

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Ю.И. Дмитриенко  
И.О. Богданов

dimit.bmstu@gmail.com  
biofamily\_7394@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Рассмотрены трехмерные задачи теории устойчивости упругих конструкций. Использована тензорная постановка этого класса задач, предложенная ранее Ю.И. Дмитриенко. Трехмерные задачи теории устойчивости упругих конструкций являются относительно мало исследованными, в отличие от двумерных задач теории устойчивости. В настоящее время численные методы их решения не известны. Сформулирована вариационная постановка задачи трехмерной теории устойчивости. На основе этой постановки предложен конечно-элементный метод решения задач теории устойчивости, который сводится к нахождению собственных значений системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей глобальной жесткости. Разработан программный модуль, реализующий предложенный конечно-элементный метод в рамках программного комплекса SMCM, разработанного в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана, с использованием CSIR-схемы хранения разреженных матриц и метода бисопряженных градиентов. Проведен тестовый расчет для задачи устойчивости прямоугольной пластины при продольном сжатии. Сравнение конечно-элементного решения этой задачи по трехмерной теории и теории пластин Тимошенко показало высокую точность разработанного численного метода при определении критических нагрузок. В то же время трехмерная теория позволяет установить более точные формы собственных функций потери устойчивости

### Ключевые слова

*Трехмерные задачи теории устойчивости, вариационная постановка задачи теории устойчивости, метод конечного элемента, устойчивость пластины, критические нагрузки*

Поступила в редакцию 10.04.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

---

**Введение.** Традиционные методы расчета конструкций на устойчивость, которые в настоящее время широко используют в инженерной практике, основаны на анализе двумерных теорий пластин и оболочек или одномерных теорий стержневых конструкций [1–14]. Для многих важных практических задач необходимо оценивать влияние трехмерных эффектов на устойчивость конструкций, например, влияние одиночных уединенных дефектов, локальных зон соединения элементов, местных изменений толщины и др. Двумерные и одномерные теории

устойчивости конструкций не обеспечивают достаточной точности при исследовании задач этого класса, в связи с чем в последнее время стала актуальной проблема исследования устойчивости конструкций в рамках общей трехмерной теории. Число как отечественных, так и зарубежных публикаций, посвященных трехмерным задачам устойчивости, весьма ограничено [13–18]. Одним из первых, кто вывел уравнения теории устойчивости из общей нелинейной теории упругости, используя при этом один из возможных ее вариантов определяющих соотношений, был В.В. Новожилов [15]. Некоторые оригинальные подходы к выводу трехмерных уравнений устойчивости рассмотрены в работах А.Н. Гузя [14]. Обобщенные трехмерные уравнения теории устойчивости нелинейно-упругих тел с конечными деформациями для широкого класса моделей нелинейной упругости, из которых были получены уравнения трехмерной теории устойчивости при малых деформациях, были выведены в работах [16, 17].

Цель настоящей работы — разработка конечно-элементного метода решения трехмерной задачи теории устойчивости линейно-упругих тел с малыми деформациями в общей трехмерной постановке, сформулированной в работах [16–18].

**Математическая модель трехмерной теории устойчивости.** Согласно разработанной в работах [16, 17] теории, трехмерный расчет устойчивости упругих конструкций заключается в последовательном решении двух задач. Первая из них — задача равновесия упругой конструкции для основного (устойчивого) состояния (трехмерная задача теории упругости), которая имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 &= 0; \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u}^0 + \nabla \otimes \mathbf{u}^{0T}); \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0|_{\Sigma_\sigma} &= \mu \mathbf{S}_e, \quad \mathbf{u}^0|_{\Sigma_u} = \mu \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}^0$  — тензор напряжений;  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  — тензор малых деформаций;  $\mathbf{u}^0$  — вектор перемещений;  ${}^4\mathbf{C}$  — тензор четвертого ранга модулей упругости;  $\nabla$  — nabla-оператор;  $\mathbf{S}_e$ ,  $\mathbf{u}_e$  — векторы внешних поверхностных сил и перемещений;  $\mu$  — безразмерный коэффициент при векторах внешних поверхностных сил и перемещений, характеризующий пропорциональное возрастание внешних сил и перемещений во времени.

Вторая задача — задача теории устойчивости линейно-упругих конструкций формулируется для варьируемого (неустойчивого) состояния конструкции и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot (\mathbf{B} \cdot {}^3\boldsymbol{\varepsilon}) &= 0; \\ \boldsymbol{\sigma} &= {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w} + \nabla \otimes \mathbf{w}^T); \\ \mathbf{B} &= \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \cdot {}^3\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}); \quad \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w} - \nabla \otimes \mathbf{w}^T); \\ \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot {}^3\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega})|_{\Sigma_\sigma} &= 0; \quad \mathbf{w}|_{\Sigma_u} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений;  $\epsilon$  — тензор малых деформаций;  $w$  — вектор перемещений в варьированном (неустойчивом) состоянии;  ${}^3\epsilon$  — тензор Леви-Чивиты.

Решение задач (1), (2) осуществляют в соответствии с приведенным ниже алгоритмом.

1. Решают задачу (1) для основного состояния при значении параметра  $\mu = 1$ .

2. Вычисляют поле тензора напряжений  $\sigma^0(1)$ . В силу линейности задачи любому другому значению параметра  $\mu$  соответствует поле тензора напряжений  $\sigma^0(\mu) = \mu\sigma^0(1)$ .

3. Подставляют поле  $\sigma^0(\mu)$  в (2), получают задачу теории устойчивости (задачу на собственные значения  $\mu$ ).

4. Решают задачу (2), вычисляют систему собственных значений  $\mu$  и собственных функций  $w$ .

**Вариационная формулировка задачи трехмерной теории устойчивости.** Для задач (1), (2) могут быть сформулированы вариационные постановки. Рассмотрим задачу (1) равновесия для основного (устойчивого) состояния. Введем кинематически допустимое поле  $\Psi^0 = \delta u^0$ , где  $\delta u^0$  — вариация вектора перемещения  $u^0$ , понимаемая как разность двух кинематически допустимых полей. Примем, что данное поле удовлетворяет нулевому граничному условию на части поверхности  $\Sigma_u$  области  $V$ . Умножая скалярно уравнение равновесия из системы (1) на  $\Psi^0$  и интегрируя полученное выражение по области  $V$ , с учетом преобразования

$$\Psi^0 \cdot \nabla \cdot \sigma^0 = \nabla \cdot (\Psi^0 \cdot \sigma^0) - \sigma^0 \cdot \nabla \otimes \Psi^0$$

и теоремы Гаусса — Остроградского получаем вариационное уравнение для задачи равновесия в основном состоянии

$$\int_V {}^4C \cdot \epsilon^0(u^0) \cdot \delta \epsilon^0(u^0) dV - \int_{\Sigma_\sigma} S_e \cdot \delta u^0 d\Sigma = 0. \quad (3)$$

Используя аналогичный подход применительно к задаче устойчивости (2) в варьированном состоянии, приходим к вариационному уравнению

$$\int_V ({}^4C \cdot \epsilon(w) + \sigma^0 \cdot \Omega(w)) \cdot \delta \nabla \otimes w^T dV = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является задачей на собственные значения, в которой после подстановки  $\sigma^0(\mu) = \mu\sigma^0(1)$ , требуется найти собственные значения  $\mu$  и соответствующие им собственные функции  $w$ . На практике особый интерес представляет наименьшее собственное значение  $\mu_{\min}$ , поскольку ему соответствует наименьшая критическая нагрузка  $S_{\text{кр}}$ , приводящая к первой форме потери

устойчивости. Всем остальным значениям  $\mu$  отвечают другие формы потери устойчивости конструкции.

**Метод конечных элементов для численного решения трехмерной задачи теории устойчивости.** Для решения задач (3), (4) применим метод конечных элементов (МКЭ) [19–21]. Триангуляцию расчетной области осуществим с помощью тетраэдральных конечных элементов (КЭ). Используем линейную аппроксимацию для перемещений в каждом КЭ, напряжения и деформации при этом полагаем постоянными в каждом элементе. Для дальнейших преобразований введем следующие матричные обозначения:

$$[C]_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \quad (5)$$

— матрица компонент тензора модулей упругости  ${}^4C$ ;

$$[N]_{3 \times 12} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

— матрица функций формы;

$$[L_1]_{6 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (7)$$

— матрица оператора дифференцирования.

Для основного (устойчивого) состояния используем обозначения

$$\left\{ \sigma^0 \right\}_6^T = \left( \sigma_{11}^0 \quad \sigma_{22}^0 \quad \sigma_{33}^0 \quad \sigma_{23}^0 \quad \sigma_{13}^0 \quad \sigma_{12}^0 \right) \quad (8)$$

— строка компонент тензора напряжений в КЭ;

$$\left\{ \varepsilon^0 \right\}_6^T = \left( \varepsilon_{11}^0 \quad \varepsilon_{22}^0 \quad \varepsilon_{33}^0 \quad 2\varepsilon_{23}^0 \quad 2\varepsilon_{13}^0 \quad 2\varepsilon_{12}^0 \right) \quad (9)$$

— строка компонент тензора малых деформаций в КЭ;

$$\{u^0\}_3^T = (u_1^0 \quad u_2^0 \quad u_3^0) \tag{10}$$

— строка компонент вектора перемещений в КЭ;

$$\{U^0\}_{12}^T = (U_{11}^0 \quad U_{12}^0 \quad U_{13}^0 \quad U_{21}^0 \quad U_{22}^0 \quad U_{23}^0 \quad U_{31}^0 \quad U_{32}^0 \quad U_{33}^0 \quad U_{41}^0 \quad U_{42}^0 \quad U_{43}^0) \tag{11}$$

— строка компонент вектора перемещения в узлах КЭ ( $U_{ij}^0$  —  $j$ -я компонента вектора перемещений  $u_j^0$  в  $i$ -м узле КЭ);

$$\{S_e\}_3^T = (S_1, S_2, S_3) \tag{12}$$

— строка компонент вектора внешних поверхностных сил в КЭ.

С учетом введенных обозначений обобщенный закон Гука (второе уравнение в системе (1)) может быть записан в эквивалентной форме

$$\{\sigma^0\}_6 = [C]_{6 \times 6} \{\varepsilon^0\}_6 \tag{13}$$

а соотношения Коши (третье уравнение в системе (1)) примут вид

$$\{\varepsilon^0\}_6 = [L_1]_{6 \times 3} \{u^0\}_3 \tag{14}$$

где вектор перемещений КЭ связан с вектором перемещений его узлов как

$$\{u^0\}_3 = [N]_{3 \times 12} \{U^0\}_{12} \tag{15}$$

Вариация компонент тензора малых деформаций  $\{\delta\varepsilon^0\}_6$  может быть выражена так

$$\{\delta\varepsilon^0\}_6 = [L_1]_{6 \times 3} \{\delta u^0\}_3 \tag{16}$$

Здесь

$$\{\delta u^0\}_3 = [N]_{3 \times 12} \{\delta U^0\}_{12} \tag{17}$$

Подставляя соотношения (7)–(17) в вариационное уравнение (3) и преобразуя полученное выражение, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения значений в узлах КЭ компонент вектора перемещений в основном состоянии

$$[K]_{12 \times 12} \{U^0\}_{12} = \{F\}_{12} \tag{18}$$

где введены обозначения для локальной матрицы жесткости  $[K]_{12 \times 12}$  и вектора правых частей  $\{F\}_{12}$ :

$$[K] = \int [B_1]^T [C] [B_1] dV, \quad \{F\} = \int [N]^T \{S_e\} dV, \quad [B_1] = [L_1] [N]. \quad (19)$$

$\begin{matrix} 12 \times 12 & V & 12 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 12 & 12 & \Sigma_{\sigma} & 12 \times 3 & 3 & 6 \times 12 & 6 \times 3 & 3 \times 12 \end{matrix}$

Матрица  $[K]$  является симметричной, что позволяет применять для решения СЛАУ (18) эффективные итерационные методы сопряженных градиентов.

Рассмотрим вариационное уравнение (4) для задачи устойчивости. Введем обозначения

$$\{\sigma\}_6^T = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}) \quad (20)$$

— строка компонент тензора напряжений в варьируемом состоянии;

$$\{\varepsilon\}_6^T = (\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}) \quad (21)$$

— строка компонент тензора малых деформаций в варьируемом состоянии;

$$\{w\}_3^T = (w_1 \quad w_2 \quad w_3) \quad (22)$$

— строка компонент вектора перемещения в варьируемом состоянии;

$$\{W\}_{12}^T = (W_{11} \quad W_{12} \quad W_{13} \quad W_{21} \quad W_{22} \quad W_{23} \quad W_{31} \quad W_{32} \quad W_{33} \quad W_{41} \quad W_{42} \quad W_{43}) \quad (23)$$

— строка компонент вектора перемещения в узлах КЭ в варьируемом состоянии.

Образуем матрицу из компонент тензора напряжений в основном (устойчивом) состоянии

$$[\sigma^0]_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^0 & 0 & 0 & \sigma_{12}^0 & 0 & 0 & \sigma_{13}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11}^0 & 0 & 0 & \sigma_{12}^0 & 0 & 0 & \sigma_{13}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11}^0 & 0 & 0 & \sigma_{12}^0 & 0 & 0 & \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{21}^0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^0 & 0 & 0 & \sigma_{23}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{21}^0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^0 & 0 & 0 & \sigma_{23}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{21}^0 & 0 & 0 & \sigma_{22}^0 & 0 & 0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{31}^0 & 0 & 0 & \sigma_{32}^0 & 0 & 0 & \sigma_{33}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{31}^0 & 0 & 0 & \sigma_{32}^0 & 0 & 0 & \sigma_{33}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{31}^0 & 0 & 0 & \sigma_{32}^0 & 0 & 0 & \sigma_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

а также строку, элементами которой являются все производные вида  $R_{ij} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$

$$\{R\}_9 = (R_{11} \quad R_{12} \quad R_{13} \quad R_{21} \quad R_{22} \quad R_{23} \quad R_{31} \quad R_{32} \quad R_{33}). \quad (25)$$

Введем матрицу, составленную из операторов дифференцирования

$$[L_2]_{9 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T, \quad (26)$$

и матрицу транспонирования

$$[T]_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

С учетом введенных обозначений обобщенный закон Гука (второе уравнение в системе (2)) может быть записан в эквивалентной форме

$$\left\{ \sigma \right\}_6 = [C]_{6 \times 6} \left\{ \varepsilon \right\}_6, \quad (28)$$

а соотношения Коши (третье уравнение в системе (2)) примут вид

$$\left\{ \varepsilon \right\}_6 = [L_1]_{6 \times 3} \left\{ w \right\}_3, \quad (29)$$

где вектор перемещения КЭ в варьируемом состоянии связан с вектором перемещений его узлов как

$$\left\{ w \right\}_3 = [N]_{3 \times 12} \left\{ W \right\}_{12}. \quad (30)$$

Вариации компонент тензора малых деформаций  $\left\{ \varepsilon \right\}_6$  и производных  $\left\{ R \right\}_9$  могут быть выражены как

$$\left\{ \delta \varepsilon \right\}_6 = [L_1]_{6 \times 3} \left\{ \delta w \right\}_3; \quad (31)$$

$$\left\{ \delta R \right\}_9 = [L_2]_{9 \times 3} \left\{ \delta w \right\}_3, \quad (32)$$

где

$$\left\{ \delta w \right\}_3 = [N]_{3 \times 12} \left\{ \delta W \right\}_{12}. \quad (33)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (4) с учетом обобщенного закона Гука и выражения для кососимметричного тензора  $\Omega(\mathbf{w})$  из (2):

$$\begin{aligned}
 & \left( {}^4\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{w}) \right) \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T = \\
 & = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^T \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T = \\
 & = G^{(1)} + G^{(2)} + G^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 G^{(1)} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T; \\
 G^{(2)} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T; \\
 G^{(3)} &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^T \cdot \delta \nabla \otimes \mathbf{w}^T.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Несложно проверить, что первое слагаемое (35) может быть записано в форме

$$G^{(1)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}). \tag{36}$$

С учетом введенных ранее обозначений (20) и (21), а также соотношений (31) и (33) выражение (36) эквивалентно скалярному произведению матрицы и строк

$$G^{(1)} = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_6^T \left\{ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \right\}_6 = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_6^T \left[ L_1 \right]_{6 \times 3} \left[ N \right]_{3 \times 12} \left\{ \delta W \right\}_{12} = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_6^T \left[ B_1 \right]_{6 \times 12} \left\{ \delta W \right\}_{12}, \tag{37}$$

где  $\left[ B_1 \right]_{6 \times 12} = \left[ L_1 \right]_{6 \times 3} \left[ N \right]_{3 \times 12}$  — матрица производных функций формы.

Для дальнейших преобразований второе и третье слагаемые в (35) удобно переписать в компонентной форме, в результате чего они примут вид

$$G^{(2)} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 R_{jk} \delta R_{ik}, \quad G^{(3)} = -\frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 R_{kj} \delta R_{ik}. \tag{38}$$

С учетом введенных ранее обозначений и соотношений (31)–(33) скаляр  $G^{(2)}$  можно представить так

$$\begin{aligned}
 G^{(2)} &= \frac{1}{2} \left( \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 \right]_{9 \times 9} \left\{ R \right\}_9 \right)^T \left\{ \delta R \right\}_9 = \frac{1}{2} \left\{ \delta R \right\}_9^T \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 \right]_{1 \times 9} \left\{ R \right\}_9 = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left[ L_2 \right]_{9 \times 3} \left\{ \delta W \right\}_3 \right)^T \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 \right]_{9 \times 9} \left[ L_2 \right]_{9 \times 3} \left\{ W \right\}_3 = \frac{1}{2} \left( \left[ L_2 \right]_{9 \times 3} \left[ N \right]_{3 \times 12} \left\{ \delta W \right\}_{12} \right)^T \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 \right]_{9 \times 9} \left[ L_2 \right]_{9 \times 3} \left[ N \right]_{3 \times 12} \left\{ W \right\}_{12} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \delta W \right\}_{12}^T \left[ B_2 \right]_{12 \times 9}^T \left[ \boldsymbol{\sigma}^0 \right]_{9 \times 9} \left[ B_2 \right]_{9 \times 12} \left\{ W \right\}_{12},
 \end{aligned} \tag{39}$$

где  $\left[ B_2 \right]_{9 \times 12} = \left[ L_2 \right]_{9 \times 3} \left[ N \right]_{3 \times 12}$  — матрица производных функций формы.

Третье выражение в (35) с учетом (31)–(33) может быть преобразовано следующим образом:



$$\begin{aligned}
 G^{(3)} &= \frac{1}{2} \left\{ \delta R \right\}^T \left[ \begin{matrix} \sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} T \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left\{ R \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left[ \begin{matrix} L_2 \\ 9 \times 3 \end{matrix} \right] \left\{ \delta w \right\} \right)^T \left[ \begin{matrix} \sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} L_2 \\ 9 \times 3 \end{matrix} \right] \left\{ w \right\} = \frac{1}{2} \left( \left[ \begin{matrix} L_2 \\ 9 \times 3 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} N \\ 3 \times 12 \end{matrix} \right] \left\{ \delta W \right\} \right)^T \left[ \begin{matrix} \sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} T \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} L_2 \\ 9 \times 3 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} N \\ 3 \times 12 \end{matrix} \right] \left\{ W \right\} = \quad (40) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \delta W \right\}^T \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} T \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 9 \times 12 \end{matrix} \right] \left\{ W \right\}.
 \end{aligned}$$

В общем случае произведение симметричных матриц  $\left[ \begin{matrix} \sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right]$  и  $\left[ \begin{matrix} T \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right]$  дает несимметричную матрицу. Однако можно провести симметризацию с помощью следующего свойства. Пусть задана квадратичная форма вида

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j,$$

где  $A_{ij}$  — компоненты некоторой несимметричной квадратной матрицы  $(A_{ij})$ ;  $x_i$  — компоненты вектора. Тогда эта же квадратичная форма может быть представлена эквивалентным образом  $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_{ij} x_i x_j$ ,  $\tilde{A}_{ij}$  — компоненты симметричной матрицы  $(\tilde{A}_{ij})$ , связанные с компонентами матрицы  $(A_{ij})$  как  $\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ . В рассматриваемом случае в силу произвольности вариации  $\left\{ \delta W \right\}^T$  можно принять

$$\left\{ \delta W \right\}^T \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T = \left\{ W \right\}^T \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T. \quad (41)$$

Запишем второе и третье слагаемые

$$G^{(2)} + G^{(3)} = -\frac{1}{2} \left\{ \delta W \right\}^T \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 9 \times 12 \end{matrix} \right] \left\{ W \right\}, \quad (42)$$

где  $\left[ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} \sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left( \left[ \begin{matrix} T \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} E \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \right)$ , и симметризуем матрицу  $\left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 9 \times 12 \end{matrix} \right]$  указанным выше способом с учетом (41)

$$\begin{aligned}
 G^{(2)} + G^{(3)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \delta W \right\}^T \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 9 \times 12 \end{matrix} \right] \left\{ W \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \delta W \right\}^T \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \frac{1}{2} \left( \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 9 \times 12 \end{matrix} \right] + \left( \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 12 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ 9 \times 9 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} B_2 \\ 9 \times 12 \end{matrix} \right] \right)^T \right) \left\{ W \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \{ \delta W \}_{12}^T \frac{1}{2} \left( [B_2]_{12 \times 9}^T [\Sigma^0]_{9 \times 9} [B_2]_{9 \times 12} + [B_2]_{12 \times 9}^T [\Sigma^0]_{9 \times 9}^T [B_2]_{9 \times 12} \right) \{ W \}_{12} = \\
&= -\frac{1}{2} \{ \delta W \}_{12}^T [B_2]_{12 \times 9}^T [\tilde{\Sigma}^0]_{9 \times 9} [B_2]_{9 \times 12} \{ W \}_{12},
\end{aligned} \tag{43}$$

где  $[\tilde{\Sigma}^0]_{9 \times 9} = \frac{1}{2} \left( [\Sigma^0]_{9 \times 9} + [\Sigma^0]_{9 \times 9}^T \right)$  — симметричная матрица.

Подставляя соотношения (34), (35) и (43) в вариационное уравнение (4) и преобразуя полученное выражение, с учетом замены  $[\sigma^0(\mu)]_{9 \times 9} = \mu [\sigma^0(1)]_{9 \times 9}$ , запишем искомую СЛАУ для задачи устойчивости

$$[K]_{12 \times 12} \{ W \}_{12} = \mu [S]_{12 \times 12} \{ W \}_{12}. \tag{44}$$

Здесь введены обозначения для следующих симметричных матриц:

$$[K]_{12 \times 12} = \int_V [B_1]_{12 \times 6}^T [C]_{6 \times 6} [B_1]_{6 \times 12} dV, \quad [S]_{12 \times 12} = \frac{1}{2} \int_V [B_2]_{12 \times 9}^T [\tilde{\Sigma}^0]_{9 \times 9} [B_2]_{9 \times 12} dV. \tag{45}$$

Для численного решения задачи (44) на собственные значения был разработан программный модуль, реализующий предложенный конечно-элементный метод в рамках программного комплекса SMCM, разработанного в НОЦ «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана, с использованием CSIR-схемы хранения разряженных матриц и метода бисопряженных градиентов.

**Тестовая задача об устойчивости пластины при продольном сжатии.** Для проверки точности разработанного конечно-элементного метода решения задачи устойчивости была рассмотрена тестовая задача об устойчивости прямоугольной пластины при продольном сжатии. Решение этой задачи было выполнено двумя методами:

1) в рамках общей трехмерной теории разработанного конечно-элементного метода;

2) в рамках одномерной теории устойчивости пластины, рассматриваемой по модели Тимошенко, при действии на нее продольной сжимающей нагрузки. Задача устойчивости пластины по модели Тимошенко сводится к нахождению собственных значений и собственных функций уравнения четвертого порядка [17]

$$\frac{d^4 w_3^{(0)}}{dx_1^4} + \mu \frac{d^2 w_3^{(0)}}{dx_1^2} = 0, \quad 0 < x_1 < l \tag{46}$$

с граничными условиями на торцах пластины

$$\begin{aligned}
w_3^{(0)}(0) &= 0, & w_3^{(0)}(l) &= 0; \\
\frac{dw_3^{(0)}}{dx_1}(0) &= 0, & \frac{dw_3^{(0)}}{dx_1}(l) &= 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

Здесь  $w_3^{(0)}$  — прогиб (собственные функции) пластины в варьируемом состоянии;  $l$  — длина пластины;  $\mu$  — собственное значение задачи, которое связано с продольным сжимающим усилием  $T^0$ , действующим на пластину [17],

$$\mu^2 = \frac{T^0}{D_{11} \left( 1 - \frac{T^0}{2hC_{1313}} \right)}, \tag{48}$$

где  $D_{11} = (h^3/12)C_{1111}$  — изгибная жесткость;  $h$  — толщина пластины;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора модулей упругости пластины.

Задача (46), (47) решена методом конечных разностей с использованием конечно-разностной аппроксимации производных на равномерной сетке. В результате задачу (46), (47) сводят к нахождению собственных значений следующей СЛАУ:

$$[K]\{y\} = \mu[S]\{y\}, \tag{49}$$

где  $\{y\}$  — столбец значений функции прогиба  $w_3^{(0)}$  в узлах конечно-разностной сетки;  $[K]$ ,  $[S]$  — матрицы,

$$[K] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h^2 & 2h^2 & -h^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -h^2 & 2h^2 & -h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Результаты численных расчетов.** Размеры пластины вдоль каждого координатного направления были приняты равными  $1 \times 0,1 \times 0,02$  м. Упругие константы материала пластины соответствуют тканевому стеклопластику со значениями  $E_1 = E_2 = 20$  ГПа,  $E_3 = 6$  ГПа,  $G_{13} = G_{23} = 3$  ГПа,  $G_{12} = 0,2$  ГПа,  $\nu_{13} = \nu_{23} = 0,15$ ,  $\nu_{12} = 0,2$ . Предполагалось, что пластина находится в одноосном

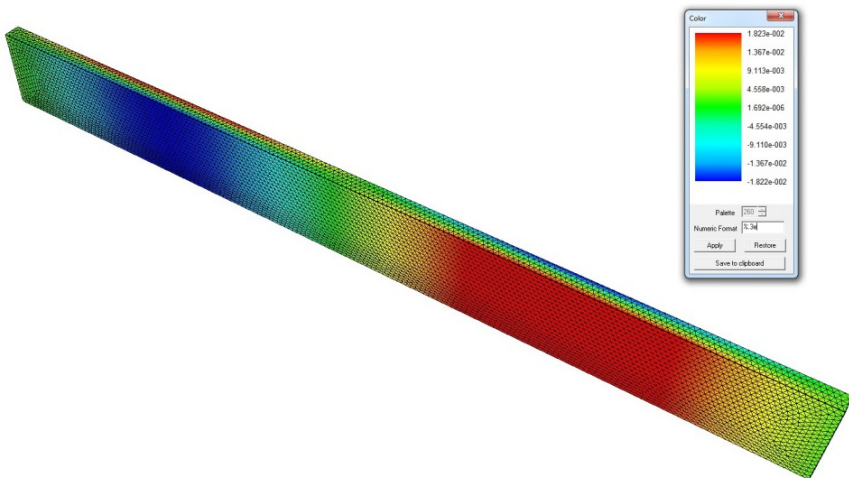
напряженном состоянии, сжимающая нагрузка  $S_c = \sigma_{11}^0 = 0,3$  ГПа. При численном решении трехмерной задачи теории устойчивости по разработанному методу использована конечно-элементная сетка, в которой число узлов составило 14 779, конечных элементов — 58 653, поверхностных элементов — 18 874. Среднее число элементов по толщине пластины равно 4.

Полученные результаты расчетов приведены ниже. Согласно этим результатам, критические нагрузки потери устойчивости балки, вычисленные на основе предложенного в рамках настоящей работы конечно-элементного метода решения общей трехмерной задачи теории устойчивости и теории устойчивости пластин Тимошенко, достаточно хорошо согласуются между собой.

**Значения критических нагрузок, полученные при решении задачи устойчивости балки на основе общей трехмерной теории устойчивости и теории устойчивости пластин Тимошенко**

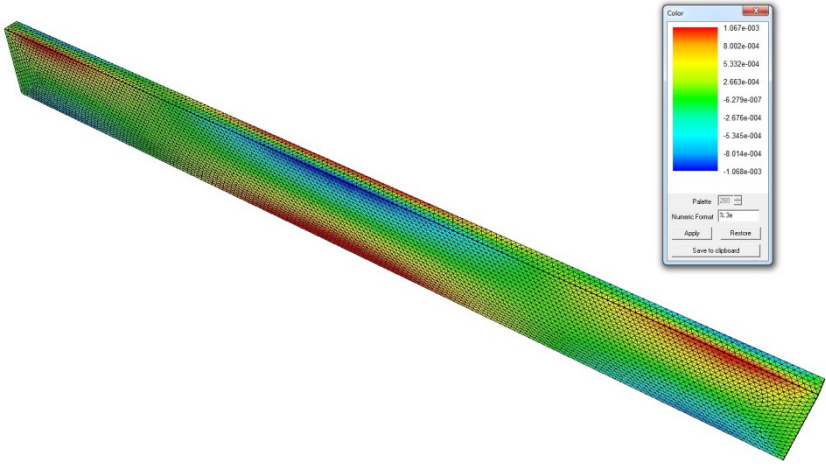
Трехмерная теория устойчивости, $10^{-3}$ , ГПа .....	30,892
Теория устойчивости пластин Тимошенко, $10^{-3}$ , ГПа .....	27,680
Относительная погрешность, % .....	11,6

Распределения компонент вектора перемещения  $\mathbf{w}$  (собственного вектора) в варьируемом состоянии приведены на рис. 1, распределения компонент тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  в варьируемом состоянии — на рис. 2. Указанные величины определены с точностью до произвольной константы, рисунки отражают общий характер собственных перемещений и напряжений при потере устойчивости конструкции.

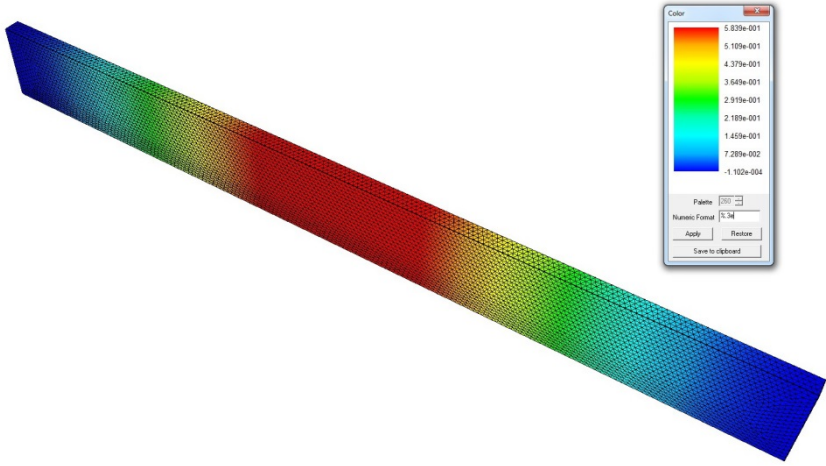


*a*

**Рис. 1 (начало).** Распределение компоненты  $w_1$  (*a*), м

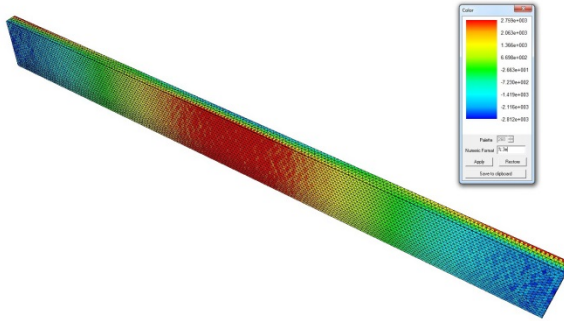


б

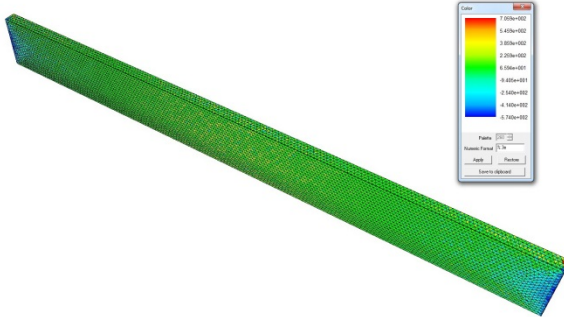


в

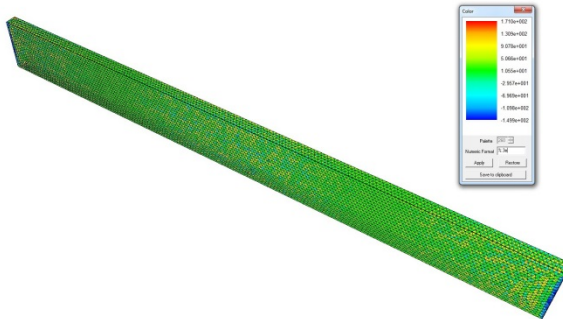
**Рис. 1 (окончание).** Распределение компонент  $w_2$  (б) и  $w_3$  (в), м, вектора перемещения  $w$  в варьируемом состоянии (собственного вектора)



*a*



*б*



*в*

**Рис. 2 (начало).** Распределение компонент  $\sigma_{11}$  (*a*),  $\sigma_{22}$  (*б*),  $\sigma_{33}$  (*в*), МПа

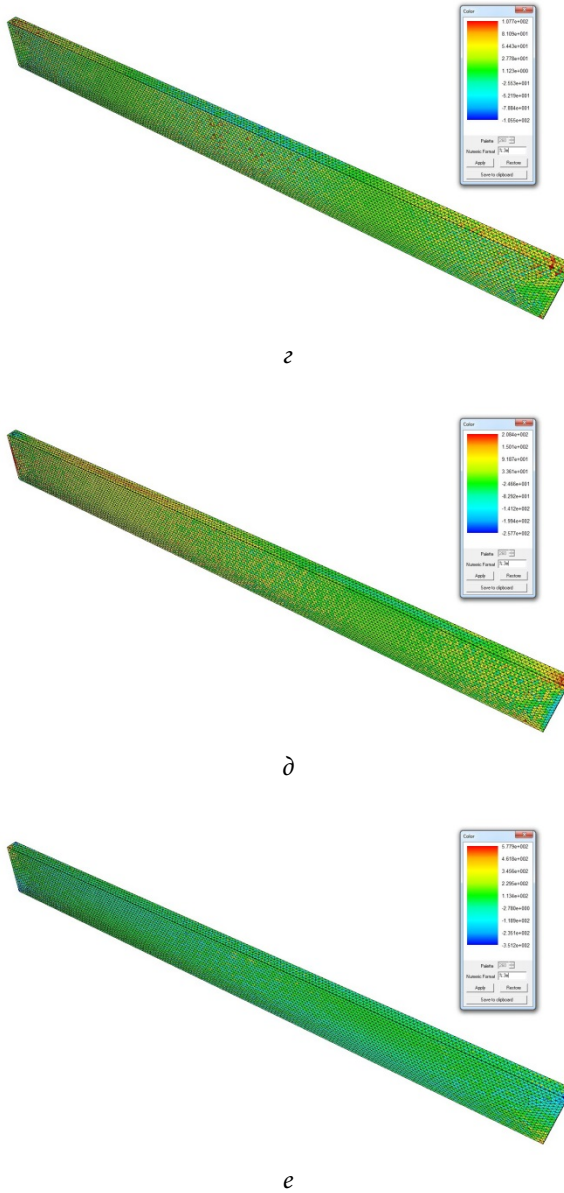


Рис. 2 (окончание). Распределение компонент  $\sigma_{23}$  (z),  $\sigma_{13}$  ( $\delta$ ),  $\sigma_{12}$  (e), МПа, тензора напряжений  $\sigma$  в варьируемом состоянии

**Выводы.** Предложен конечно-элементный метод решения общей трехмерной задачи теории устойчивости упругих конструкций, основанный на первоначальном расчете трехмерного напряженного состояния конструкции в результате решения классической теории упругости, с последующим решением специальной трехмерной задачи на собственные значения для варьируемого состояния конструкции.

Сформулирована вариационная постановка задачи теории устойчивости и разработан МКЭ для ее численного решения. На основе этой постановки предложен МКЭ решения задач теории устойчивости, который сводится к нахождению собственных значений системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей глобальной жесткости.

Проведен тестовый расчет для задачи устойчивости прямоугольной пластины при продольном сжатии. Сравнение решения КЭ этой задачи по трехмерной теории и по теории пластин Тимошенко показало высокую точность разработанного численного метода при определении критических нагрузок. В то же время трехмерная теория позволяет установить более точный вид собственных форм потери устойчивости конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Timoshenko S.P., Gere J.M.* Theory of elastic stability. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1961. 356 p.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос-техтеоретиздат, 1961. 339 с.
3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 964 с.
4. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 215 с.
5. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1980. 324 с.
6. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука, 1979. 384 с.
7. *Iyengar N.G.R.* Structural stability of columns and plates. New Delhi: Affiliated East-West Press, 1986. 284 p.
8. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
9. *Vazant Z.P., Cedolin L.* Stability of structures. Oxford: Oxford University Press, 1990. 316 p.
10. *Пикуль В.В.* Современное состояние теории устойчивости оболочек // Вестник ДВО РАН. 2008. № 3. С. 3–9.
11. *Ванько В.И.* Очерки по теории устойчивости элементов конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 220 с.
12. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
13. *Болотин В.В.* О сведении трехмерных задач теории упругой устойчивости к одномерным и двумерным задачам // Проблемы устойчивости в строительной механике. 1965. С. 166–179.
14. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.



15. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: УРСС, 2003. 208 с.
16. Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости упругих тел. Часть 3: Теория оболочек // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 2. С. 77–89.
17. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердого тела. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 624 с.
18. Димитриенко Ю.И. Теория устойчивости пластин, основанная на асимптотическом анализе уравнений теории устойчивости трехмерных упругих сред // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. Вып. 9. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-9-1416 URL: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1416.html>
19. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород с учетом ползучести // Математическое моделирование и численные методы. 2015. № 3. С. 101–118.  
DOI: 10.18698/2309-3684-2015-3-101118
20. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
21. Прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум / М.А. Кузьмин, Д.Л. Лебедев, Б.Г. Попов. М.: Академкнига, 2008. 159 с.

**Димитриенко Юрий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Богданов Илья Олегович** — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Конечно-элементный метод решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 73–92. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-73-92

**FINITE-ELEMENT METHOD FOR THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTIC STRUCTURES BUCKLING THEORY**

**Yu.I. Dimitrienko**

[dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)

**I.O. Bogdanov**

[biofamily\\_7394@mail.ru](mailto:biofamily_7394@mail.ru)

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The study tested the three-dimensional problems of elastic structures buckling theory. In the research we applied the tensor statement of these problems offered by Yu.I. Dimitrienko before. The three-dimensional problems of elastic structures buckling theory are studied less than the two-

**Keywords**

*Three-dimensional problems of buckling theory, variation statement of buckling theory, final-element method, plate buckling, critical loads*

dimensional problems of buckling theory. Nowadays, numerical methods of their solution are not known. The work gives the variation statement of the three-dimensional problem of elastic structures buckling theory. According to this statement, we proposed the final-element method for solving the buckling problems which is reduced to finding the eigen values of the linear algebraic equations system with a global symmetric stiffness matrix. As a result, we developed the program module implementing the offered final-element method within the SMCM program complex developed in Scientific and Educational Center "SIMPLEX" at Bauman Moscow State Technical University with the use of the CSIR storage scheme of the sparse matrixes and a bi-conjugate gradient method. We carried out the test calculation for the rectangular plate buckling problem under the longitudinal compression. The comparison of the final-element solution of this problem according to the three-dimensional theory and Timoshenko plates theory has shown high precision of the developed numerical method when determining critical loads. At the same time, the three-dimensional theory allows for more exact forms of eigen functions of stability loss

## REFERENCES

- [1] Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability. N.Y., Toronto, London, McGraw-Hill, 1961. 356 p.
- [2] Bolotin V.V. Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti [Nonconservative problems of the theory of elastic stability]. Moscow, Gostekhteorizdat Publ., 1961. 339 p.
- [3] Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 964 p.
- [4] Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Ustoychivost' i kolebaniya trekhslonnykh obolochek [Stability and fluctuations of three-layer covers]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 215 p.
- [5] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. Raschet mnogoslonykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Calculation of multilayer composite plates and shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 324 p.
- [6] Panovko Ya.A., Gubanova I.I. Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem: Sovremennye kontseptsii, oshibki i paradoksy [Stability and fluctuations of elastic systems: Modern concepts, mistakes and paradoxes]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 384 p.
- [7] Iyengar N.G.R. Structural stability of columns and plates, New Delhi, Affiliated East-West Press, 1986. 284 p.
- [8] Vasil'ev V.V. Mekhanika konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 272 p.
- [9] Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures. Oxford, Oxford University Press, 1990. 316 p.

- [10] Pikul' V.V. Current state of the theory of stability of covers. *Vestn. DVO RAN* [Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences], 2008, no. 3, pp. 3–9 (in Russ.).
- [11] Van'ko V.I. Oчерки po teorii ustoychivosti elementov konstruksiy [Sketches according to the theory of stability of elements of designs]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2014. 220 p.
- [12] Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical covers]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 408 p.
- [13] Bolotin V.V. About data of three-dimensional tasks of the theory of elastic resistance to one-dimensional and two-dimensional tasks. *Problemy ustoychivosti v stroitel'noy mekhanike* [Stability problems in construction mechanics], 1965, pp. 166–179 (in Russ.).
- [14] Guz' A.N. Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruemykh tel [Bases of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1986. 512 p.
- [15] Novozhilov V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti [Bases of the nonlinear theory of elasticity]. Moscow, URSS Publ., 2003. 208 p.
- [16] Dimitrienko Yu.I. Generalized three-dimensional theory of elastic bodies stability. Part 3. Theory of shell stability. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 2, pp. 77–89 (in Russ.).
- [17] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum mechanics]. Vol. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela [Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2013. 624 p.
- [18] Dimitrienko Yu.I. Theory of plates stability, based on asymptotic analysis of stability theory equations for three-dimensional elastic bodies. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2015, iss. 9 (45). DOI: 10.18698/2308-6033-2015-9-1416  
Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mech/mdsb/1416.html>
- [19] Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Final and element modeling of the intense deformed condition of rocks taking into account creep. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody* [Mathematical modeling and numerical methods], 2015, no. 3, pp. 101–118.  
DOI: 10.18698/2309-3684-2015-3-101118
- [20] Segerlind L. Applied finite element analysis. N.Y., John Wiley & Sons, 1984. 392 p.
- [21] Kuz'min M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. Prochnost', zhestkost', ustoychivost' elementov konstruksiy. Teoriya i praktikum [Strength, toughness, resistance of structural elements: Theory and practice]. Moscow, Akademkniga Publ., 2008. 159 p.

**Dimitrienko Yu.I.** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Director of the Scientific-Educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development, Bauman Moscow State Technical University; Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Bauman-skaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Bogdanov I.O.** — post-graduate student of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Dimitrienko Yu.I., Bogdanov I.O. Finite-Element Method for Three-Dimensional Problems of Elastic Structures Buckling Theory. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 6, pp. 73–92. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-73-92