \subset X$ положим

$$\varphi_{\inf}^{l}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{-} \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}^{l}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}_{\varphi}^{+} \cap Q} \varphi(x).$$

Теорема 2. *Любой отрицательно управляемо инвариантный компакт системы* (1), *содержащийся в множестве $Q \subset X$, содержится в множестве*

$$\Omega_{\varphi}^{l}(Q) = \big\{ x \in Q \colon \varphi_{\inf}^{l}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}^{l}(Q) \big\}.$$

Доказательство. Пусть K — отрицательно управляемо инвариантный компакт, содержащийся в Q. Непрерывная функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ достигает на K своего наибольшего значения в точке $x^* \in K$. Поскольку K — отрицательно управляемо инвариантное множество, существует такое управление u^*, что $F_{u^*}^{-1}(x^*) \subset K$. Если $F_{u^*}^{-1}(x^*) = \varnothing$, то точка x^* попадает в множество $\check{\Sigma}_\varphi^+$. Если же $F_{u^*}^{-1}(x^*) \neq \varnothing$, то для любой точки $z \in F_{u^*}^{-1}(x^*)$ имеем $z \in K$, так что выполняется неравенство $\varphi(z) \leq \varphi(x^*)$. Это означает, что

$$\sup_{z \in F_{u^*}^{-1}(x^*)} \varphi(z) - \varphi(x^*) \leq 0.$$

Следовательно, $x^* \in \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q$ и для любой точки $x \in K$

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^*) \leq \sup_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x) = \varphi_{\sup}^l(Q).$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(x) \geq \varphi(x_*) \geq \varphi_{\inf}^l(Q)$, $x \in K$.

Таким образом, для каждой точки $x \in K$ верно двойное неравенство $\varphi_{\inf}^l(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}^l(Q)$, означающее, что $x \in \Omega_\varphi^l(Q)$. Тем самым доказано, что произвольно выбранный отрицательно управляемо инвариантный компакт K целиком содержится в $\Omega_\varphi^l(Q)$. Теорема доказана.

Для системы (1) множество $M \subset X$ назовем управляемо инвариантным, если оно одновременно и положительно управляемо инвариантно, и отрицательно управляемо инвариантно.

Для произвольной непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ положим

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^- \cap \Sigma_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x).$$

Теорема 3. *Любой управляемо инвариантный компакт системы* (1), *содержащийся в множестве* $Q \subset X$, *содержится в множестве*

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Доказательство. Пусть K — управляемо инвариантный компакт. Функция φ достигает на этом компакте наибольшего значения в некоторой точке $x^* \in K$. Согласно условию положительной инвариантности K, существует такое управление $u_1^* \in U$, что $F(x^*, u_1^*) \in K$, откуда $\varphi(F(x^*, u_1^*)) \leq \varphi(x^*)$. Следовательно, $x^* \in \Sigma_\varphi^-$. Кроме того, согласно условию отрицательной инвариантности K, существует такое управление $u_2^* \in U$, что $F_{u_2^*}^{-1}(x^*) \subset K$. Отсюда заключаем, что $\varphi(z) \leq \varphi(x^*)$ при $z \in F_{u_2^*}^{-1}(x^*)$ и что $x^* \in \check{\Sigma}_\varphi^+$. Итак, $x^* \in \Sigma_\varphi^- \cap \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q$, поэтому для любой точки $x \in K$

$$\varphi(x) \le \varphi(x^*) \le \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap \check{\Sigma}_\varphi^+ \cap Q} \varphi(x) = \varphi_{\sup}(Q).$$

Аналогично доказывается неравенство $\varphi(x) \ge \varphi_{\inf}(Q)$, $x \in K$. Оба неравенства означают, что $K \subset \Omega_\varphi(Q)$. Теорема доказана.

Свойства локализирующих множеств. Свойства локализирующих множеств для управляемо инвариантных компактных множеств дискретных систем с управлением во многом схожи со свойствами локализирующих множеств для непрерывных и дискретных систем без управления [2–5]. Установим основные свойства.

Свойство 1. *Пересечение любого семейства локализирующих множеств для (положительно, отрицательно) управляемо инвариантных компактов системы* (1) *является локализирующим множеством.*

Свойство 2. *Пусть функция φ непрерывна на X и $\psi(x) = h(\varphi(x))$, $x \in X$, где $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго монотонная функция. Тогда для любого множества $Q \subset X$ имеем $\Omega_\varphi^r(Q) = \Omega_\psi^r(Q)$, $\Omega_\varphi^l(Q) = \Omega_\psi^l(Q)$, $\Omega_\varphi(Q) = \Omega_\psi(Q)$. В частности, это верно, если $h(t) = at + b$, $a \ne 0$.*

Доказательство. Доказательства всех трех случаев утверждения различаются незначительно. Поэтому ограничимся доказательством в случае положительно управляемо инвариантных компактов.

Если функция h — возрастающая, то неравенство $\psi(x_1) \le \psi(x_2)$ эквивалентно неравенству $\varphi(x_1) \le \varphi(x_2)$. Следовательно, эквивалентны неравенства

$$\inf_{u \in U} \psi(F(x,u)) \le \psi(x) \quad \text{и} \quad \inf_{u \in U} \varphi(F(x,u)) \le \varphi(x).$$

А это означает, что множества Σ_φ^- и Σ_ψ^- совпадают. Поэтому

$$\psi_{\sup}^r(Q) = \sup_{x \in \Sigma_\psi^- \cap Q} \psi(x) = \sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} h(\varphi(x)) =$$
$$= h\Big(\sup_{x \in \Sigma_\varphi^- \cap Q} \varphi(x)\Big) = h\big(\varphi_{\sup}^r(Q)\big).$$

Аналогично устанавливается равенство $\psi_{\inf}^r(Q) = h\big(\varphi_{\inf}^r(Q)\big)$. Таким образом, неравенства $\psi_{\inf}^r(Q) \le \psi(x) \le \psi_{\sup}^r(Q)$ эквивалентны неравенствам $\varphi_{\inf}^r(Q) \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}^r(Q)$. Тем самым доказано, что в случае возрастающей функции h множества $\Omega_\psi^r(Q)$ и $\Omega_\varphi^r(Q)$ совпадают.

Рассуждения в случае убывающей функции аналогичны. В этом случае $\Sigma_\psi^- = \Sigma_\varphi^+$ и $\Sigma^+{}_\psi = \Sigma_\varphi^-$. При этом

$$\psi_{\sup}^r(Q) = h\big(\varphi_{\inf}^r(Q)\big), \quad \psi_{\inf}^r(Q) = h\big(\varphi_{\sup}^r(Q)\big).$$

В результате неравенства $\psi_{\inf}^r(Q) \le \psi(x) \le \psi_{\sup}^r(Q)$ можно переписать в виде $h\big(\varphi_{\sup}^r(Q)\big) \le h(\varphi(x)) \le h\big(\varphi_{\inf}^r(Q)\big)$, что эквивалентно неравенствам $\varphi^r_{\inf}(Q) \le \varphi(x) \le \varphi^r_{\sup}(Q)$. Тем самым совпадение множеств Ω^r_ψ и Ω^r_φ доказано и в случае убывающей функции h. Свойство доказано.

Свойство 3. *Если непрерывная функция* $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ *достигает на* X *точной верхней грани в некоторой точке* $x^* \in Q$, *то* $\varphi^r_{\sup}(Q) = \varphi^l_{\sup}(Q) = \varphi_{\sup}(Q) = \varphi(x^*)$. *Если функция* φ *достигает на* X *точной нижней грани в некоторой точке* $x_* \in Q$, *то* $\varphi^r_{\inf}(Q) = \varphi^l_{\inf}(Q) = \varphi_{\inf}(Q) = \varphi(x_*)$.

Доказательство. Второе утверждение сводится к первому, если поменять знак локализирующей функции. Кроме того, доказательства для значений $\varphi^r_{\sup}(Q)$, $\varphi^l_{\sup}(Q)$, $\varphi_{\sup}(Q)$ аналогичны. Поэтому ограничимся лишь первым из них. Если функция φ достигает на X точной верхней грани в некоторой точке $x^* \in Q$, то для любого $u \in U$ выполняется неравенство $\varphi(F(x^*, u)) \le \varphi(x^*)$. Следовательно,

$$\inf_{u \in U} \varphi(F(x^*, u)) - \varphi(x^*) \le 0,$$

и точка x^* принадлежит множеству $\Sigma^-_\varphi \cap Q$. Ясно, что

$$\varphi^r_{\sup}(Q) = \sup_{x \in \Sigma^-_\varphi \cap Q} \varphi(x) \ge \varphi(x^*).$$

Но верно и противоположное неравенство, поскольку $\varphi(x^*)$ — точная верхняя грань функции φ на X. Значит, $\varphi^r_{\sup}(Q) = \varphi(x^*)$. Свойство доказано.

Для систем с управлением существуют аналоги свойств, установленных для дискретных системы без возмущений и связанных со сдвигами локализирующих множеств вдоль траекторий системы [3, 5].

Свойство 4. *Любое положительно управляемо инвариантное множество, содержащееся в множестве* $G \subset X$, *содержится и в множестве* $F^{-1}_\cup(G)$. *В частности, если множество* G *содержит все положительно управляемо инвариантные компакты системы* (1), *то и множество* $F^{-1}_\cup(G)$ *содержит все положительно управляемо инвариантные компакты системы.*

Доказательство. Если $K \subset G$ — положительно управляемо инвариантное множество, то, согласно (2), имеем

$$K \subset F^{-1}_\cup(K) \subset F^{-1}_\cup(G),$$

поскольку при $G_1 \subset G_2$ для любого $u \in U$ имеем $F^{-1}_u(G_1) \subset F^{-1}_u(G_2)$ и, следовательно, выполняется включение $F^{-1}_\cup(G_1) \subset F^{-1}_\cup(G_2)$. Свойство доказано.

Свойство 5. *Если множество* $G \subset X$ *содержит все положительно управляемо инвариантные компакты системы* (1), *то и множество* $\hat{F}_\cap(G) = \bigcap\limits_{u \in U} \hat{F}_u(G)$ *содержит все положительно управляемо инвариантные компакты этой системы.*

Доказательство. Пусть K — произвольный положительно управляемо инвариантный компакт системы (1). Тогда верно включение $K \subset F_{\cup}^{-1}(K)$. Выберем точку $x_0 \in F_{\cup}^{-1}(K)$. Тогда множество $K' = \{x_0\} \cup K$ является компактом. В то же время $K' \subset F_{\cup}^{-1}(K) \subset \subset F_{\cup}^{-1}(K')$, так что K' — положительно управляемо инвариантный компакт системы (1). Следовательно, $K' \subset G$. Тем самым доказано, что любая точка $x_0 \in F_{\cup}^{-1}(K)$ принадлежит множеству G, т.е. $F_{\cup}^{-1}(K) \subset G$. Это включение означает, что для любого управления $u \in U$ выполняется включение $F_u^{-1}(K) \subset G$, что эквивалентно условию $K \subset \hat{F}_u(G)$. Итак, для любого $u \in U$ имеем $K \subset \hat{F}_u(G)$. Это значит, что $K \subset \bigcap\limits_{u \in U} \hat{F}_u(G) = \hat{F}_{\cap}(G)$. Свойство доказано.

Свойство 6. *Любое отрицательно управляемо инвариантное множество системы* (1)*, содержащееся в множестве $G \subset X$, содержится и в множестве $\hat{F}_{\cup}(G)$. В частности, если множество G содержит все отрицательно управляемо инвариантные компакты системы* (1)*, то и множество $\hat{F}_{\cup}(G)$ содержит все отрицательно управляемо инвариантные компакты системы.*

Доказательство. Пусть $K \subset G$ — отрицательно управляемо инвариантное множество. Тогда, согласно (4), имеем

$$K \subset \hat{F}_{\cup}(K) \subset \hat{F}_{\cup}(G),$$

поскольку при $G_1 \subset G_2$ для любого $u \in U$ имеем $\hat{F}_u(G_1) \subset \hat{F}_u(G_2)$ и, следовательно, $\hat{F}_{\cup}(G_1) \subset \hat{F}_{\cup}(G_2)$. Свойство доказано.

Свойство 7. *Пусть дискретная система* (1) *определяется отображением F, инъективным при любом фиксированном значении $u \in U$. Тогда если множество G содержит все отрицательно управляемо инвариантные компакты рассматриваемой системы, то и множество*

$$F_{\cap}^{-1}(G) = \bigcap_{u \in U} F_u^{-1}(G)$$

содержит все отрицательно управляемо инвариантные компакты.

Доказательство. Условие инъективности отображения F при фиксированном u, в частности, означает, что для любого множества A верно включение $F(A, u) \subset \hat{F}_u(A)$. Отсюда следует, что $F(A \times \times U) \subset \hat{F}_{\cup}(A)$.

Пусть K — отрицательно управляемо инвариантный компакт системы (1). Следовательно, верно включение $K \subset \hat{F}_{\cup}(K)$. Выберем произвольную точку $x_0 \in F(K \times U)$. Тогда множество $K' = K \cup \{x_0\}$ компактно. Кроме того, поскольку $K' \subset \hat{F}_{\cup}(K) \subset \hat{F}_{\cup}(K')$, компакт K является отрицательно управляемо инвариантным множеством. Следовательно, $K' \subset G$, откуда $x_0 \in G$. Итак, доказано, что множество $F(K \times U)$ целиком содержится в множестве G. Это заключение можно представить как условие, что $F(K,u)\subset G$ при любом $u\in U$. Другими словами, $K\subset F_u^{-1}(G)$ при любом $u\in U$. Следовательно, $K\subset F_\cap^{-1}(G)$. Свойство доказано.

Свойство 8. *Любое управляемо инвариантное множество, содержащееся в множестве $G\subset X$, содержится и в множествах $F_\cup^{-1}(G)$ и $\hat F_\cup(G)$. В частности, если множество G содержит все управляемо инвариантные компакты системы* (1), *то множества $F_\cup^{-1}(G)$, $\hat F_\cup(G)$ и $F_\cup^{-1}(G)\cap\hat F_\cup(G)$ также содержат все управляемо инвариантные компакты системы.*

Доказательство. Если управляемо инвариантное множество $K\subset X$ содержится в множестве G, то оно, как положительно управляемо инвариантное, содержится в множестве $F_\cup^{-1}(G)$ (свойство 4), а как отрицательно управляемо инвариантное — в множестве $\hat F_\cup(G)$ (свойство 6). В частности, множество K содержится в пересечении этих множеств $F_\cup^{-1}(G)\cap\hat F_\cup(G)$. Свойство доказано.

Система Хенона с управлением. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= by_n - x_n^2 + u,\\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \tag{5}$$

где $b>0$ — известный параметр, $u\in[a_*,\ a^*]$ — управление.

Система (5) задается отображением

$$F(x,y,u)=\begin{pmatrix} by-x^2+u\\ x\end{pmatrix},\quad X=\mathbb{R}^2,\quad U=[a_*,\ a^*].$$

Для системы (5) рассмотрим задачу локализации.

Локализация положительно инвариантных компактов. В качестве локализирующей рассмотрим линейную функцию $\varphi(x,y)=Dx+Ey$. Тогда $\varphi(F(x,y,u))=D(by-x^2+u)+Ex$. Множество Σ_φ^- описывается неравенством

$$\inf_{u\in[u_*,\,u^*]}\big(D(by-x^2+u)+Ex-Dx-Ey\big)\le 0,$$

а множество Σ_φ^+ — неравенством

$$\sup_{u\in[u_*,\,u^*]}\big(D(by-x^2+u)+Ex-Dx-Ey\big)\ge 0.$$

Обозначим

$$u^*=\sup_{u\in[a_*,\,a^*]}Du,\quad u_*=\inf_{u\in[a_*,\,a^*]}Du.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma_\varphi^- &= \{(x;y)\colon \big(D(by-x^2)+Ex-Dx-Ey+u_*\big)\le 0\},\\ \Sigma_\varphi^+ &= \{(x;y)\colon \big(D(by-x^2)+Ex-Dx-Ey+u^*\big)\ge 0\}.\end{aligned}$$

Для нахождения значений $\varphi^r_{\inf}$ и $\varphi^r_{\sup}$ получаем следующие оптимизационные задачи:

$$\begin{cases} Dx + Ey \to \sup, \\ (Db - E)y \le Dx^2 - (E - D)x - u_*; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} Dx + Ey \to \inf, \\ (Db - E)y \ge Dx^2 - (E - D)x - u^*. \end{cases} \tag{7}$$

Задачи (6), (7) детально исследованы в [10]. При $D = 0$ эти задачи имеют тривиальные решения $+\infty$ и $-\infty$. Поэтому можно считать, что $D \ne 0$, а согласно свойству 2 можно ограничиться случаем $D = -1$. В этом случае $u_* = -a^*$, $u^* = -a_*$, а задачи (6), (7) сводятся к следующим:

$$\begin{cases} -x + Ey \to \sup, \\ x^2 + (E+1)x - (b+E)y - a^* \le 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} -x + Ey \to \inf, \\ x^2 + (E+1)x - (b+E)y - a_* \ge 0. \end{cases} \tag{9}$$

Задача (9) имеет тривиальное решение $\varphi^r_{\inf} = -\infty$. Задача (8) имеет тривиальное решение $\varphi^r_{\sup} = +\infty$ при $E \le -b$ и при $E \ge 0$. Остается случай $-b < E < 0$, при котором

$$\varphi^r_{\sup} = -\frac{4E^2a^* + (E^2 - b)^2}{4E(b+E)}.$$

Таким образом, при каждом значении $E \in (-b,\ 0)$ имеем локализирующее множество

$$-x + Ey \le -\frac{4E^2a^* + (E^2 - b)^2}{4E(b+E)}. \tag{10}$$

Преобразуем неравенство (10):

$$x \ge Ey + \frac{4E^2a^* + (E^2 - b)^2}{4E(b+E)} = -\lambda y - \frac{4\lambda^2 a_* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)},$$

где параметр $\lambda = -E$ может принимать любое значение на интервале $(0,\ b)$. Из этого представления получаем неравенство, описывающее пересечение семейства локализирующих множеств:

$$x \ge -\min_{\lambda \in (0,\, b)} \left(\lambda y + \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)} \right).$$

Используя семейство локализирующих множеств (10), на основании свойства 4 можно получить семейство новых локализирующих множеств. Пусть G_λ, $\lambda \in (0,\, b)$, — множество, описываемое неравенством

$$-x - \lambda y \leq \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}, \tag{11}$$

которое получается из неравенства (10) в результате замены параметра $\lambda = -E$. Множество $F_u^{-1}(G_\lambda)$ описывается неравенством, которое получается, если в неравенстве (11) переменные x и y заменить координатами отображения F:

$$-(by - x^2 + u) - \lambda x \leq \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}. \tag{12}$$

Неравенство (12) эквивалентно следующему:

$$x^2 - \lambda x - by \leq u + \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}.$$

Объединение $F_\cup^{-1}(G_\lambda)$ множеств $F_u^{-1}(G_\lambda)$ по всем $u \in U = [a_*,\ a^*]$ описывается неравенством

$$x^2 - \lambda x - by \leq \sup_{u \in U} u + \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)},$$

или

$$x^2 - \lambda x - by \leq a^* + \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)}. \tag{13}$$

Из неравенств (13) можно получить неравенство, описывающее пересечение множеств $F_\cup^{-1}(G_\lambda)$ по всем $\lambda \in (0,\, b)$:

$$y \geq \max_{\lambda \in (0,b)} \left(\frac{x^2 - \lambda x}{b} - \frac{a^*}{b} - \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 - b)^2}{4\lambda(b-\lambda)} \right). \tag{14}$$

На рис. 1 изображены траектория системы Хенона (5) с параметрами $a_* = 1{,}39$, $a^* = 1{,}41$, $b = 0{,}3$ и граница локализирующего множества (14). Траектория построена при постоянном управлении $u = 1{,}4$.

Локализация отрицательно инвариантных компактов. Поскольку система Хенона (5) является обратимой, локализация ее отрицательно инвариантных компактов сводится к локализации положительно инвариантных компактов обратной системы

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= -\frac{u}{b} + \frac{x_n}{b} + \frac{y_n^2}{b}. \end{aligned} \tag{15}$$

Заменой переменных $\xi = -\dfrac{y}{b}$, $\eta = -\dfrac{x}{b}$ система (15) сводится к той же системе Хенона с параметрами $\tilde{u} = u/b^2$, $\tilde{b} = 1/b$, причем управление изменяется на отрезке $a_*/b^2,\ a^*/b^2$. Записывая локализирующее множество для положительно инвариантных компактов обратной системы и переходя к исходным переменным и параметрам, получаем семейство локализирующих множеств

$$\lambda x + y \le \frac{4\lambda^2 a^* + (\lambda^2 b - 1)^2}{4\lambda(1 - b\lambda)}, \quad \lambda \in \left(0,\ \frac{1}{b}\right).$$

Пересечение этого семейства описывается неравенством

$$y \le \frac{1}{b} \min_{\mu \in (0,\,1)} \left(-\mu x + \frac{4\mu^2 a^* + (\mu^2 - b)^2}{4\mu(1 - \mu)} \right).$$

Используя семейство (13) локализирующих множеств для положительно инвариантных компактов, вычисленное для обратной системы, в результате перехода к исходным переменным и параметрам получаем семейство локализирующих множеств для отрицательно инвариантных компактов системы (5):

$$y^2 + \mu y + x \le a^* + \frac{4\mu^2 a^* + (\mu^2 - b)^2}{4\mu(1 - \mu)}.$$

Пересечение этого семейства описывается неравенством

$$x \le a^* - y^2 + \min_{\mu \in (0,1)} \left(-\mu y + \frac{4\mu^2 a^* + (\mu^2 - b)^2}{4\mu(1 - \mu)} \right). \tag{16}$$

На рис. 2 изображены траектория системы Хенона (5) с параметрами $a_* = 1{,}38$, $a^* = 1{,}42$, $b = 0{,}3$ и граница локализирующего множества (16). Траектория построена при чередующемся управлении: $u_n = 1{,}38$ при нечетном n и $u_n = 1{,}42$ при четном n.

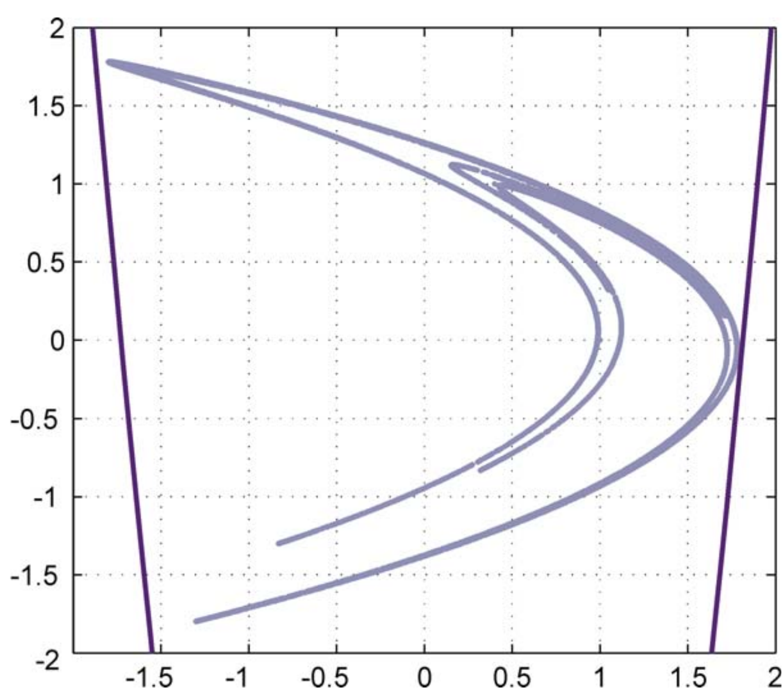

Рис. 1. Траектория управляемой системы Хенона и локализирующее множество (14) для положительно инвариантных компактов

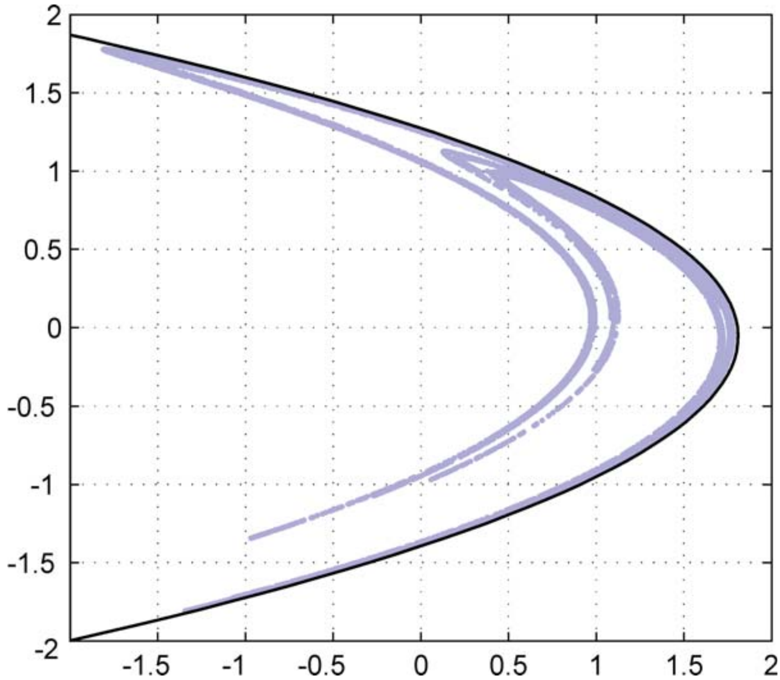

Рис. 2. Траектория управляемой системы Хенона и локализирующее множество (16) для отрицательно инвариантных компактов

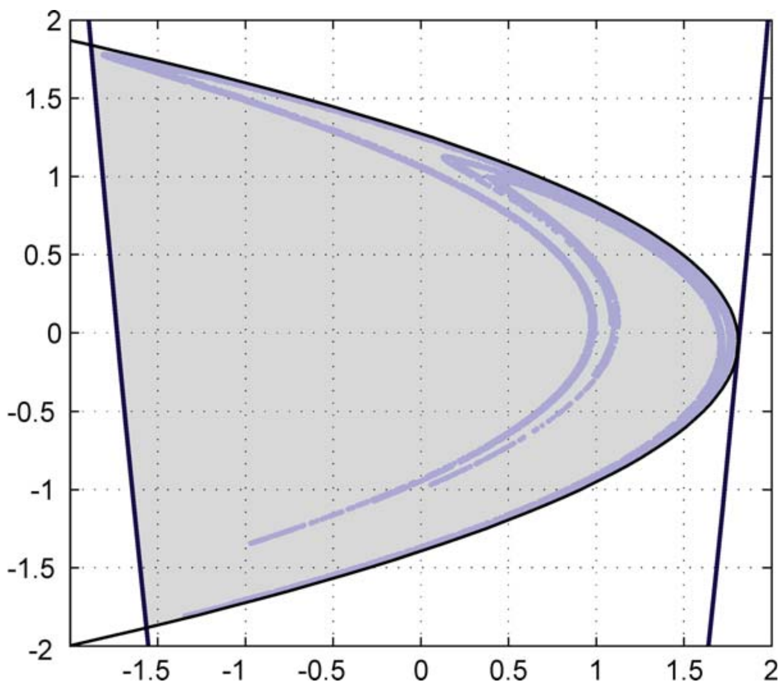

Рис. 3. Траектория управляемой системы Хенона и локализирующее множество для инвариантных компактов

Локализация инвариантных компактов. Локализирующие множества для инвариантных компактов системы Хенона с управлением (5) получаем как пересечение локализирующих множеств для положительно инвариантных компактов и отрицательно инвариантных компактов. На рис. 3 изображены траектория системы (5) с параметрами $a_* = 1{,}38$, $a^* = 1{,}42$ и локализирующее множество для инвариантных компактов, полученное пересечением множеств (14) и (16). Траектория системы получена при чередующемся управлении: $u_n = 1{,}38$ при нечетном n и $u_n = 1{,}42$ при четном n. Отметим, что полученная локализация является компактной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К р и щ е н к о А. П. Локализация предельных циклов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1858–1865.
2. К р и щ е н к о А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1597–1604.
3. К а н а т н и к о в А. Н., К о р о в и н С. К., К р и щ е н к о А. П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем // Докл. РАН. – 2010. – Т. 431, № 3. – С. 323–325.
4. К а н а т н и к о в А. Н., К р и щ е н к о А. П. Инвариантные компакты динамических систем. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 231 с.
5. К а н а т н и к о в А. Н. Локализация инвариантных компактов в дискретных системах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – № 1. – С. 3–17.
6. B l a n c h i n i F., M i a n i S. Set-theoretic methods in control. – Boston: Birkhauser, 2008. – 481 p.
7. R a k o v i ć S. V., K e r r i g a n E. C., M a y n e D. Q., L y g e r o s J. Reachability analysis of discrete-time systems with disturbances // IEEE Trans. Autom. Control. – 2006. – V. 51, no. 4. – P. 546–561.
8. B e r t s e k a s D. Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control // IEEE Trans. Autom. Control. – 1972. – V. 17, no. 5. – P. 604–613.
9. К а н а т н и к о в А. Н., К о р о в и н С. К., К р и щ е н к о А. П. Максимальные инвариантные компакты динамических систем // Докл. РАН. – 2011. – Т. 437, № 5.
10. К а н а т н и к о в А. Н. Функциональный метод локализации инвариантных компактов в дискретных системах // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 11. – С. 1601–1611.
11. Х е н о н М. Двумерное отображение со странным аттрактором // В сб. Странные аттракторы. – М.: Мир, 1981. – С. 152–163.

Статья поступила в редакцию 26.09.2011

Анатолий Николаевич Канатников родился в 1954 г., окончил в 1976 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 65 научных работ по теории функций, дифференциальным уравнениям, информатике.

A.N. Kanatnikov (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 65 publications in the field of theory of functions, differential equations, information technologies.