

## ИНЖЕНЕРНАЯ ТЕОРИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.И. Горбачев

vigorby@mail.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Для построения инженерной теории сопротивления неоднородных стержней использована интегральная формула, по которой перемещения точек тела в исходной задаче теории упругости неоднородного тела представляют через перемещения точек в такой же задаче, только для однородного упругого тела (сопутствующая задача). Из интегральной формулы вытекает эквивалентное представление перемещений в неоднородном стержне в виде рядов по производным перемещений в сопутствующем однородном стержне. Перемещения точек сопутствующего стержня определены приближенно методами классического сопротивления материалов через три компоненты вектора перемещений точек его оси. В результате компоненты вектора перемещений любой точки неоднородного стержня представлены в виде рядов по производным перемещений продольной оси однородного стержня. По перемещениям найдены ряды для напряжений в неоднородном стержне. Далее по продольному напряжению вычислены внутренние силовые факторы в сечении неоднородного стержня — продольная сила и два изгибающих момента, представленные рядами по производным трех компонент вектора перемещений оси стержня. Затем из уравнений Журавского следует система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно трех компонент вектора перемещений продольной оси. Рассмотрена так называемая теория нулевого приближения, в которой в выражениях для внутренних силовых факторов учитывают только продольную деформацию и кривизну оси стержня (кинематические факторы). Коэффициентами при кинематических факторах являются эффективные жесткости стержня — продольная жесткость, четыре изгибных жесткости и четыре жесткости взаимного влияния, которые вычисляют после решения вспомогательных плоских и антиплоских задач в поперечном сечении неоднородного стержня

### Ключевые слова

*Неоднородный стержень, задача теории упругости неоднородного тела, теория нулевого приближения, эффективная жесткость*

Поступила в редакцию 27.06.2016  
© МГУ им. Н.Э. Баумана, 2016

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.577.21.0207, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57715X0207)*

**Интегральная формула в трехмерной задаче теории упругости неоднородного тела.** Пусть неоднородное упругое тело находится в равновесии под действием внешних сил и перемещений. Введем декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ ,  $\sigma_{ij}$  — напряжения,  $\varepsilon_{ij}$  — деформации,  $u_i$  — перемещения,  $C_{ijkl}(x_1, x_2, x_3)$  — компоненты тензора модулей упругости, интегрируемые функции координат. В настоящей работе приняты индексные обозначения компонент векторов и тензоров: индексы, набранные прописными латинскими буквами, принимают значения 1 и 2, а строчными — значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах. Индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате.

**Постановка исходной и сопутствующей трехмерной задачи неоднородной упругости.** Задача статической теории упругости заключается в нахождении величин  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ , удовлетворяющих в области  $V$ , занятой телом, уравнениям

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn} u_{m,n}, \quad (1)$$

а на границе  $\Sigma = \Sigma_p + \Sigma_u$  — условиям

$$\sigma_{ij} n_j |_{\Sigma_p} = p_i(y); \quad u_i |_{\Sigma_u} = f_i(y); \quad y \in \Sigma. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta_{klmn}$  — компоненты единичного тензора четвертого ранга [1], представляемые через символы Кронекера  $\Delta_{klmn} = (\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})/2$ . Задачу (1), (2) для неоднородного тела будем называть исходной задачей, а точно такую же задачу для однородного тела с постоянными модулями упругости  $C_{ijkl}^o = \text{const}$  — сопутствующей задачей. Пусть  $v_i(x)$ ,  $e_{ij}(x)$ ,  $\tau_{ij}(x)$  — перемещения, деформации и напряжения в сопутствующей краевой задаче.

**Интегральная формула.** Решение линейной задачи для уравнения с переменными коэффициентами связано с решением уравнения с постоянными коэффициентами интегральной формулой (см. работы [2–4]). В случае статической задачи теории упругости эта формула имеет вид [2]

$$u_i(x) = v_i(x) + \int_V \varepsilon_{mn}^{(i)}(\xi, x) [C_{mnkl}^o - C_{mnkl}(\xi)] e_{kl}(\xi) dV_\xi, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{mn}^{(i)}(x, \xi)$  — тензор деформаций Грина исходной задачи теории упругости для неоднородного тела (обозначения заимствованы у В. Новацкого [5]).

**Представление решения исходной задачи в виде рядов по производным решения сопутствующей задачи.** Предположим, что деформации в сопутствующей задаче являются гладкими функциями координат  $x_i$ . Тогда в окрестности любой точки  $x \in V$  их можно разложить в ряды Тейлора так, что в любой точке  $\xi \in V$  справедливо следующее представление:

$$e_{ij}(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \Pi_{i_1 \dots i_q}(\xi, x) e_{ij, i_1 \dots i_q}(x); \quad \Pi_{i_1 \dots i_q}(\xi, x) \equiv \frac{1}{q!} (\xi_{i_1} - x_{i_1}) \dots (\xi_{i_q} - x_{i_q}). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем разложение решения исходной задачи в ряд по производным деформаций в сопутствующей задаче:

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikl\dot{i}_1\dots i_q}(x) e_{kl, \dot{i}_1\dots i_q}(x). \quad (5)$$

Функции  $N_{ikl\dot{i}_1\dots i_q}(x)$  представляют собой взвешенные моменты тензора деформаций Грина  $N_{ikl\dot{i}_1\dots i_q}(x) \equiv \int_V \varepsilon_{mn}^{(i)}(\xi, x) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\xi)] \Pi_{\dot{i}_1\dots i_q}(\xi, x) dV_{\xi}$ .

**Структурные функции.**  $N$ -Функции непрерывны по координатам и определяются только формой области и функциональной зависимостью коэффициентов упругости от координат. В случае однородного тела (т. е. при  $C_{ijkl}(x) = C_{ijkl}^0$ ) все  $N$ -функции тождественно равны нулю, поэтому  $N$ -функции называют *структурными функциями*. Координаты входят в функции упругих модулей в безразмерном виде. Пусть  $l$  — характерный размер неоднородности в поперечном сечении, например, характерный размер области изменения свойств в поперечном сечении. В случае стержня из волокнистого композита это может быть среднее расстояние между волокнами или размер ячейки периодичности при периодическом расположении волокон. Можно полагать, что модули упругости  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ , где  $\zeta_i = x_i / l$ . Таким образом,  $N$ -функции так же, как и модули упругости являются функциями переменных  $\zeta_i$ , и, как следует из формулы (5), размерность структурных функций представляет собой возрастающую степень размерности длины, т. е.  $N_{ikl\dot{i}_1\dots i_q} = l^{q+1} \bar{N}_{ikl\dot{i}_1\dots i_q}$ . Чертой обозначена безразмерная  $N$ -функция.

**Ряды для деформаций и напряжений.** Из формул Коши и закона Гука следуют ряды для деформаций и напряжений в неоднородном теле

$$\varepsilon_{ij}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} B_{ijkl\dot{i}_1\dots i_q}(x) e_{kl, \dot{i}_1\dots i_q}(x); \quad \sigma_{ij}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{C}_{ijkl\dot{i}_1\dots i_q}(x) e_{ij, \dot{i}_1\dots i_q}(x), \quad (6)$$

где

$$B_{ijkl}(x) = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn} N_{mkl, n}(x); \quad (7)$$

$$B_{ijkl\dot{i}_1\dots i_q}(x) = \Delta_{ijmn} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_q, n}(x) + \Delta_{ijmi_q} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_{q-1}}(x);$$

$$\tilde{C}_{ijkl}(x) = C_{ijkl} + C_{ijmn} N_{mkl, n}; \quad (8)$$

$$\tilde{C}_{ijkl\dot{i}_1\dots i_q} = C_{ijmn} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_q, n} + C_{ijmi_q} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_{q-1}}.$$

**Рекуррентные уравнения для структурных функций.** Подставим напряжения (6) в уравнения (1), (2) и учтем, что  $v_i(x)$  является решением сопутствующей краевой задачи. В результате получим систему вспомогательных рекуррентных уравнений для  $N$ -функций

$$\begin{aligned} [C_{ijmn} N_{mkl,n} + C_{ijkl}]_{,j} &= 0; \\ [C_{ijmn} N_{mkl\dot{i}_1,n} + C_{ijmi_1} N_{mkl}]_{,j} &= C_{ii_1kl}^o - [C_{ii_1mn} N_{mkl,n} + C_{ii_1kl}]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [C_{ijmn} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_q,n} + C_{ijmi_q} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_{q-1}}]_{,j} &= \\ = -[C_{ii_qmn} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_{q-1},n} + C_{ii_qmi_{q-1}} N_{mkl\dot{i}_1\dots i_{q-2}}] &\text{ при } q \geq 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия для  $N$ -функций легко следуют из граничных условий исходной задачи и представлений (5), (6) для перемещений и напряжений. Например, в случае, когда исходная задача является первой краевой задачей, тогда и сопутствующая задача также представляет собой первую краевую задачу. Следовательно, в представлении (5) для перемещений все  $N$ -функции должны обращаться в нуль на границе неоднородного тела:

$$N_{mij\dot{i}_1\dots i_q}(y) = 0, \quad y \in \Sigma. \quad (11)$$

В случае периодически неоднородного тела уравнения (9), (10) решают в ячейке периодичности. Отыскивают непрерывные периодические решения. Такие решения определены с точностью до постоянных величин [6], которые находят из условия обращения в нуль средних значений  $N$ -функций в ячейке периодичности.

**Элементы классического сопротивления материалов.** Рассмотрим стержень длиной  $L$ , находящийся в равновесии под действием внешних поверхностных и объемных распределенных нагрузок. Стержень предполагается прямолинейным. Поперечное сечение может быть переменным по длине, но так, чтобы центры тяжести всех сечений располагались на прямой оси стержня. В классической теории стержня Бернулли — Эйлера материал предполагают однородным и изотропным. Предположим, что материал стержня неоднородный и анизотропный. Несмотря на это, используем гипотезы классической теории. Результат будем называть простейшей теорией неоднородного анизотропного стержня. Уравнения классической теории следуют из простейшей теории, если отказаться от предположения об анизотропии и неоднородности материала.

Выберем начало правой декартовой системы координат в плоскости крайнего (левого) торца стержня. Ось  $x_3$  направим параллельно геометрической оси стержня, а оси  $x_1, x_2$  расположим в плоскости его торцевого поперечного сечения.

Поверхностные и объемные силы приведем к статически эквивалентной системе нагрузок, состоящей из векторов силы  $\vec{q}(x_3)$  и момента  $\vec{m}(x_3)$ , распределенных вдоль оси  $x_3$ . Предположим, что крутящий момент отсутствует:  $m_3 = 0$ . К внешним силам относятся также и реакции опор, которые представляют собой сосредоточенные силы и моменты. В статически определимых задачах реакции опор известны и, следовательно, векторы  $\vec{q}$  и  $\vec{m}$  вполне определены. В статически неопределимом случае в выражения для эквивалентных нагрузок будут входить неизвестные сосредоточенные величины, которые необходимо

искать из граничных условий и общего решения уравнения изогнутой оси стержня.

**Внутренние силовые факторы.** В произвольной точке  $0 < x_3 < L$  стержня мысленно проведем поперечное сечение. Рассмотрим равновесие правой части стержня. Заменяем действие отброшенной левой части результирующими векторами силы  $\vec{Q}(x_3)$  и момента  $\vec{M}(x_3)$ , приложенными в центре правого сечения, при этом

$$\vec{Q}(x_3) = \int_{x_3}^L \vec{q}(y) dy; \quad \vec{M}(x_3) = \int_{x_3}^L \vec{m}(y) dy - \int_{x_3}^L (x_3 - y) \vec{e}_3 \times \vec{q}(y) dy. \quad (12)$$

Здесь  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — векторы ортонормированного базиса декартовой системы координат. Векторы  $\vec{Q}(x_3)$  и  $\vec{M}(x_3)$  называют внутренними силовыми факторами. Согласно (12), вектор  $\vec{Q}_i = Q_i \vec{e}_i$  положителен, если он направлен в положительном направлении оси  $x_i$ , а вектор  $\vec{M}_i = M_i \vec{e}_i > 0$ , если он вращает сечение вокруг оси  $x_i$  против часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси  $x_i$ . На левой стороне сечения положительные внутренние силовые факторы имеют обратные направления по сравнению с правой стороной. Составляя уравнения равновесия левой части стержня, получаем другое выражение для внутренних силовых факторов

$$\vec{Q} = - \int_0^{x_3} \vec{q}(y) dy, \quad \vec{M} = - \int_0^{x_3} \vec{m}(y) dy + \int_0^{x_3} (x_3 - y) \vec{e}_3 \times \vec{q}(y) dy. \quad (13)$$

Вычитая из формул (12) соответствующие формулы (13), определяем условия на внешние силы и моменты, при выполнении которых весь стержень находится в равновесии:

$$\int_0^L \vec{q}(y) dy = 0; \quad \int_0^L \vec{m}(y) dy + \int_0^L y \vec{e}_3 \times \vec{q}(y) dy = 0.$$

**Связь внутренних силовых факторов с напряжениями в поперечном сечении.** Рассмотрим левую часть стержня. Действие отброшенной правой части заменяем распределенным по сечению вектором напряжения  $\vec{S}_3 = \tau_{3i}(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_i$ . Векторы  $\vec{Q}(x_3)$  и  $\vec{M}(x_3)$  есть результат приведения к центру сечения вектора напряжения  $\vec{S}_3 = \tau_{3i} \vec{e}_i$ :

$$\vec{Q} = Q_i \vec{e}_i = \int_F \vec{S}_3 dF = \int_F \tau_{3i} dF \vec{e}_i \Rightarrow Q_i(x_3) = \int_F \tau_{3i}(x_1, x_2, x_3) dF; \quad (14)$$

$$\vec{M} = M_i \vec{e}_i = \int_F \vec{r} \times \vec{S}_3 dF = \int_F x_j \vec{e}_j \times \tau_{3i} \vec{e}_i dF \Rightarrow M_i(x_3) = \epsilon_{ijk} \int_F x_j \tau_{3k}(x_1, x_2, x_3) dF, \quad (15)$$

где  $\epsilon_{ijk}$  — символы Леви-Чивиты [1]. Последнюю из формул (15) для моментов расписывают следующим образом:

$$M_1(x_3) = \int_F x_2 \tau_{33} dF; \quad M_2(x_3) = -\int_F x_2 \tau_{33} dF; \quad M_3(x_3) = \int_F (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dF. \quad (16)$$

Крутящий момент  $M_3(x_3)$  равен нулю в том случае, когда касательные напряжения в каждом поперечном сечении стержня подчиняются следующему условию:

$$\int_F (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dF = 0.$$

Именно внутренние силовые факторы являются основными искомыми величинами в сопротивлении материалов и в строительной механике стержневых конструкций. Отметим, что по известным напряжениям однозначно находят все внутренние силовые факторы. Однако обратная задача восстановления напряжений в поперечном сечении стержня по внутренним силовым факторам, в общем случае, не имеет однозначного решения. Для однозначного решения этой задачи необходимо использовать гипотезы о распределении напряжений по сечению. Указанные гипотезы должны содержать достаточное число неизвестных функций координаты  $x_3$ , которые можно было бы однозначно выразить через внутренние силовые факторы.

**Уравнения Журавского.** Дифференцируя по  $x_3$  уравнения (13), получаем уравнения Журавского [7], которые являются уравнениями равновесия элемента  $dx_3$  оси стержня, нагруженного внутренними силами и распределенными вдоль оси внешними силами [8]

$$\vec{Q}' = -\vec{q}; \quad \vec{M}' = -\vec{m} - \vec{e}_3 \times \vec{Q} \Rightarrow \vec{M}'' = -\vec{m}' + \vec{e}_3 \times \vec{q}.$$

Запишем эти уравнения покомпонентно, введя другое (более привычное) обозначение для продольной силы  $T(x_3) \equiv Q_3(x_3)$ :

$$T' = -q_3; \quad Q_1' = -q_1; \quad Q_2' = -q_2; \quad M_1' = -m_1 - Q_2; \quad M_2' = -m_2 + Q_1, \quad (17)$$

или

$$T' = -q_3; \quad M_1'' = -m_1' + q_2; \quad M_2'' = -m_2' - q_1. \quad (18)$$

Отметим, что уравнения Журавского не зависят от статической определенности или неопределенности стержня, а также от материала, из которого он изготовлен, т. е. фактически они не зависят от типа определяющих соотношений, связывающих внутренние силовые факторы с деформацией и кривизнами оси стержня.

**Кинематическая гипотеза Бернулли — Эйлера.** Перемещения при изгибе и продольном растяжении (сжатии) однородного изотропного стержня определяют в соответствии с гипотезой плоских сечений [9] по формулам

$$v_i = w_i(x_3) - \delta_{i3} x_K w_{K,3}(x_3). \quad (19)$$

Здесь  $w_i(x_3)$  — поперечные перемещения точек оси стержня (прогибы);  $w_3(x_3)$  — продольное перемещение. Далее для краткости верхний индекс

в круглых скобках будет обозначать производную  $q$ -го порядка  $w_i^{(q)} \equiv \frac{d^q w_i}{dx_3^q}$ , а производные по  $x_3$ , где это приемлемо, также будем обозначать штрихами.

В соответствии с формулами Коши  $e_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$  единственной ненулевой компонентой тензора деформаций является продольная компонента

$$e_{33} = v_{3,3} = w_{3,3} - x_1 w_{1,33} = \gamma(x_3) + x_1 \kappa_2(x_3) + x_2 \kappa_1(x_3), \quad (20)$$

где  $\gamma(x_3)$  — продольная деформация оси  $x_3$ ;  $\kappa_1(x_3)$ ,  $\kappa_2(x_3)$  — кривизны проекций изогнутой оси  $x_3$  на координатные плоскости  $x_2, x_3$  и  $x_1, x_3$ ;

$$\gamma = w'_3, \quad \kappa_1 = -w''_2, \quad \kappa_2 = -w''_1. \quad (21)$$

Предположим, что прогибы  $w_I(x_3)$  оси в каждой точке малы по сравнению с характерным размером поперечного сечения, малы и углы поворота поперечного сечения:  $w_{I,3} \ll 1$ .

**Статическая гипотеза.** Эта гипотеза утверждает, что продольные «волокна» стержня (под волокном в рассматриваемом случае понимается материальная линия, параллельная оси стержня) деформируются независимо друг от друга. Иными словами, на волокно не оказываются поперечных воздействий, препятствующих его свободной продольной деформации. В соответствии со статической гипотезой продольное напряжение в волокне определяют из одномерного закона Гука

$$\tau_{33} = E_3 e_{33} = E_3 [\gamma(x_3) + x_1 \kappa_2(x_3) + x_2 \kappa_1(x_3)], \quad (22)$$

где  $E_3$  — продольный модуль Юнга. В изотропном случае соотношение (22) можно получить из обобщенного закона Гука  $\tau_{ij} = \left[ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \Delta_{ij33} \right] e_{33}$ , если коэффициент Пуассона  $\nu$  принять равным нулю. Тогда  $\tau_{ij} = E \Delta_{ij33} e_{33}$ , т. е. из всех компонент тензора напряжений отлично от нуля только продольное напряжение  $\tau_{33} = E e_{33}$ . Таким образом, статическая гипотеза в классическом сопротивлении материалов эквивалентна предположению о нулевом коэффициенте Пуассона.

**Определяющие соотношения теории стержня Бернулли — Эйлера.** Эти соотношения связывают внутренние силовые факторы  $T$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  с кинематическими характеристиками  $\gamma$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  оси стержня. Для того чтобы их получить подставим напряжение  $\tau_{33}$  (22) в интегралы (14), (16) и найдем

$$T = A\gamma + B_I \kappa_I; \quad M_1 = B_1 \gamma + D_{1J} \kappa_J; \quad M_2 = -B_2 \gamma - D_{2J} \kappa_J, \quad (23)$$

где  $A$  — продольная жесткость;  $B_I$  — жесткости взаимного влияния;  $D_{IJ}$  — компоненты тензора изгибной жесткости;

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{F(x_3)} E_3(x_1, x_2, x_3) dF; & B_1 &= \int_{F(x_3)} x_2 E_3(x_1, x_2, x_3) dF; & B_2 &= \int_{F(x_3)} x_1 E_3(x_1, x_2, x_3) dF; \\
 D_{11} &= \int_{F(x_3)} x_2^2 E_3(x_1, x_2, x_3) dF; & D_{22} &= \int_{F(x_3)} x_1^2 E_3(x_1, x_2, x_3) dF; & & \\
 D_{12} &= D_{21} = \int_{F(x_3)} x_1 x_2 E_3(x_1, x_2, x_3) dF. & & & & 
 \end{aligned} \tag{24}$$

В простейшей теории всего шесть независимых жесткостей. Определяющие соотношения (23) легко обратить  $\gamma = aT - b_I M_I^*$ ;  $\kappa_I = -b_I T + d_{IJ} M_J^*$ , где  $M_1^* \equiv M_1$ ,  $M_2^* \equiv -M_2$ ;

$$a = \frac{1}{A - B_K D_{KL}^{-1} B_L}; \quad b_I = a B_K D_{KI}^{-1} = a D_{IK}^{-1} B_K; \quad d_{IJ} = D_{IJ}^{-1} + \frac{b_I b_J}{a}.$$

Здесь  $D_{IJ}^{-1}$  — коэффициенты матрицы, обратной к симметричной матрице  $D_{IJ}$ .

**Дифференциальные уравнения простейшей теории неоднородного стержня.** Подставим формулы (23) в уравнения Журавского (18), учтем кинематические соотношения (21) и получим связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент вектора перемещений оси сопутствующего стержня

$$(A w_3' - B_1 w_2' - B_2 w_1')' = -q_3; \quad (B_I w_3' - D_{I1} w_2'' - D_{I2} w_1'')'' = -p_I, \tag{25}$$

где  $p_1 = +m_1' - q_2$ ;  $p_2 = -m_2' - q_1$ . Система уравнений (25) записана для общего случая стержня с переменными по сечению и по длине продольным модулем Юнга и переменной по длине площадью поперечного сечения. Она представляет собой связанную систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. В случае главных центральных осей и постоянного по сечению модуля Юнга система (25) расщепляется на три независимых уравнения

$$(E_3 F w_3')' = -q_3; \quad (E_3 J_{11} w_2'')'' = p_1; \quad (E_3 J_{22} w_1'')'' = p_2. \tag{26}$$

По сути, изложенная выше теория является простейшей теорией неоднородного стержня, основанной на классической гипотезе плоских сечений и на гипотезе о независимости деформирования продольных «волокон» стержня.

**Инженерная теория изгиба неоднородного стержня.** Пусть перемещения в однородном сопутствующем стержне определяют по приближенной формуле (19).

**Ряды для перемещений и напряжений в инженерной теории неоднородного стержня.** После подстановки выражения (19) в формулы (5) и (6) получим приближенные формулы для перемещений и напряжений в неоднородном стержне

$$u_i = v_i + \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ N_{i33(q)} w_3^{(q+1)} - [x_K N_{i33(q)} + (q+1) N_{i33K(q)}] w_K^{(q+2)} \right\}; \tag{27}$$



$$\sigma_{ij} = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \tilde{C}_{ij33(q)} w_3^{(q+1)} - \left[ x_K \tilde{C}_{ij33(q)} + (q+1) \tilde{C}_{ij33K(q)} \right] w_K^{(q+2)} \right\}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij33(0)} &= C_{ijmn} N_{m33(0),n} + C_{ij33}; \\ \tilde{C}_{ij33(q)} &= C_{ijmn} N_{m33(q),n} + C_{ijm3} N_{m33(q-1)}; \\ \tilde{C}_{ij33K(q)} &= C_{ijmn} N_{m33K(q),n} + C_{ijmK} N_{m33(q)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Нижний индекс  $(q)$  в выражениях  $N_{i33(q)}$ ,  $N_{i33K(q)}$ ,  $\tilde{C}_{ij33(q)}$ ,  $\tilde{C}_{ij33K(q)}$  обозначает число троек в последовательности индексов, т. е.  $N_{i33(q)} \equiv N_{i33\underline{3\dots3}_q}$ ,

$$N_{i33K(q)} \equiv N_{i33K\underline{3\dots3}_q}.$$

Далее из общей формулы (28) выделим продольное напряжение в поперечном сечении

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \tilde{C}_{3333(q)} \gamma^{(q)} + \left[ x_1 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33331(q)} \right] \kappa_2^{(q)} + \left[ x_2 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33332(q)} \right] \kappa_1^{(q)} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

**Эффективные жесткости неоднородного стержня.** По продольным напряжениям  $\sigma_{33}$ , представленных рядом (30), находим внутренние силовые факторы — продольную силу  $T(x_3)$  и изгибающие моменты  $M_I(x_3)$  в поперечных сечениях неоднородного стержня:

$$T = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ A_{(q)} \gamma^{(q)} + \hat{B}_{I(q)} \kappa_I^{(q)} \right\}; \quad M_I^* = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ B_{I(q)} \gamma^{(q)} + D_{II(q)} \kappa_I^{(q)} \right\}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A_{(q)} &= F \langle \tilde{C}_{3333(q)} \rangle_F; \quad B_{1(q)} = F \langle x_2 \tilde{C}_{3333(q)} \rangle_F; \quad B_{2(q)} = F \langle x_1 \tilde{C}_{3333(q)} \rangle_F; \\ \hat{B}_{1(q)} &= F \langle x_2 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33332(q)} \rangle_F; \quad \hat{B}_{2(q)} = F \langle x_1 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33331(q)} \rangle_F; \\ D_{11(q)} &= F \langle x_2 \left[ x_2 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33332(q)} \right] \rangle_F; \\ D_{22(q)} &= F \langle x_1 \left[ x_1 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33331(q)} \right] \rangle_F; \\ D_{12(q)} &= F \langle x_2 \left[ x_1 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33331(q)} \right] \rangle_F; \\ D_{21(q)} &= F \langle x_1 \left[ x_2 \tilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \tilde{C}_{33332(q)} \right] \rangle_F. \end{aligned} \quad (32)$$

В (32) угловыми скобками с нижним индексом  $F$  обозначено среднее значение функции в поперечном сечении в точке  $x_3$ :

$$\langle f \rangle_F \equiv \frac{1}{F(x_3)} \int f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2.$$

Ряды (31) становятся конечными суммами в том случае, когда продольная деформация  $\gamma(x_3)$  оси и ее кривизны  $\kappa_I(x_3)$  являются полиномами конечной степени от координаты  $x_3$ . Коэффициенты  $A_{(q)}, \hat{B}_{I(q)}, B_{I(q)}, D_{II(q)}$  представляют собой коэффициенты жесткости  $q$ -го порядка, для каждого значения  $q$  всего девять коэффициентов жесткости:

- 1) продольная жесткость  $q$ -го порядка  $A_{(q)}$ , учитывающая степень зависимости продольной силы  $T$  от продольной деформации ( $q = 0$ ) и от ее производных ( $q > 0$ );
- 2) жесткости  $\hat{B}_{I(q)}$  влияния кривизн и их градиентов на продольную силу;
- 3) жесткости  $B_{I(q)}$  влияния продольной деформации и ее производных на изгибающие моменты;
- 4) компоненты тензора изгибной жесткости  $D_{II(q)}$ , которые определяют зависимость изгибающих моментов  $M_I$  от самих кривизн при  $q = 0$  и от их производных при  $q > 0$ .

Коэффициенты жесткости нулевого порядка будем называть *эффективными жесткостями неоднородного в поперечном сечении стержня*. В обозначениях эффективных жесткостей опустим индекс ноль в круглых скобках, т. е.  $A_{(0)} \equiv A, \hat{B}_{I(0)} \equiv \hat{B}_I, B_{I(0)} \equiv B_I, D_{II(0)} \equiv D_{II}$ . Эффективные жесткости могут быть функциями продольной координаты. Отметим, что в общем случае жесткости взаимного влияния не совпадают:  $\hat{B}_I \neq B_I$ , а изгибные жесткости несимметричны:  $D_{12} \neq D_{21}$ . Аналогичными свойствами обладают жесткости высших порядков.

**Уравнения для перемещений продольной линии.** Далее из уравнений Журавского (18), после подстановки в них выражений (31), получим три обыкновенных дифференциальных уравнения в общем случае бесконечного порядка относительно перемещений оси стержня

$$\sum_{q=0}^{\infty} \{A_{(q)}\gamma^{(q)} + \hat{B}_{I(q)}\kappa_I^{(q)}\}' = -q_3; \quad \sum_{q=0}^{\infty} \{B_{I(q)}\gamma^{(q)} + D_{II(q)}\kappa_I^{(q)}\}'' = -p_I. \quad (33)$$

Рассмотрим случай, когда в каждом ряде удерживаются только первые члены, соответствующие  $q = 0$ . Такая теория в механике композитов, по предложению Б.Е. Победри, называется теорией нулевого приближения [10]. Теория нулевого приближения предполагает, что в определяющих соотношениях (31) основной вклад дают только деформации и кривизны, а влияние градиентов этих величин незначительно.

**Теория нулевого приближения.** Продольное напряжение  $\sigma_{33}$  и определяющие соотношения теории неоднородной балки в нулевом приближении следуют из формул (30), (32) и при  $q = 0$  имеют вид (нули в индексах опущены):

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \tilde{C}_{3333}\gamma + (x_2\tilde{C}_{3333} + \tilde{C}_{33332})\kappa_1 + (x_1\tilde{C}_{3333} + \tilde{C}_{33331})\kappa_2 = \\ & = \tilde{C}_{3333}w_3' - (x_K\tilde{C}_{3333} + \tilde{C}_{3333K})w_3''; \end{aligned} \quad (34)$$

$$T = A\gamma + \hat{B}_I \kappa_I; \quad M_I^* = B_I \gamma + D_{IJ} \kappa_J. \quad (35)$$

Несложно получить обратные соотношения к (35), выражающие продольную деформацию и кривизны осевой линии через внутренние силовые факторы. Такие соотношения удобны в статически определенных задачах

$$\gamma = aT - \hat{b}_I M_I^*; \quad \kappa_I = -b_I T + d_{IJ} M_J^*, \quad (36)$$

или

$$\gamma = w'_3 = aT - \hat{b}_I M_I^*; \quad \kappa_1 = -w''_2 = -b_1 T + d_{1J} M_J^*; \quad \kappa_2 = -w''_1 = -b_2 T + d_{2J} M_J^*, \quad (37)$$

где

$$a = \frac{1}{A - \hat{B}_K D_{KL}^{-1} B_L}; \quad \hat{b}_I = a \hat{B}_K D_{KI}^{-1}; \quad b_I = a D_{IK}^{-1} B_K; \quad d_{IJ} = D_{IJ}^{-1} + \frac{b_I \hat{b}_J}{a}. \quad (38)$$

Коэффициенты  $a, \hat{b}_I, b_I, d_{IJ}$  представляют собой податливости неоднородного стержня. Подстановка соотношений (35) в уравнения Журавского дает систему уравнений изгиба неоднородной балки

$$\begin{aligned} (Aw'_3 - \hat{B}_1 w''_2 - \hat{B}_2 w''_1)' &= -q_3(x_3); \\ (B_1 w'_3 - D_{11} w''_2 - D_{12} w''_1)'' &= -p_I = -m'_I + \epsilon_{IK} q_K. \end{aligned} \quad (39)$$

**Граничные условия.** Для выделения единственного решения системы используют точно такие же граничные условия, как и в классическом случае. Всего 10 условий: пять на одном конце и пять на другом.

**Изгиб неоднородной консоли силами и моментами.** Пусть, например, консольный стержень, закреплен на конце  $x_3 = 0$  и нагружен на конце  $x_3 = L$  продольной силой  $T^0$  и поперечными силами  $Q_1^0, Q_2^0$ , а также двумя изгибающими моментами  $M_1^0, M_2^0$ . Полный комплект граничных условий будет следующим:

$$\begin{aligned} w_i(0) = 0; \quad w'_i(0) = 0; \quad (Aw'_3 - \hat{B}_1 w''_2 - \hat{B}_2 w''_1)_{x_3=L} &= T^0; \\ (B_1 w'_3 - D_{11} w''_2 - D_{12} w''_1)_{x_3=L} = M_1^0; \quad (B_2 w'_3 - D_{21} w''_2 - D_{22} w''_1)_{x_3=L} &= -M_2^0; \\ (B_1 w'_3 - D_{11} w''_2 - D_{12} w''_1)'_{x_3=L} = Q_1^0; \quad (B_2 w'_3 - D_{21} w''_2 - D_{22} w''_1)'_{x_3=L} &= -Q_2^0. \end{aligned} \quad (40)$$

В рассматриваемом примере не понадобятся статические граничные условия, поскольку задача является статически определенной и внутренние силовые факторы находятся без решения уравнений (39):

$$T = T^0; \quad Q_I = Q_I^0; \quad M_I = M_I^0 + \epsilon_{IS} Q_S^0 (L - x_3). \quad (41)$$

Из (41) и (37) получаем уравнения для перемещений оси стержня, которые легко интегрируются и дают следующие выражения для перемещений оси неоднородного стержня:

$$w_3 = \int_0^{x_3} [aT^0 - \hat{b}_I M_I^*(y)] dy; \tag{42}$$

$$w_1 = \int_0^{x_3} (x_3 - y) [b_2 T^0 - d_{2J} M_J^*(y)] dy, \quad w_2 = \int_0^{x_3} (x_3 - y) [b_1 T^0 - d_{1J} M_J^*(y)] dy.$$

Коэффициенты податливости в выражениях (42) могут быть функциями продольной координаты вследствие переменных по длине сечений и модулей упругости материала стержня. Далее по формулам (27) и (28) при  $q = 0$  находят перемещения и напряжения в неоднородном стержне в нулевом приближении

$$u_i = w_i - \delta_{i3} x_K w'_K + N_{i33}(x) w'_3 - [x_K N_{i33}(x) + N_{i33K}(x)] w''_K; \tag{43}$$

$$\sigma_{33} = \tilde{C}_{3333} (aT^0 - \hat{b}_I M_I^*) + (x_2 \tilde{C}_{3333} + \tilde{C}_{33332}) (-b_1 T^0 + d_{1J} M_J^*) + (x_1 \tilde{C}_{3333} + \tilde{C}_{33331}) (-b_2 T^0 + d_{2J} M_J^*). \tag{44}$$

Для получения конкретных числовых результатов в нулевом приближении необходимо найти структурные функции  $N_{i33}$  и  $N_{i33K}$ . Соответствующие уравнения для них следуют из (9)

$$[C_{ijmn} N_{m33,n} + C_{ij33}]_{,j} = 0; \tag{45}$$

$$[C_{ijmn} N_{m33K,n} + C_{ijmK} N_{m33}]_{,j} = C_{iK33}^0 - [C_{iKmn} N_{m33,n} + C_{iK33}],$$

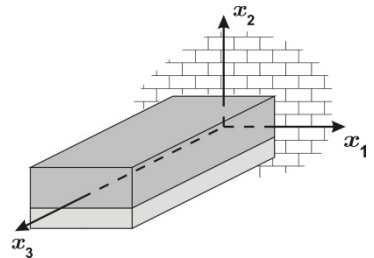
где

$$C_{iK33}^0 = \langle C_{iKmn} N_{m33,n} + C_{iK33} \rangle_F. \tag{46}$$

Уравнения (45) зависят от функциональной зависимости модулей упругости и от координат. В частности, в случае неоднородного в поперечном сечении стержня модули упругости зависят от координат  $x_1, x_2$  точки в сечении. От этих координат также будут зависеть  $N$ -функции и уравнения (4) становятся уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами в области поперечного сечения.

**Вычисление структурных функций неоднородной по толщине балки.**

Пусть неоднородная по толщине балка имеет сечение в виде прямоугольника  $h_1 \times h_2$  по осям, причем  $h_2 \ll h_1$ . Например, она состоит из двух слоев различных материалов, склеенных по контактной поверхности (рисунок). Модули упругости зависят только от координаты по толщине, т. е.  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_2)$ . В рассматриваемом случае (при ширине балки много большей ее толщины)  $N$ -функции также можно полагать функциями координаты  $x_2$ . При этом уравнения (45) становятся обыкновенными дифференциаль-



Неоднородная по толщине балка

ными уравнениями, которые легко интегрируются в общем виде. Первое из уравнений (45) имеет вид  $[C_{i2m2} N_{m33,2} + C_{i233}]_{,2} = 0$ . Откуда и из условия периодичности и условия нормировки  $N_{m33}(-h_2/2) = N_{m33}(h_2/2)$ ,  $\langle N_{m33} \rangle = 0$  получаем

$$N_{m33}(x_2) = \int_{-h_2/2}^{x_2} C_{m2n2}^{-1}(y) [\langle C_{n2k2}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{k2l2}^{-1} C_{l233} \rangle - C_{n233}(y)] dy - \left\langle \int_{-h_2/2}^y C_{m2n2}^{-1}(z) [\langle C_{n2k2}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{k2l2}^{-1} C_{l233} \rangle - C_{n233}(z)] dz \right\rangle, \quad (47)$$

где  $C_{m2n2}^{-1}$  — элемент матрицы, обратной к матрице  $(C_{m2n2})$ ,

$$(C_{m2n2}^{-1}) = \begin{pmatrix} C_{1212} & C_{1222} & C_{1232} \\ C_{2212} & C_{2222} & C_{2232} \\ C_{3212} & C_{3222} & C_{3232} \end{pmatrix}^{-1};$$

$$\langle \varphi(x_2) \rangle \equiv \frac{1}{h_2} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \varphi(x_2) dx_2 = \frac{1}{F} \int \varphi(x_2) dx_1 dx_2 = \langle \varphi(x_2) \rangle_F.$$

По формулам (29) и (46) находим коэффициенты  $\tilde{C}_{ij33}$  и  $C_{ij33}^o$ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij33} &= C_{ij33} + C_{ijm2} C_{m2n2}^{-1} \langle C_{n2p2}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p2q2}^{-1} C_{q233} \rangle - C_{ijm2} C_{m2n2}^{-1} C_{n233}; \\ C_{ij33}^o &= \langle C_{ij33} \rangle + \langle C_{ijm2} C_{m2n2}^{-1} \rangle \langle C_{n2p2}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p2q2}^{-1} C_{q233} \rangle - \langle C_{ijm2} C_{m2n2}^{-1} C_{n233} \rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Из формул (48) следует, что  $\tilde{C}_{i233}$  есть постоянные величины  $\tilde{C}_{i233} = \langle C_{i2p2}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p2q2}^{-1} C_{q233} \rangle = C_{i233}^o$ . В ортотропном материале отлична от нуля только одна структурная функция с тремя индексами, т. е.  $N_{133} = N_{333} \equiv 0$ , а

$$\begin{aligned} N_{233}(x_2) &= \\ &= \int_{-h_2/2}^{x_2} C_{2222}^{-1}(y) [C_{2233}^o - C_{2233}(y)] dy - \left\langle \int_{-h_2/2}^y C_{2222}^{-1}(z) [C_{2233}^o - C_{2233}(z)] dz \right\rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

Далее из уравнений (45) и условий, аналогичных условиям для функций  $N_{m33}$ , определим функции  $N_{m33K}$ . После первого интегрирования имеем

$$\begin{aligned} N_{m33K,2}(x_2) &= \\ &= C_{m2n2}^{-1}(x_2) \left\{ \int_{-h_2/2}^{x_2} (C_{nK33}^o - \tilde{C}_{nK33}(y)) dy - \langle C_{n2p2}^{-1} \rangle^{-1} \left\langle C_{p2q2}^{-1} \int_{-h_2/2}^y (C_{qK33}^o - \tilde{C}_{qK33}(z)) dz \right\rangle \right\} - \\ &\quad - C_{m2n2}^{-1}(x_2) [C_{n2rK}(x_2) N_{r33}(x_2) - \langle C_{n2p2}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p2q2}^{-1} C_{q2rK} N_{r33} \rangle]. \end{aligned}$$

Из этой формулы, в частности, получим  $N_{m332,2} = -\delta_{m2} N_{233}$ . В ортотропном случае из функций  $N_{m331,2}$  отлична от нуля только одна функция:

$$N_{1331,2} = C_{1212}^{-1} \left\{ \int_{-h_2/2}^{x_2} (C_{1133}^o - \tilde{C}_{1133}(y)) dy - \langle C_{1212}^{-1} \rangle^{-1} \left\langle C_{1212}^{-1} \int_{-h_2/2}^y (C_{1133}^o - \tilde{C}_{1133}(z)) dz \right\rangle \right\} - N_{233}. \tag{50}$$

По формуле (29) при  $q = 0$  можно найти коэффициенты  $\tilde{C}_{ij33K}$ , необходимые при вычислении эффективных жесткостей. Согласно (29), для неоднородной по толщине балки  $\tilde{C}_{ij332} \equiv 0$ , а коэффициенты  $\tilde{C}_{ij331}(x_2)$  вычисляются по формулам  $\tilde{C}_{ij331} = C_{ijm2} N_{m331,2} + C_{ijm1} N_{m33}$ . В ортотропном случае фактически остается только одна функция  $\tilde{C}_{12331} = \tilde{C}_{21331}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{12331}(x_2) &= C_{ijm2} N_{m331,2} + C_{ijm1} N_{m33} = C_{ij12} N_{1331,2} + C_{ij21} N_{233} = C_{ij12} (N_{1331,2} + N_{233}) = \\ &= C_{1212}^{-1}(x_2) \left\{ \int_{-h_2/2}^{x_2} (C_{1133}^o - \tilde{C}_{1133}(y)) dy - \langle C_{1212}^{-1} \rangle^{-1} \left\langle C_{1212}^{-1} \int_{-h_2/2}^y (C_{1133}^o - \tilde{C}_{1133}(z)) dz \right\rangle \right\}. \end{aligned} \tag{51}$$

**Эффективные жесткости и податливости неоднородной по толщине балки.** После определения структурных функций по формулам (32), (48) и (51) можно найти эффективные жесткости

$$\begin{aligned} A &= h_1 h_2 \langle \tilde{C}_{3333} \rangle_F = h_1 h_2 \left[ \langle C_{3333} \rangle + \langle C_{2222}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{2222}^{-1} C_{2233} \rangle^2 - \langle C_{2222}^{-1} C_{2233}^2 \rangle \right] = h_1 h_2 C_{3333}^o; \\ \hat{B}_1 = B_1 &= h_1 h_2 \langle x_2 \tilde{C}_{3333} \rangle_F = h_1 h_2 \left[ \left\langle x_2 \left( C_{3333} + C_{2222}^{-1} C_{2233} \langle C_{2222}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{2222}^{-1} C_{2233} \rangle - C_{2222}^{-1} C_{2233}^2 \right) \right\rangle \right]; \\ D_{11} &= h_1 h_2 \langle x_2^2 \tilde{C}_{3333} \rangle_F = h_1 h_2 \left[ \left\langle x_2^2 \left( C_{3333} + C_{2222}^{-1} C_{2233} \langle C_{2222}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{2222}^{-1} C_{2233} \rangle - C_{2222}^{-1} C_{2233}^2 \right) \right\rangle \right]; \\ D_{22} &= h_1 h_2 \langle x_1^2 \tilde{C}_{3333} \rangle_F = \frac{h_1^3 h_2}{12} \langle \tilde{C}_{3333} \rangle = \frac{h_1^3 h_2}{12} C_{3333}^o; \\ \hat{B}_2 = B_2 &= h_1 h_2 \langle x_1 \tilde{C}_{3333} \rangle_F = 0, \quad D_{12} = D_{21} = h_1 h_2 \langle x_1 x_2 \tilde{C}_{3333} \rangle_F = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Эффективные коэффициенты податливости неоднородной по толщине балки определяют из общих формул (38)

$$\begin{aligned} a &= \frac{D_{11}}{AD_{11} - B_1^2}; \quad \hat{b}_1 = b_1 = \frac{B_1}{AD_{11} - B_1^2}; \quad d_{11} = \frac{1}{D_{11}} \left( 1 + \frac{B_1^2}{AD_{11} - B_1^2} \right); \\ d_{22} &= \frac{1}{D_{22}}; \quad \hat{b}_2 = b_2 = 0; \quad d_{12} = d_{21} = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Формулы (52) и (53) получены для балки с постоянным по длине прямоугольным поперечным сечением из ортотропного материала, у которого компоненты тензора модулей упругости  $C_{ijkl}(x_2)$  — произвольные интегрируемые функции координаты  $x_2$ .

**Случай двухслойной балки.** В частном случае двухслойной балки (см. рисунок), когда каждый слой представляет собой изотропный материал, компоненты тензора модулей упругости определяются по формулам

$$C_{ijkl}(x_2) = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_1 \Delta_{ijkl} + \theta(x_2 - x_2^*) [(\lambda_2 - \lambda_1) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(\mu_2 - \mu_1) \Delta_{ijkl}];$$

$$\lambda_I = \frac{E_I \nu_I}{(1 + \nu_I)(1 - 2\nu_I)}; \quad \mu_I = \frac{E_I}{2(1 + \nu_I)}. \quad (54)$$

Здесь  $\lambda_1, \mu_1, E_1, \nu_1$  — параметры Ламе, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала первого слоя, для которого  $-h_2/2 \leq x_2 \leq x_2^* \leq h_2/2$ ;  $\lambda_2, \mu_2, E_2, \nu_2$  — соответствующие величины второго слоя, для которого  $-h_2/2 \leq x_2^* \leq x_2 \leq h_2/2$ ;  $\theta(x_2 - x_2^*)$  — функция Хевисайда [11].

Отметим еще одну особенность предлагаемой теории: в однородном случае все  $N$ -функции обращаются в нуль и перемещения определяют по формуле (19) в соответствии с гипотезой плоских сечений. Для того чтобы и напряжения в однородном случае соответствовали теории балки Бернулли — Эйлера, необходимо в уравнениях (45) под матрицей модулей упругости понимать модифицированную матрицу, в которой коэффициент  $C_{3333} = E_3$ , где  $E_3$  — модуль Юнга в направлении оси стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 223 с.
2. Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. С. 61–76.
3. Горбачев В.И. Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности // Известия РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 31–37.
4. Горбачев В.И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости. Применение в механике композитов // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 277–299.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
7. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 372 с.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 560 с.
9. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
10. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
11. Кеч В., Теодореску П.В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

**Горбачев Владимир Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры механики композитов Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1), профессор-консультант ООО «ФИДИС».

**Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Горбачев В.И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 56–72. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-56-72

**ENGINEERING RESISTANCE THEORY OF HETEROGENEOUS RODS MADE OF COMPOSITE MATERIALS**

**V.I. Gorbachev**

vigorby@mail.ru

**Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

To construct the engineering resistance theory of heterogeneous rods, we used an integral formula which presents the displacement of the body points in the initial problem of the heterogeneous body elasticity theory by means of the points displacement in a similar problem, but for a homogeneous elastic body (an accompanying task). The integral formula implies an equivalent notion of displacements series in a heterogeneous rod. The displacements are compared to the derivatives in the accompanying homogeneous rod. We approximately defined the points displacement of the accompanying rod by classical strength of materials methods through the three components of the points displacement vector relative to its axis. As a result, we presented the displacement vector components of any point of the heterogeneous rod in the form of series of derivatives displacement of the longitudinal axis of a homogeneous rod. According to the displacement, we found the series for stresses in the heterogeneous rod. Furthermore, by longitudinal stress we determined the internal force factors in the heterogeneous rod cross section — longitudinal force and two bending moments, presented in series of derivatives of the three components of the rod axis displacement vector. Then, from Zhuravsky equations we derived a system of three ordinary differential equations of infinite order with respect to the three components of the longitudinal axis displacement vector. This paper studies the so-called theory of zero-order approximation, which takes into account only the rod axis longitudinal deformation and curvature (kinematic factors) to express internal force factors. The coefficients within the kinematic factors are the effective rigidity of the rod — longitudinal rigidity, four bending rigidities and four rigidities of mutual influence, which are calculated after solving the supporting planar and antiplanar problems in cross-section of the heterogeneous rod

**Keywords**

*Heterogeneous rod, problem of the heterogeneous body elasticity theory, theory of zero-order approximation, effective rigidity*



## REFERENCES

- [1] Pobedrya B.E. *Lektsii po tenzornomu analizu* [Lectures on tensor analysis]. Moscow, MGU Publ., 1979. 223 p.
- [2] Gorbachev V.I. Green tensor method for solving boundary value problems of the theory of elasticity for inhomogeneous media. *Vych. Mekh. Sploshn. Sred*, 1991, no. 2, pp. 61–76 (in Russ.).
- [3] Gorbachev V.I. Averaging of linear problems in the mechanics of composites with nonperiodic inhomogeneities. *Mech. Solids*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 24–29.
- [4] Gorbachev V.I. Integral formula in the coupled problem of the thermoelasticity of an inhomogeneous body. Application in the mechanics of composite materials. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, iss. 2, pp. 192–208.
- [5] Nowacki W. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir Publ., 1975. 872 p.
- [6] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
- [7] Il'yushin A.A., Lenskiy V.S. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 372 p.
- [8] Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 1999. 560 p.
- [9] Rabotnov Yu.N. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 456 p.
- [10] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MGU Publ., 1984. 336 p.
- [11] Kecs W., Teodorescu P. Introduction to the theory of generalized functions with applications to engineering. Bucuresti, Editura Tehnica, 1975 (Russ. ed.: Moscow, Mir Publ., 1978. 518 p.).

**Gorbachev V.I.** — Dr. Sci., Professor of Mechanics of Composites Department, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Leninskie Gory 1, Moscow, 119991 Russian Federation), Professor-Consultant of Fidis.

**Please cite this article in English as:**

Gorbachev V.I. Engineering Resistance Theory of Heterogeneous Rods made of Composite Materials. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 6, pp. 56–72.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-56-72