

УДК 530.1 (075.8)

Н. Н. В е р и ч е в

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА В КОНТЕКСТЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*Рассмотрены вопросы моделирования динамики структур конвективных течений. В рамках модели связанных осцилляторов проведено исследование устойчивости конвективной структуры в однородном и слабо неоднородном слоях жидкости.*

**E-mail:** [nverichev@yandex.ru](mailto:nverichev@yandex.ru)

**Ключевые слова:** качественная теория динамических систем, теория колебаний, нелинейная динамика, динамический хаос, хаотическая синхронизация.

Природа возникновения и динамика структур в сильно неравновесных системах до настоящего времени остаются актуальными проблемами современной теоретической и математической физики. В частности, это относится к вопросу устойчивости структур, особенно в тех случаях, когда динамика их элементов является хаотичной.

В настоящее время сложились два взаимодополняющих направления в исследовании динамики структур в сплошных средах. Первое из них (классическое) заключается в непосредственном исследовании уравнений неравновесных систем, заданных в их физическом пространстве. В теории устойчивости конвективных течений это традиционное направление насчитывает долгую историю, отраженную в монографиях и в многочисленных журнальных публикациях [1–7].

Второе направление связано с конечномерными моделями сплошных сред. Пионерскими в его становлении являются исследования введенных А.М. Обуховым систем гидродинамического типа [8, 9], а также результаты О.А. Ладыженской [10], показавшей, что в ограниченной среде аттрактор двумерных уравнений Навье–Стокса имеет конечную размерность и является аттрактором конечномерной системы галеркинских приближений. Исследования решеток сосредоточенных систем (условно, осцилляторов), где каждый из элементов решетки (осциллятор) принимается в качестве модели отдельного элемента структуры: конвективной ячейки, вихря и др. [11, 12], являются эвристическим продолжением этого направления. Подобные модели служат для исследования качественных особенностей динамики структур — механизмов рождения пространственно-временного динамического

хаоса, условий существования структур различного типа и др. Об адекватности названных моделей свидетельствуют многочисленные данные экспериментальных исследований структур в гидродинамических течениях [13, 14], структур в жидких кристаллах [15, 16], в автокаталитических химических реакциях [17, 18] и других неравновесных системах [19].

Настоящая статья посвящена вопросам устойчивости структуры тепловой конвекции Рэлея–Бенара в однородном и слабо неоднородном слоях жидкости.

**1. Конвективные структуры в контексте синхронизации осцилляторов.** Будем рассматривать роликовую структуру конвекции в подогреваемом слое жидкости, давно ставшую классическим примером 1D-структур в сильно неравновесных системах. Как известно, она примечательна и тем, что в трехмодовом приближении уравнений Навье–Стокса (первые галеркинские приближения) описывается системой Лоренца [20]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y); \\ \dot{y} &= -y + rx - xz; \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{1}$$

явившейся первым примером детерминированной системы, демонстрирующей как ламинарную, так и турбулентную фазы конвекции при разных значениях числа Рэлея. В системе уравнений (1) обозначено:  $x, y, z$  — безразмерные амплитуды мод,  $\sigma = \nu/\kappa$  — число Прандтля,  $\nu, \kappa$  — коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности;  $r = R/R_c$  — нормированное на критическое число Рэлея, где  $R = g\gamma h^3 \Delta T / \nu \kappa$ ,  $R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$ ,  $a$  — отношение вертикального и горизонтального размеров конвективной ячейки,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\gamma$  — коэффициент температурного расширения жидкости,  $h$  — толщина слоя,  $\Delta T$  — разность температур его поверхностей;  $b$  — коэффициент, связанный с геометрией конвективной ячейки (рисунок,  $a$ ). Стрелками указано взаимосогласованное направление течения жидкости в конвективных ячейках структурированного слоя. Вывод уравнений (1) из уравнений гидродинамики приведен в работе [21].

Известно, что уравнения (1) моделируют также и движение жидкости в так называемой конвективной петле (трубке), представляющей собой тороидальную трубку с жидкостью [21, 22]. Трубка, подогреваемая в нижней точке, расположена в вертикальной плоскости и имеет круговую или эллипсоидную форму (рисунок,  $b$ ). Форма трубки определяет число  $b$  (для круговой трубки  $b = 1$ ). В этом случае безразмерные переменные системы (1) имеют следующий смысл:  $x$  — скорость течения,  $y$  — температура жидкости в средней, а  $z$  — в нижней точке трубки (см. рисунок,  $b$ ). Такое совпадение моделей — неформально,

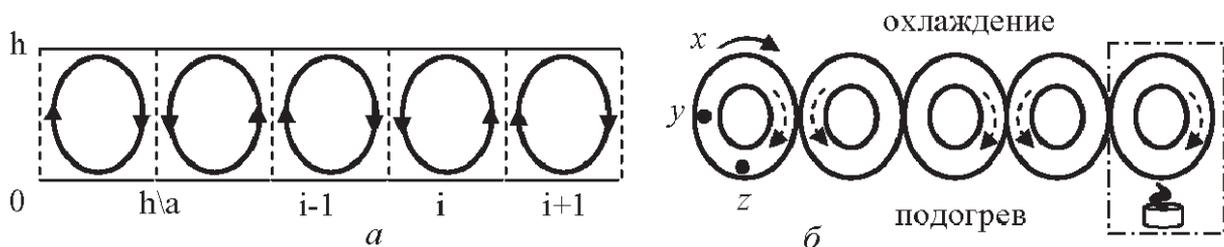


Схема осцилляторов

конвективную петлю можно рассматривать в качестве простейшей модели парциальной конвективной ячейки.

Отметим, что система (1) — один из примеров систем гидродинамического типа. Со свойствами системы Лоренца, а также проблемами взаимоотношения динамического хаоса и турбулентности, можно ознакомиться, например, в работах [14, 23–30].

Дадим обоснование решетки осцилляторов, как динамической модели конвективной структуры, изображенной на рисунке, *a*. Считаем, что слой жидкости ограничен (размером кюветы) по направлению, соответствующему на рисунке, *a* возрастанию дискретной координаты *i*, и число конвективных ячеек в данном направлении равно *N*.

Допустим, что из уравнений гидродинамики получена конечномерная динамическая система (галеркинские приближения) вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}), \\ \mathbf{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_m)^T, \quad x \in R^1, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}) : R^m \rightarrow R^m. \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, если  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (-\sigma(x - y), -y + rx - xz, -bz + xy)^T$ , то (2) является системой Лоренца.

Отметим, что в рамках самого метода Бубнова–Галеркина, как разложения гидродинамического поля по фундаментальной периодической по пространству системе функций, конфигурация течения (система конвективных ячеек с согласованным направлением течения в каждой из них) закладывается априори. При этом уравнение (2) описывает динамику отдельной конвективной ячейки.

Вместе с тем, если отвлечься от этого классического результата и обратиться к экспериментально наблюдаемым визуализированным картинам конвективных течений (см., например, [13]), то можно заметить, что, во-первых, структурированный слой жидкости в установившемся динамическом режиме можно рассматривать как совокупность изолированных друг от друга (идеальными стенками) конвективных ячеек; во-вторых, по характеру течения можно заключить, что конвективная ячейка явно обладает свойствами автоколебательной системы и является осциллятором, и, в-третьих, при малых возмущениях стационарного состояния переходные процессы в слое жидкости подобны

соответствующим процессам в связанной системе осцилляторов, а сама структура является результатом последующей взаимной синхронизации осцилляторов — конвективных ячеек — как автоколебательных систем. Причем взаимодействие осцилляторов, приводящее к синхронизации их движений, и устанавливает ту самую конфигурацию течения жидкости в конвективных ячейках (скорости течения жидкости в точках, симметричных относительно “плоскости контакта” соседних конвективных валов, становятся равными), которая априори закладывается в методе Бубнова–Галеркина (см. рисунок, *a*).

Вышеизложенное дает основание сопоставить каждой из пронумерованных конвективных ячеек осциллятор вида (2), а структуру, в зависимости от характера динамики парциального осциллятора (регулярной или хаотической), рассматривать как факт классической или хаотической синхронизации [31] в ансамбле осцилляторов.

Далее будем предполагать, что в фазовом пространстве осциллятора (2) существует регулярный или хаотический аттрактор, максимальный ляпуновский показатель  $\lambda_{\max}$  которого нам известен. Для простоты будем считать, что аттрактор системы (2) — единственный.

Определение совокупности осцилляторов — первая часть задачи моделирования динамики структуры, вторая — состоит в определении связей осцилляторов.

Заключение о виде искомым связей делаем из следующих условий:

- в режиме синхронизации все динамические переменные осцилляторов должны быть одинаковы:  $X_i \equiv X_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ;
- в заданном режиме связи между осцилляторами должны обращаться в нуль;
- характер воздействия на любой осциллятор со стороны соседей (слева, справа) физически единообразен.

С учетом этих условий приходим к выводу, что искомые связи имеют вид  $-(\mathbf{f}(-\mathbf{X}_{i-1} + \mathbf{X}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}))$ , причем  $\mathbf{f}(0) = 0$ .

В случае линейных связей, а также в случае малых возмущений стационарного состояния системы (структуры) это выражение приобретает вид  $-\varepsilon \mathbf{C}(-\mathbf{X}_{i-1} + 2\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1})$ , где  $\mathbf{C}$  — постоянная матрица, а  $\varepsilon$  — скалярный параметр. Для определения матрицы и параметра связи должны быть сделаны дополнительные предположения или использованы экспериментальные данные.

На рисунке, *b* приведена цепочка соприкасающихся конвективных трубок как аналог модели связанных конвективных валов. Если учитывать, что динамика движения жидкости в трубке моделируется системой Лоренца, то в данном случае  $\mathbf{C} = \text{diag}(0, 1, 0)$ , а  $\varepsilon$  имеет смысл безразмерного коэффициента теплопроводности материала трубки.

С учетом вышеизложенного приходим к рассмотрению решетки осцилляторов вида

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i) - \varepsilon \mathbf{C}(-\mathbf{X}_{i-1} + 2\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}) + \mu \mathbf{F}_i^*(\mathbf{X}_i, \mu), \quad (3)$$

$$i = \overline{1, N}$$

с граничными условиями  $\mathbf{X}_0 \equiv \mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_N \equiv \mathbf{X}_{N+1}$  как дискретной модели для исследования одномерной конвективной структуры в ограниченном слое жидкости. При этом  $\mathbf{X}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi})^T$ ,  $x_{ji} \in R^1$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_i) + \mu \mathbf{F}_i^*(\mathbf{X}_i, \mu) = \mathbf{F}_i(\mathbf{X}_i): R^m \rightarrow R^m$ ;  $\varepsilon$  — скалярный параметр связи;  $\mathbf{C} = (m \times m) = \text{diag}(c_1 c_2 \dots c_m)$ ,  $c_i \geq 0$ .

Добавки  $\mu \mathbf{F}_i^*(\mathbf{X}_i, \mu)$  в правых частях уравнений, которые считаем ограниченными:  $\|\mathbf{F}_i^*(\mathbf{X}_i, \mu)\| < K$ , появляются естественным порядком при рассмотрении неоднородного слоя. В этом случае положим, что параметры функции  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_i)$  являются средними по ансамблю, причем изменения локальных параметров системы относительно средних будем считать достаточно малыми. Этот факт отражен в (3) безразмерным малым параметром  $\mu$ .

Отметим, что математическая модель 2D-структур в слое жидкости, ограниченном по обоим горизонтальным направлениям, выглядит аналогично. Для ее получения каждый осциллятор в уравнениях (3) снабжается второй дискретной координатой, а одномерный дискретный лапласиан в выражении связей (скобка) заменяется двумерным.

**2. Устойчивость конвективной структуры в однородном слое жидкости.** Положим в уравнениях (3)  $\mu = 0$ , что соответствует однородному слою жидкости, и дадим для этого случая следующее математическое описание синхронизации осцилляторов, справедливое вне зависимости от характера их парциальной динамики.

В фазовом пространстве  $G = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$  системы (3) существует интегральное многообразие  $M_0 = \{\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \dots = \mathbf{X}_{N-1} = \mathbf{X}_N\}$  (гиперплоскость), заполненное фазовыми траекториями осциллятора (2), уравнения которого совпадают с уравнением каждого из парциальных осцилляторов цепочки. В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Аттрактор  $A_0$  данного осциллятора (в частности, аттрактор Лоренца)  $A_0 \subset M_0$ . Кроме  $A_0$ , других аттракторов, лежащих на многообразии  $M_0$ , нет. Проекция этого аттрактора на парциальные фазовые пространства осцилляторов тождественно совпадают:  $\pi_{X_i}(A_0) \equiv \pi_{X_j}(A_0)$ ,  $i, j = \overline{1, N}$  и являются “наблюдаемыми аттракторами” индивидуальных осцилляторов.

Если названное многообразие устойчиво по всем трансверсалиям  $U_{ij} = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j$ , то все соседние с многообразием фазовые траектории притягиваются гиперплоскостью и стремятся к аттрактору  $A_0$ . По мере приближения траекторий системы (3) к аттрактору  $A_0$  выражение  $\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\| \rightarrow 0$  и, следовательно, движения всех элементарных

осцилляторов цепочки, наблюдаемые в их парциальных фазовых пространствах, становятся синхронными.

В пределе получаем  $\mathbf{X}_{i-1} - 2\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_{i+1} = 0$ , и, как следует из (3), цепочка распадается на  $N$  синхронизованных элементарных осцилляторов — на  $N$  независимых конвективных ячеек с синхронизованным вращением валов. Кроме того, из условия  $\dot{\mathbf{X}}_i = \dot{\mathbf{X}}_j$ , которое также следует из (3), получаем, что вращение жидкости в соседних конвективных ячейках согласовано так, как это показано на рисунке, *a* (в противоположные стороны).

Таким образом, синхронизация осцилляторов, соответствующая стационарной конвективной структуре в однородном слое, является движением системы (3) на аттракторе  $A_0$  интегрального многообразия  $M_0$ . Далее устойчивость структуры исследуем как устойчивость этого многообразия по отношению к возмущениям начальных условий системы (3) из окрестности аттрактора  $A_0$ .

Нетрудно показать, что локальная устойчивость многообразия  $M_0$  по трансверсялям  $\mathbf{U}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , а значит, и синхронизации осцилляторов в цепочке (3) определяются устойчивостью тривиального решения уравнения вида

$$\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{I}_{N-1} \otimes \mathbf{J}_0(\xi) - \varepsilon \mathbf{D}_{N-1} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{U}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{N-1})^T$ ;  $\mathbf{J}_0(\xi)$  — матрица Якоби парциального осциллятора,  $\xi \in A_0$ ;

$$\mathbf{D}_{N-1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Используя результаты работ [32, 33], можно показать, что условием (необходимым и достаточным) устойчивости решения  $\mathbf{U} = 0$  уравнения (4) является неравенство

$$\varepsilon > \varepsilon^*(\lambda_{\max}) / \left( 4 \sin^2 \frac{\pi}{2N} \right). \quad (5)$$

Здесь величина  $\varepsilon^*$  — некоторая функция аргумента  $\lambda_{\max}$ , возрастающая при  $\lambda_{\max} > 0$  и равная нулю при  $\lambda_{\max} \leq 0$ . Кроме того, она зависит от структуры связей осцилляторов — значений элементов  $c_i$  матрицы  $\mathbf{C}$ . В частности, если  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , то  $\varepsilon^*(\lambda_{\max}) = \lambda_{\max}$  [33]. Выражение

$4 \sin^2 \frac{\pi}{2N}$  в неравенстве (5) представляет минимальное собственное значение матрицы  $D_{N-1}$ .

Относительно числа синхронизованных осцилляторов неравенство (5) преобразуется к виду

$$N \leq N_0 = \left[ \frac{\pi}{\arccos \nu} \right], \quad \nu = 1 - \frac{\varepsilon^* (\lambda_{\max})}{2\varepsilon}. \quad (6)$$

Отметим, если число осцилляторов в цепочке  $N \gg 1$ , то справедливы асимптотические формулы

$$\varepsilon > \pi^{-2} N^2 \varepsilon^* (\lambda_{\max}), \quad N \leq N_0 = \left[ \pi \sqrt{\varepsilon / \varepsilon^*} \right].$$

Анализ полученных соотношений и физические выводы будут даны ниже.

**3. Конвективная структура в неоднородном слое.** Рассмотрим случай  $\mu \neq 0$ , предполагая, что условия устойчивости синхронизации — неравенства (5) и (6) для соответствующей однородной цепочки — выполнены. С точки зрения фазового пространства в данном случае имеем следующее.

Поскольку условия устойчивости при  $\mu = 0$  выполнены, то все характеристические показатели решений линеаризованного уравнения (4) строго отрицательны и порождающее многообразие  $M_0$  является грубым. Это значит, что при малых значениях параметра  $\mu$  многообразие  $M_0$  не исчезает как таковое, а трансформируется в интегральное многообразие  $M_\mu$  возмущенной системы (3). Вместе с этим и аттрактор  $A_0$  трансформируется в соответствующий этим возмущениям аттрактор  $A_\mu$  — образ синхронизации в возмущенном случае.

В силу сказанного и согласно [34], условия устойчивости синхронизации в неоднородной цепочке с точностью  $\mu$  совпадают с (5) и (6). По этой причине мы можем на практике использовать указанные соотношения, и вопрос устойчивости синхронизации в неоднородном случае можно считать решенным.

Известно, что физическая суть взаимной синхронизации в ансамбле неидентичных осцилляторов состоит в существовании некоторого “эффективного” осциллятора, заменяющего связанную систему в том смысле, что в режиме синхронизации динамические характеристики каждого из числа взаимодействующих осцилляторов жестко (алгебраически) связаны с соответствующими характеристиками этого осциллятора (в случае принудительной синхронизации таковым является ведущий осциллятор). При этом динамика эффективного осциллятора с аттрактором  $A_\mu$  определяет динамику всех элементов связанной системы.

Таким образом, оставшаяся часть задачи о синхронизации осцилляторов в неоднородном случае состоит в определении вида уравнений эффективного осциллятора, а также вида упомянутых связей.

Искомую связь переменных представим в параметрической форме с параметром  $\mathbf{X}$  в виде степенных рядов по малому параметру  $\mu$ :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X} + \mu \mathbf{X}_{i1}(\mathbf{X}) + \mu^2 \mathbf{X}_{i2}(\mathbf{X}) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Здесь параметр  $\mathbf{X}$  имеет двоякий смысл: с одной стороны, это параметр многообразия  $M_\mu$  и (7) — параметрические уравнения данного многообразия, а с другой стороны, он является динамической переменной “эффективного” осциллятора.

Представим искомое уравнение эффективного осциллятора в виде

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mu \mathbf{F}_*(\mathbf{X}) + \mu^2 \mathbf{F}_{**}(\mathbf{X}) + \dots \quad (8)$$

Таким образом, задача свелась к определению вида функции  $\mathbf{F}_*(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{F}_{**}(\mathbf{X})$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{X}_{i1}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X}_{i2}(\mathbf{X})$ ,  $\dots$

Выбор функций  $\mathbf{F}_*(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{F}_{**}(\mathbf{X})$ ,  $\dots$  проводим из условия их независимости от индекса  $i$ , что очевидно, а также из требования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений для  $\mathbf{X}_{ij}(\mathbf{X})$ , получаемых при подстановке (7) и (8) в уравнения (3).

Выполняя стандартные для метода малого параметра процедуры, по аналогии с [17] получаем  $\mathbf{F}_*(\mathbf{X}) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^*(\mathbf{X}) = 0$ , а далее и первое приближение уравнения эффективного осциллятора:

$$\dot{\mathbf{X}} = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{X}). \quad (9)$$

С учетом (9) для нахождения функций первого приближения  $\mathbf{X}_{i1}(\mathbf{X})$  получаем цепочку уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{i1}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X}_{i1} + \varepsilon \mathbf{C}(-\mathbf{X}_{i-1,1} + 2\mathbf{X}_{i1} - \mathbf{X}_{i+1,1}) = \mathbf{F}_i^*, \quad i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

с граничными условиями  $\mathbf{X}_{01} \equiv \mathbf{X}_{11}$ ,  $\mathbf{X}_{N+1,1} \equiv \mathbf{X}_{N1}$ .

Для нахождения возмущений  $\mathbf{F}_i^*$  уравнений (10) следует обратиться к исходным уравнениям Навье–Стокса (с приближениями Буссинеска) для слоя жидкости глубиной  $h_i$  и разностью температур его плоскостей  $\Delta T_i$  (“парциального” слоя).

Применяя к этим уравнениям метод Бубнова–Галеркина и ограничиваясь первыми приближениями [21], для размерных амплитуд пер-

ВЫХ МОД ПОЛУЧАЕМ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{aligned}\dot{X}_i &= -\nu \frac{\pi^2 (1 + a^2)}{h_i^2} X_i + \gamma g \frac{a h_i}{\pi (1 + a^2)} Y_i, \\ \dot{Y}_i &= -\kappa \frac{\pi^2 (1 + a^2)}{h_i^2} Y_i + \frac{\alpha \Delta T_i}{h_i} X_i - \frac{\pi^2 a}{h_i^2} X_i Z_i, \\ \dot{Z}_i &= -4\kappa \frac{\pi^2}{h_i^2} Z_i + \frac{\pi^2 a}{2h_i^2} X_i Y_i.\end{aligned}\quad (11)$$

Допустим, что  $h_0$  и  $\Delta T_0$  – средние по ансамблю значения и  $h_i = h_0 + \delta h_i$ ,  $\Delta T_i = \Delta T_0 + \delta T_i$ . В таком случае получаемая из (11) безразмерная система первого приближения по малости относительных расстройок параметров  $\left( \left| \frac{\delta h_i}{h_0} \right| \ll 1, \left| \frac{\delta T_i}{\Delta T_0} \right| \ll 1 \right)$  имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -\sigma (x_i - y_i) - 2 [-\sigma (x_i - y_i)] \frac{\delta h_i}{h_0} + 3\sigma \frac{\delta h_i}{h_0} y_i, \\ \dot{y}_i &= -y_i + r x_i - x_i z_i - 2 [-y_i + r x_i - x_i z_i] \frac{\delta h_i}{h_0} + \\ &\quad + r \left( \frac{\delta T_i}{\Delta T_0} + 3 \frac{\delta h_i}{h_0} \right) x_i, \\ \dot{z}_i &= -b z_i + x_i y_i - 2 [-b z_i + x_i y_i] \frac{\delta h_i}{h_0}.\end{aligned}\quad (12)$$

Система (12) описывает структурную динамику “парциального” слоя. По аналогии с парциальным осциллятором конвективную ячейку такого слоя будем называть “парциальной”.

Сравнивая систему (12) с уравнением (3), получаем  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (-\sigma(x - y), -y + rx - xz, -bz + xy)^T$ , где

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i, \quad b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b_i, \quad (13)$$

а также

$$\mu \mathbf{F}_i^*(\mathbf{X}, \mu) = \mathbf{A} \mathbf{X} - 2 \frac{\delta h_i}{h_0} \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = 3\sigma \frac{\delta h_i}{h_0}, \quad a_{21} = r \left( \frac{\delta T_i}{\Delta T_0} + 3 \frac{\delta h_i}{h_0} \right).$$

Можно показать, что решение уравнения (10) с возмущениями (14) имеет вид

$$\mathbf{X}_{i1}(t) = \mathbf{B}_i \mathbf{X} + \eta_i \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (15)$$

где  $\mathbf{B}_i = \text{diag}(a_i, b_i, c_i)$  — постоянная матрица, а  $\eta_i$  — скалярный параметр. Параметры  $a_i, b_i, c_i, \eta_i$  находятся непосредственной подстановкой решения (15) в уравнения (10) (по причине громоздкости уравнения для данных параметров не приведены).

С учетом выражений (15) динамическая связь всех осцилляторов цепочки с эффективным осциллятором, а также связь двух произвольных осцилляторов в первом приближении записывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(t) &= (\mathbf{I} + \mathbf{m}_i) \mathbf{X}(t + \varphi_i), \\ \mathbf{X}_i(t) &= (\mathbf{I} + \mathbf{m}_i - \mathbf{m}_k) \mathbf{X}_k(t + \varphi_i - \varphi_k), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\mathbf{m}_i = \mu \mathbf{B}_i$ ,  $\varphi_i = \mu \eta_i$ . Элементы матриц  $\mathbf{m}_i$ , также как и постоянные  $\varphi_i$ , пропорциональны малым параметрам  $\frac{\delta h_i}{h_0}$ ,  $\frac{\delta T_i}{\Delta T_0}$  и они обращаются в нуль при равенстве обеих расстройек нулю. Отметим, что если колебания “эффективного” осциллятора (функцию  $X(t)$ ) принять в качестве эталона и при этом считать единичную матрицу  $\mathbf{I}$  эталонной амплитудой, а время  $t$  — эталонной фазой, то по аналогии с гармоническими колебаниями (здесь эталоном является функция  $\sin t$ ) выражение  $\mathbf{I} + \mathbf{m}_i$  можно считать “амплитудой” колебаний  $i$ -го осциллятора, а  $\varphi_i$  — разностью фаз колебаний этого осциллятора и эталона.

Таким образом, стационарная конвективная структура в неоднородном слое описывается векторным уравнением (2) с параметрами (13), а движения жидкости в различных конвективных ячейках связаны уравнениями (16).

**Выводы.** Условия устойчивости конвективной структуры в слое жидкости принципиально отличаются в зависимости от характера течения жидкости (ламинарного или турбулентного) в конвективных ячейках.

Если течение жидкости ламинарное, а значит  $\varepsilon^*(\lambda_{\max}) \leq 0$ , то из (5) следует устойчивость роликовой конвекции при любой, в том числе и при сколь угодно малой величине связи между конвективными ячейками. При этом из неравенства (6) следует, что структура устойчива при любых, в том числе и неограниченных значениях  $N$ . Другими словами, структура с ламинарным конвективным течением устойчива при любых геометрических размерах слоя жидкости.

Однако, как только течение переходит в турбулентную фазу (например, за счет увеличения температуры подогрева), а, следовательно, максимальный ляпуновский показатель движения становится положительным, то ситуация меняется принципиально. В этом случае устойчивость структуры возможна только для ограниченного числа

осцилляторов — конвективных ячеек:  $N \leq N_0$ . Причем, чем больше интенсивность турбулентных пульсаций (чем больше  $\lambda_{\max}$ ), тем меньше  $N_0$ . А поскольку число конвективных ячеек пропорционально ширине слоя  $L$ , то это обуславливает существование критического значения этого параметра  $L = L_0$ , т.е. если  $L < L_0$ , то структура при заданных термодинамических параметрах является устойчивой, но как только ширина слоя становится больше  $L_0$ , структура теряет устойчивость и разрушается. Другими словами, если размер кюветы достаточно велик, то турбулентная фаза структурного конвективного течения может быть практически ненаблюдаемой. Для наблюдаемости структурной турбулентности в широком диапазоне чисел Рэлея размер кюветы должен быть соответствующим.

Для неограниченного по ширине слоя этот результат можно интерпретировать следующим образом: при возникновении турбулентной конвективной структуры (точнее, квазиструктуры) в некоторой области пространства (например, случайно, за счет неконтролируемых начальных условий для некоторой группы осцилляторов) она обязательно разрушается по мере своего распространения — по мере вовлечения в конвективное движение соседних областей.

Как показано, динамика конвективной структуры в неоднородном слое определяется динамическими свойствами “эффективного” осциллятора с параметрами (13). Это значит, что если в каждой из  $N$  парциальных ячеек течение ламинарное, то и в соответствующем неоднородном слое будет наблюдаться стационарная устойчивая структура с ламинарным течением. Аналогично, если в каждой из таких ячеек имеет место турбулентное течение, то и в слабо неоднородном слое будет наблюдаться структурированное турбулентное течение с условиями устойчивости практически теми же, что и для однородного слоя.

Более разнообразен случай, когда в одной части парциальных ячеек наблюдается ламинарное, а в другой — турбулентное течение. В таком случае в неоднородном слое жидкости может наблюдаться или то, или другое, в зависимости от того, по какую сторону от критического значения окажется среднее число Рэлея  $r = N^{-1} \sum_{i=1}^n r_i$ , где  $r_i$  — локальные числа Рэлея. Если  $r < r_c$ , то течение ламинарное, а если окажется, что  $r > r_c$ , то оно турбулентное. В частности, ламинарное течение в структурированном однородном слое может стать структурно турбулентным под действием лишь одного локального источника теплоты. Например, подобно тому, как если бы в системе связанных конвективных трубок с общим источником теплоты в некоторый момент стала дополнительно подогреваться одна из конвективных трубок (см. рисунок, б). Для наблюдения этого эффекта необходимо, чтобы

соответствующее ламинарное течение в однородном слое находилось в близком к критическому состоянию. Отметим, что для параметров системы Лоренца  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  значение  $r_c = 24,06$ .

Естественно, что динамика структуры конвективного течения в неоднородном слое существенно сложнее однородного случая. Конвективные ячейки в общем случае имеют различный геометрический размер, и, как следует из (16), синхронизованное течение жидкости в соседних ячейках не является синфазным. В общем случае условные амплитуды кинематических и термодинамических характеристик течения в различных конвективных ячейках также различны. Все это приводит к размыванию экспериментально наблюдающихся визуализированных картин конвективных структур по сравнению с соответствующими контрастными картинками в однородном случае, с их четким разделением на идентичные по размерам и динамике конвективные ячейки [36]. Однако подобные “дефекты” экспериментально наблюдаемой структуры визуальны и не свидетельствуют о ее кризисе. Например, в этом можно было бы убедиться в результате исследования поведения во времени термодинамических параметров течения в соответственных точках различных ячеек, обнаружив их синхронизацию.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 11-08-97066-р\_поволжье.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
2. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Н е п о м н я щ и й А. А. Устойчивость конвективных течений // Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 320 с.
3. S a l t z m a n В. Finite amplitude free convection as an initial value problem // J. of the atmospheric science. – 1962. – № 7. – P. 329–341.
4. Г е т л и н г А. В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. – М.: Эдиториал УРСС. – 1999. – 248 с.
5. I n t r o d u c t i o n t o Hydrodynamic Stability // Cambridge University press, 2002. [http://www.amazon.com/Introduction-Hydrodynamic-Stability-P-Drazin/dp/0521009650/ref=sr\\_1\\_7?s=books&ie=UTF8&qid=1280769441&sr=1-7](http://www.amazon.com/Introduction-Hydrodynamic-Stability-P-Drazin/dp/0521009650/ref=sr_1_7?s=books&ie=UTF8&qid=1280769441&sr=1-7)
6. А л и е в И. Н., Ю р ч е н к о С. О. Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Изв. РАН. МЖГ. – 2010. – № 5. – С. 156–166.
7. Г л у х о в А. Ф., П у т и н Г. Ф. Конвекция магнитных жидкостей в связанных каналах при подогреве снизу // Изв. РАН. МЖГ. – 2010. – № 5. – С. 41–48.
8. О б у х о в А. М. Турбулентность и динамика атмосферы. – М.: Гидрометеиздат, 1988. – 408 с.
9. Г л е д з е р Е. Б., Д о л ж а н с к и й Ф. В., О б у х о в А. М. Системы гидродинамического типа и их применение / Под ред. А.М. Обухова. – М.: Наука, 1981. – 366 с.

10. Л а д ы ж е н с к а я О. А. Зап. науч. семинаров // ЛО МИАН СССР. – Вып. 27. – Л.: Наука, 1972. – С. 91.
11. Р а б и н о в и ч М. И., С у щ и к М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Успехи физических наук. – 1990. – Т. 160, вып. 1.
12. R a b i n o v i c h M. I., E z e r s k y A. V. and P a t r i c k D. W e i d m a n. The Dynamics of Pattern // World Scientific, 2001.
13. В а н - Д а й к М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986.
14. Р а б и н о в и ч М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физических наук. – 1978. – Т. 125, вып. 1.
15. К а ц Е. И., Л е б е д е в В. В. Динамика жидких кристаллов. – М.: Наука, 1988.
16. Ж е д е В и л е м. Физические свойства жидкокристаллических веществ. – М.: Мир, 1982.
17. В а с и л ь е в В. А., Р о м а н о в с к и й Ю. М., Я х н о В. Г. Автоволновые процессы. – М.: Наука, 1987.
18. Н и к о л и с Г., П р и г о ж и н И. Познание сложного. – М.: Мир, 1990.
19. Б р а у н Г., У о л к е н Д ж. Жидкие кристаллы и биологические структуры. – М.: Мир, 1982. – 198 с.
20. L o r e n z E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atoms. Sci., 20, 130–141 (1963).
21. К у з н е ц о в С. П. Динамический хаос (курс лекций). – М.: Физматлит, 2001.
22. М о о н F. C. Chaotic vibrations. – New York: Wiley, 1987.
23. М о н и н А. С. О природе турбулентности // Успехи физических наук. – 1978. – Т. 125, вып. 1.
24. А ф р а й м о в и ч В. С., Б ы к о в В. В., Ш и л ь н и к о в Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Моск. мат. общества. – 1982. – Т. 44. – С. 180–212.
25. Ш и л ь н и к о в Л. П., Ш и л ь н и к о в А. Л., Т у р а е в Д. В., Ч у а Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. – Ижевск: НИЦ РХД, 2009. – 548 с.
26. B r o e r H. W., H o v e i j n I., T a k e n s F., and v a n G i l s S. A. Nonlinear dynamical systems and chaos / Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 1995. [http://www.amazon.com/Nonlinear-Dynamical-Differential-Equations-Applications/dp/3764353465/ref=sr\\_1\\_7?s=books&ie=UTF8&qid=1280768693&sr=1-7](http://www.amazon.com/Nonlinear-Dynamical-Differential-Equations-Applications/dp/3764353465/ref=sr_1_7?s=books&ie=UTF8&qid=1280768693&sr=1-7)
27. B e r g e P., P o m e a u Y., and V i d a l C. Order within chaos: Towards a deterministic approach to turbulence / Wiley, New York, 1986. [http://www.amazon.com/Order-within-Chaos-Deterministic-Turbulence/dp/0471849677/ref=sr\\_1\\_1?s=books&ie=UTF8&qid=1280769441&sr=1-1](http://www.amazon.com/Order-within-Chaos-Deterministic-Turbulence/dp/0471849677/ref=sr_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1280769441&sr=1-1)
28. L o k e n a t h D e b n a t h and D a n i e l N. R i a h i. Nonlinear instability, chaos and turbulence // Advances in Fluid Mechanics. – 2000. – Vol. 2. WIT Press.
29. R u e l l e D. Turbulence, strange attractors, and chaos // World Scientific Series on Nonlinear Science, Series a, Vol. 16, 1996. [http://www.amazon.com/Turbulence-Strange-Attractors-Scientific-Nonlinear/dp/9810223102/ref=sr\\_1\\_3?s=books&ie=UTF8&qid=1280769441&sr=1-3](http://www.amazon.com/Turbulence-Strange-Attractors-Scientific-Nonlinear/dp/9810223102/ref=sr_1_3?s=books&ie=UTF8&qid=1280769441&sr=1-3)
30. D e v a n e y R. H i r s c h M. W. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos, Second Edition Pure and Applied Mathematics // Academic Press, 2003. [http://www.amazon.com/Morris-W.-Hirsch/e/B0011R1QHU/ref=sr\\_ntt\\_srch\\_lnk\\_3?qid=1280768693&sr=1-3](http://www.amazon.com/Morris-W.-Hirsch/e/B0011R1QHU/ref=sr_ntt_srch_lnk_3?qid=1280768693&sr=1-3)
31. А ф р а й м о в и ч В. С., В е р и ч е в Н. Н., Р а б и н о в и ч М. И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. – 1986. – Т. 29, № 9. – С. 1050–1060.

32. В е р и ч е в Н. Н., В е р и ч е в С. Н., Е р о ф е е в В. И. Кластерная динамика однородной цепочки диссипативно связанных ротаторов // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 6. – С. 882–897.
33. V e r i c h e v N. N., V e r i c h e v S. N., W i e r c i g r o c h M. C-oscillators and stability of stationary cluster structures in lattices of diffusively coupled oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. – 2009. – Vol. 42, Issue 2. P. 686–701.
34. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Л ы к о в а О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
35. В е р и ч е в Н. Н., В е р и ч е в С. Н. Асимптотическая теория синхронизации хаотических колебаний диссипативно связанных динамических систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2007. – № 4. – С. 77–97.
36. A h l e r s. Experiments with Rayleigh-Bénard convection / In I. Mutabazi, E. Guyon and J.E. Wesfreid (Eds.): Dynamics of Spatiotemporal Structures Henri Benard //Centenary Review, Springer Tracts in Modern Physics. – 2005. – Vol. 207. – P. 67–94.

Статья поступила в редакцию

Николай Николаевич Веричев — канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. науч. сотр. Нижегородского филиала ИМАШ РАН им. А.А. Благовраова. Специализируется в области качественной теории динамических систем, теории колебаний, нелинейной динамики, динамического хаоса, хаотической синхронизации.

N.N. Verichev — Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor, senior researcher of the Nizhnii Novgorod Branch of the Blagonravov Institute of Machine Science of Russian Academy of Sciences. Specializes in qualitative theory of dynamical systems, oscillation theory, nonlinear dynamics, dynamical chaos, chaotic synchronization.

