

АНАЛИЗ ОБЩИХ СВОЙСТВ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ СООТНОШЕНИЕМ РАБОТНОВА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.В. Хохлов

andrey-khokhlov@ya.ru

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Изучены общие свойства семейств теоретических кривых ползучести при произвольном ступенчатом нагружении (в частности, кривых обратной ползучести), порождаемых определяющим соотношением Работнова для материалов, проявляющих нелинейную наследственность, скоростную чувствительность и разносопротивляемость. При минимальных ограничениях на две материальные функции аналитически исследованы зависимость свойств кривых ползучести от характеристик материальных функций и параметров программ нагружения, их асимптотика, условия затухания памяти, остаточная деформация после полной разгрузки, влияние перестановки ступеней нагружения, скачки деформации и ее скорости в точках разрыва напряжения и т. п. Обнаруженные свойства теоретических кривых сопоставлены с типичными свойствами экспериментальных кривых ползучести вязкоупругопластичных материалов в целях выявления возможностей соотношения Работнова по моделированию различных эффектов при ползучести, сфер влияния материальных функций и необходимых ограничений на них, индикаторов области применимости (неприменимости) соотношения, способов его идентификации и настройки. Арсенал возможностей соотношения Работнова сопоставлен с арсеналом линейного интегрального соотношения вязкоупругости, которое оно обобщает, указаны унаследованные свойства и свойства, приобретенные вследствие введения второй материальной функции

Ключевые слова

Вязкоупругопластичность, разносопротивляемость, ступенчатое нагружение, кривые ползучести, асимптотика, обратная ползучесть, затухание памяти, накопление пластической деформации, регулярные и сингулярные модели

Поступила в редакцию 17.10.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_a)

Эксперименты на ползучесть при ступенчатых нагружениях (с кусочно-постоянным напряжением) — важный вид квазистатических испытаний, позволяющий уловить и обследовать разные аспекты поведения материала [1–11], детали реализации многих эффектов, собрать более богатую информацию для выбора, идентификации и верификации определяющих соотношений по сравнению с кривыми ползучести (КП) при постоянном напряжении (такие КП все модели описывают адекватно при правильной настройке).

Определяющее соотношение «нелинейной теории наследственности» Ю.Н. Работнова [12–27] описывает одномерные изотермические процессы деформирования структурно-стабильных вязкоупругопластичных материалов, связывая истории изменения напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ в данной точке тела:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\Pi(t)$, $R(t)$ — функции ползучести и релаксации (ФП и ФР); $\varphi(x)$ — дополнительная материальная функция (МФ), введенная Ю.Н. Работновым. Входные процессы ($\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$) предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими на любом отрезке. Определяющее соотношение (ОС) (1) обобщает линейное ОС вязкоупругости, инвариантное относительно сдвигов по времени:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Если $\Pi(0+) \neq 0$ (модель регулярна), то $R(0+) < \infty$ и на линейале непрерывных кусочно-гладких при $t \geq 0$ функций (взаимно обратные) операторы (1) (и (2)) представимы в виде

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = R(0)\varphi(\varepsilon(t)) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varphi(\varepsilon(\tau)) d\tau, \quad (3)$$

где $y(0)$ — краткое обозначение для предела справа $y(0+)$ функции $y(t)$ в точке $t=0$. Определяющее соотношение (3), обобщающее линейное ОС (2) с регулярной ФП путем введения МФ φ , было предложено Ю.Н. Работновым в 1948 г. [12]. В работе [13] оно называлось «соотношением наследственной теорией пластичности» и «ползучести», в монографии [1] — «наследственной теорией ползучести», в работе [14] было дано название «нелинейная теория наследственности». В монографии [19] Ю.Н. Работнов писал о нем: «При формулировке теории автор пытался построить теорию наследственной *пластичности*, применимую для описания существенно необратимой ползучести материалов при высоких температурах...».

В англоязычных работах ОС (1) называется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV) [28–42], а его автором часто называется Ю.С. Фанг (Y.C. Fung) со ссылкой на его работы 1970–90-х годов [28, 32]. В работах [1, 12–27] ОС (1) прилагалось к описанию поведения стеклопластиков, графита, металлов, сплавов и композитов при разных режимах деформирования, а в работах [28–42] — поведения связок, сухожилий и других биологических тканей (см. подробную библиографию в [43, 44]). В работах [1, 12–26] ядро ползучести априори задавалось в виде ядра Абеля или дробно-экспоненциального ядра Работнова, их параметры (3-4 параметра) идентифицировались по КП в линейной

области (в предположении $\varphi(u)=u$), а затем МФ $\varphi(u)$ определялась по экспериментальным КП и диаграммам деформирования — численно в отдельных точках, без использования аналитических представлений для функции φ (за исключением полинома четвертого порядка, см. [16, 19]). Тщательное аналитическое изучение общих свойств основных теоретических квазистатических кривых (ползучести, релаксации, деформирования и т. п.) ОС (1) с произвольными МФ $\Pi(t)$ и φ , систематическое исследование комплекса моделируемых (и немоделируемых) эффектов в зависимости от характеристик МФ и необходимых феноменологических ограничений на МФ φ (и следствий из них) не проводились в работах [1, 12–42 и др.]; границы области применимости ОС (1) и их маркеры (за исключением требования подобия изохронных КП в работах [1, 12–19] и подобия КР в работах [38–40]) выявлены не были.

Цель настоящей работы (и всего цикла работ по качественному анализу ОС Работнова [43] и др.) — восполнить эти (серьезные) пробелы, выявить возможности и преимущества ОС (1) (как по сравнению с линейным ОС вязкоупругости (2), так и с более сложными и громоздкими нелинейными ОС), способствовать расширению и уточнению сферы его обоснованного применения в моделировании деформирования и длительной прочности вязкоупругопластичных материалов, обладающих выраженной нелинейной наследственностью и скоростной чувствительностью (полимеров, композитов, пен, керамик, асфальтобетонов, твердых топлив, титановых сплавов, легированных сталей, углеродных и керамических материалов при высоких температурах, связок, сухожилий и других биологических тканей и т. п.). Конкретная задача работы — изучение общих свойств КП при ступенчатых нагружениях, порожденных ОС (1) с произвольными МФ Π и φ (связи скачков в точках разрыва программы нагружения, асимптотики КП, условий затухания памяти [45–47] и накопления остаточной деформации и т. п.) — как унаследованных от КП линейного ОС (2) (они изучены в работах [43, 47]), так и новых, специфичных.

Приняты следующие сокращения и обозначения: $(\omega_-; \omega_+)$, $(\underline{x}; \bar{x})$ — области определения и значений МФ $\varphi(u)$; $\Phi = \varphi^{-1}$; $\nu = \dot{\Pi}(\infty)$; $h(t)$ — функция Хевисайда; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, РеМ — регулярные модели (с ФП: $\Pi(0) \neq 0$); СиМ — сингулярные модели (ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$); $\hat{y}(t_*) := y(t_* + 0) - y(t_* - 0)$ — скачок $y(t)$ в точке t_* .

Об ограничениях на материальные функции определяющего соотношения (1). Из трех МФ $\varphi(x)$, $\Pi(t)$, $R(t)$ в ОС (1) только две независимы, так как ФР и ФП связаны условием взаимной обратности операторов (1), отображающих друг в друга функции $\sigma(t)$ и $\epsilon(t) = \varphi(\epsilon(t))$, которое унаследовано ОС (1) от линейного ОС вязкоупругости (2):

$$\int_0^t \Pi(t-\tau) R(\tau) d\tau = t \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau) R(\tau) d\tau + \Pi(0)R(t) = 1 \quad (4)$$

(*the interconversion relation*). Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (4), и наоборот.

Линейное ОС (2) получается из (1) при $\varphi(u) = u$ и содержит лишь одну независимую МФ. Соотношением (2) задаются, в частности, все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством параллельных и последовательных соединений (ФП классических моделей будут использованы для иллюстрации общих свойств КП ОС (1)). Схемы и названия всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в работе [48, рис. 1]. Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ- n и СиМ- n (структурно различные модели эквивалентны, если задаются одинаковыми семействами ФП или ФР). В частности, эквивалентны друг другу трехзвенные РеМ Пойнтинга — Томсона и Кельвина (см. [48, рис. 1, а]), а все четыре РеМ-4 (см. [48, рис. 1, в]) эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, т. е. РеМ-2 и СиМ-2).

Свойства основных теоретических кривых линейного ОС (2) с произвольной ФП, необходимые математические и феноменологические ограничения на ФП и ФР проанализированы в работах [47–50] и др. Проведенный анализ показал, что среди моделей, описываемых ОС (2) с различными ФР и ФП, необходимо выделять (как минимум) три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно различаются:

1) регулярные модели, у которых $\Pi(0) \neq 0$ (тогда мгновенный модуль $E = R(0+) = 1/\Pi(0+)$ конечен, а ОС (2) и первое уравнение (4) сводятся к уравнениям Вольтерры второго рода (3) с $\varphi(u) = u$ и (4));

2) сингулярные модели — с ФР, содержащей слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ и входит слагаемым в ФР «половины» реологических моделей из пружин и демпферов), тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$;

3) нерегулярные модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$ ($R(0+) = +\infty$).

При малых временах $t/\tau < 1$ (и больших скоростях деформации — когда велико значение безразмерного параметра $\epsilon\tau$, τ — нижняя грань спектра времен релаксации) РеМ ведут себя как твердые тела, а СиМ — как жидкости (но при больших временах и малых скоростях модели могут сменить поведение на «противоположное», например, модели Максвелла и их параллельные соединения (РеМ- $2k$) ведут себя как жидкости, а модели Фойгта и их последовательные соединения (СиМ- $2k$) — как твердые тела) [50]. Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР $R(t) = At^{-u}$, $u \in (0; 1)$, $A > 0$, задающая так называемый «фрактальный» элемент «фрактальных» моделей (*fractional models* — модели с оператором дробного дифференцирования);

соответствующая (в силу (4)) ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1} C(u)t^u$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующему РеМ.

На ФП и ФР в ОС (1) наложим априори те же минимальные ограничения, что и в линейной теории: $\Pi(t)$ и $R(t)$ предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, ФП $\Pi(t)$ — возрастающей и выпуклой вверх [49], а ФР $R(t)$ — убывающей и выпуклой вниз на $(0; \infty)$, ФР может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$). Из этих условий, в частности, следует существование пределов $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$, $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0+) = +\infty$, если ФР не ограничена сверху) и $\dot{\Pi}(+\infty) \geq 0$ и $R(+\infty) \geq 0$ [49, 50]. Так, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (5)$$

удовлетворяет этим ограничениям. Оно порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, а при $\alpha = 0$ — все РеМ-3. Поскольку $\Pi(0) = \beta - \gamma$, ФП (5) порождает СиМ, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda\beta = 0$ — ньютоновскую жидкость ($R = \eta\delta(t)$), при $\alpha = 0$ — модель Фойгта (СиМ-2), при $\alpha > 0$ — все СиМ-3 ($R = \eta\delta(t) + Ee^{-\mu t}$). При $\gamma = 0$ (5) дает модель Максвелла (РеМ-2). Случай $\gamma < 0$ приводит к нарушению ограничения $\dot{\Pi}(t) \leq 0$, что влечет возрастание кривой обратной ползучести при нулевом напряжении (противоречие с данными испытаний материалов) [49].

На МФ $\varphi(u)$ в ОС (1) наложим следующие минимальные первичные требования (дальнейший анализ покажет, потребуется ли дополнить их список) [43]: $\varphi(u)$, $u \in (\omega_-; \omega_+)$, непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ ($\omega_- \omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ (иначе входному процессу $\varepsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Формально возможны случаи $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$ (как и в работах [12–19]) и $\varphi'(0) = +\infty$. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии МФ $\varphi(u)$ нечетна и $\omega_- = -\omega_+$. Из возрастания функции $\varphi(u)$ следует существование обратной функции $\Phi := \varphi^{-1}$ на промежутке $D_\Phi = (\underline{x}; \bar{x})$, где $\bar{x} := \sup \varphi(u) = \varphi(\omega_+ - 0)$, $\underline{x} := \inf \varphi(u) = \varphi(\omega_- + 0)$, и обратимость ОС (1). Если $\bar{x} < +\infty$, то при $\omega_+ = \infty$ $\Phi(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \bar{x}$, а при $\omega_+ < \infty$ $\Phi(x)$ непрерывно продолжается в точку \bar{x} : $\Phi(\bar{x}) = \omega_+$. Если $\underline{x} > -\infty$, то при $\omega_- = -\infty$ $\Phi(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \underline{x}$, а при $\omega_- > -\infty$ $\Phi(x)$ непрерывно продолжается в точку \underline{x} : $\Phi(\underline{x}) = \omega_-$. Величины \bar{x} и \underline{x} — важные характеристики МФ φ и Φ , существенно влияющие на поведение теоретических кривых ОС (1) [43].

Конечность ω_+ или \bar{x} (или ω_- и \underline{x}) означает, что в результате такого выбора МФ, в ОС (1) встроен критерий разрушения при растяжении (или сжатии), обеспечивающий обрыв определенных теоретических кривых (ползучести, де-

формирования и др.) в некоторый момент времени (когда деформация стремится к бесконечности или достигает критического значения [43]). В этом случае их можно интерпретировать как материальные параметры, через которые выражаются предел прочности, предельная деформация, время разрушения. Последняя тема не рассмотрена в литературе, влияние свойств функции φ (в частности, конечности параметров ω_+ , ω_- , \bar{x} и \underline{x}) на теоретические кривые ОС (1) не исследовано; в работах [12–26] функция φ неявно предполагалась (как следует из вычислений) аналитической и обратимой на всей вещественной оси (радиус сходимости степенного ряда не обсуждался, случаи $\omega_+ < \infty$ или $\bar{x} < \infty$ не затрагивались). Хотя конечность \bar{x} вовсе не экзотический случай, например, задача получения дробно-линейной зависимости Шестерикова — Юмашевой для скорости ползучести от напряжения $V(\sigma) = A\sigma/(\sigma_* - \sigma)$, $x \in [0; \sigma_*)$ [51], приводит к МФ

$$\varphi(u) = \sigma_* (1 - e^{-u/A}), \quad u \geq 0; \quad \Phi(x) = A \ln[\sigma_* / (\sigma_* - x)], \quad x \in [0; \sigma_*), \quad (6)$$

с $\omega_+ = +\infty$, $\bar{x} = \sigma_* < \infty$ [43].

Для задания МФ φ или Φ удобно, например, пятипараметрическое семейство функций

$$y(x) = A[\vartheta(x/C)^n + (1-\vartheta)(x/C)^m], \quad x \geq 0, \quad n > 1, \quad m < 1, \quad \vartheta \in [0; 1], \quad A, C > 0, \quad (7)$$

которое будет использовано для иллюстрации свойств КП. При всех значениях параметров (кроме $\vartheta = 0; 1$) $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$, $y(C) = A$, $y(x)$ возрастает и имеет точку перегиба

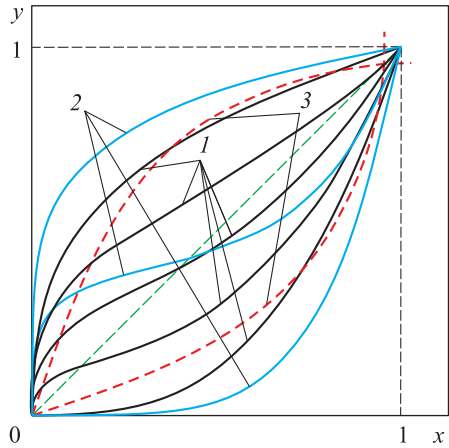
$$\tilde{x} = Cq(n, m, \vartheta)^{1/(n-m)}, \quad q := m(1-m)(1-\vartheta)[n(n-1)\vartheta]^{-1} \quad (8)$$

(при $m = n^{-1}$ $\tilde{x} = C[(\vartheta^{-1} - 1)n^{-3}]^{n/(n^2-1)}$). Весовой параметр $\vartheta \in (0; 1)$ позволяет совместить точку перегиба \tilde{x} с любой точкой $x > 0$ (и описать КП со всеми тремя стадиями [43]); семейство (7) убывает по ϑ на интервале $x \in (0; C)$ и возрастает на $(C; \infty)$. При $u < 0$ можно определить функцию $\varphi(u)$ по формуле $\varphi(u) = -y(-u)$, причем для разносопротивляющегося материала можно взять другой набор пяти параметров функции (7) (при этом начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$ обеспечивают гладкую склейку МФ φ в точке $u = 0$).

Графики функций (7) с $m = 1/n$, $n = 3$, $A = C = 1$ и $\vartheta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ (кривые 1) и графики при $n = 5$ и $\vartheta = 0; 0,5; 1$ (кривые 2) приведены на рис. 1. С увеличением n производные $\varphi(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ возрастают. Графики взаимно обратных МФ (6) с $\sigma_* = 1$, $A = 0,3$ (кривые 3) также показаны на рис. 1.

В качестве МФ ОС (1) также можно выбрать $\varphi = C(1 - \cos(u/A))$ (с $\omega = A\pi$, $\bar{x} = 2C$, $\Phi = A[\arcsin(x/C - 1) + 0,5\pi]$, $x \in [0; 2C]$) или $\varphi = C \operatorname{arctg}(u/A)$ ($\omega = \infty$, $\bar{x} = C\pi/2$, $\Phi = A \operatorname{tg}(x/C)$).

Рис. 1. Графики функций (7) с $m=1/n$, $n=3$, $A=C=1$ и $\vartheta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ (1), графики при $n=5$ и $\vartheta=0; 0,5; 1$ (2) и графики взаимно обратных МФ (6) с $\sigma_* = 1$, $A=0,3$ (3)



Кривые ползучести при постоянном напряжении. Кривые ползучести ОС (1) при мгновенном нагружении $\sigma(t) = \bar{\sigma} h(t)$, $\bar{\sigma} > 0$, имеют вид

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t)) \text{ при } \bar{\sigma} \Pi(t) < \bar{x}, \tag{9}$$

где $\Phi := \varphi^{-1}$, $\bar{x} := \sup \varphi(x)$ — верхняя грань области определения МФ $\Phi(x)$.

Семейство КП (9) возрастает по $\bar{\sigma}$ (так как Φ возрастает), а при любом $\bar{\sigma} > 0$ КП возрастает по t на всем промежутке, где $\bar{\sigma} \Pi(t) < \bar{x}$.

Если $\bar{x} = \infty$ (как для линейного ОС, например), то $D_\Phi = [x; \infty)$ и КП определены при всех $\bar{\sigma} > 0$ и $t \geq 0$. Если $\bar{x} < \infty$, то $\bar{\sigma} \Pi(t) \in D_\Phi$ только при $\bar{\sigma} < \bar{x} / \Pi(0)$ и $\Pi(t) < \bar{x} / \bar{\sigma}$; это означает, что КП существует только для напряжений $\bar{\sigma} < \sigma_*$, $\sigma_* := \bar{x} / \Pi(0)$, и обрывается в момент t_* , удовлетворяющий уравнению $\Pi(t_*) = \bar{x} / \bar{\sigma}$, если $\bar{\sigma} > \bar{x} / \Pi(\infty)$ (если $\Pi(\infty) < \infty$ КП с малым $\bar{\sigma}$ не обрывается). Таким образом, если $\bar{x} < \infty$ и $\Pi(0) \neq 0$, то параметр $\sigma_* := \bar{x} / \Pi(0) = E \bar{x}$ можно трактовать как предел (мгновенной) прочности при растяжении, и в ОС (1) уже встроен критерий разрушения. Если $\Phi(\bar{x}) < \infty$, т. е. $\omega_+ < \infty$, разрушение при растяжении происходит по достижению критической деформации: $\varepsilon_* := \Phi(\bar{x}) = \omega_+$ (такой физический смысл можно придать параметру ω_+). Если $\Phi(\bar{x}) = \infty$ (т. е. $\omega_+ = +\infty$ и $\varphi(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \bar{x}$ — как у МФ (6)), то любая КП для $\bar{\sigma} > \bar{x} / \Pi(\infty)$ имеет вертикальную асимптоту $t = t_*$, где $t_* = p(\bar{x} / \bar{\sigma})$, $p(x)$ — обратная функция к $\Pi(t)$ (она определена на промежутке $[\Pi(0); \Pi(\infty)]$). Если $\Pi(\infty) < \infty$ и $\bar{\sigma} < \bar{x} / \Pi(\infty)$, то уравнение $\Pi(t) = \bar{x} / \bar{\sigma}$ решений не имеет, КП определена при всех $t \geq 0$. Поэтому уравнение кривой длительной прочности при растяжении: $t_* = p(\bar{x} / \bar{\sigma})$, $E_\infty \bar{x} < \bar{\sigma} < E \bar{x}$, где $E := 1 / \Pi(0)$, $E_\infty := 1 / \Pi(\infty)$ — мгновенный и длительный модули линейного ОС (2) [48, 50]. Легко убедиться, что из ограничений, наложенных на ФП следует, что $t_*(\bar{\sigma})$ убывает (как и экспериментальные кривые длительной прочности), выпукла вниз и $t_*(\bar{\sigma}) \rightarrow \infty$ при $\bar{\sigma} \rightarrow E_\infty \bar{x}$.

Если $\bar{\sigma} < 0$, то в проведенном анализе необходимо заменить \bar{x} и ω_+ величинами \underline{x} и ω_- . Конечность \underline{x} означает, что в ОС (1) встроены критерий разрушения при сжатии и кривая длительной прочности при сжатии имеет вид $t_* = p(\underline{x}/\bar{\sigma})$, $E\underline{x} < \bar{\sigma} < E_\infty \underline{x}$. Конечно, можно игнорировать такую трактовку и пренебречь способностью ОС (1) моделировать разрушение, если исходные параметры \bar{x} , ω_+ , \underline{x} , ω_- заданы достаточно большими по модулю и с избытком покрывают рабочие диапазоны напряжений и деформаций (так, что обрыв кривых ползучести и деформирования происходит за их пределами). Однако лучше понимать их роль и определять их как материальные параметры ОС (если получаемые условия разрушения и кривые длительной прочности адекватно описывают экспериментальные данные).

Изохронные КП ОС (1) $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(t)$ подобны; это один из необходимых признаков применимости ОС (1) (в работах [1, 12–26] подобие изохронных КП материала трактовалось как достаточное условие применимости ОС (1), а не только необходимое). Если $\Pi(0) \neq 0$, то при $t \rightarrow 0$ семейство изохронных КП сходится к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(0)$ (совпадающей с мгновенной диаграммой деформирования ОС (1), к которой сходятся семейства диаграмм $\sigma(\varepsilon, a)$ и $\sigma(\varepsilon, b)$ при постоянных скоростях деформирования или нагружения a и b при стремлении a и b к бесконечности), а если $\Pi(0) = 0$ — к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$.

Из наличия МФ $\varphi(x)$ в ОС (1) вытекают следующие качественные отличия свойств его КП от свойств КП линейного ОС (2) [43]:

1) зависимость КП (и скорости ползучести) от $\bar{\sigma}$ нелинейная (изохронные КП не прямолинейны);

2) КП не обязаны быть выпуклыми вверх, возможно наличие точек перегиба и моделирование КП со всеми тремя стадиями (в работе [49] доказано, что КП линейного ОС (2) всегда выпуклы вверх на всем луче $t > 0$, потому оно не способно описывать стадию ускоряющейся ползучести, а скорость ползучести всегда стремится при $t \rightarrow \infty$ к конечному пределу $V(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} v$, $v := \dot{\Pi}(\infty)$); для нелинейного ОС возможен случай стремления скорости ползучести к бесконечности как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow t_*$;

3) если $\bar{x} < \infty$, то в ОС (1) встроены критерий разрушения, обеспечивающий обрыв КП и позволяющий моделировать длительную прочность.

Разнообразие форм КП, которое позволяет получить вторая МФ φ ОС (1) по сравнению с КП линейного ОС (2), продемонстрировано на рис. 2, а, на котором приведены КП (9) ОС (1) для 15 разных пар МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ при $\bar{\sigma} = 1$. Рассмотрены пять разных ФП: $\Pi(t) = t^{1/3}/3$ и ФП (линейных) моделей РеМ-4, РеМ-3, РеМ-2, СиМ-2 (ФП вида (5) с $\lambda = 0,1$, т. е. со временем ретардации $\tau = \lambda^{-1} = 10$) — в сочетании с тремя МФ $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = A[0,5x^n + 0,5x^{1/n}] \quad (10)$$

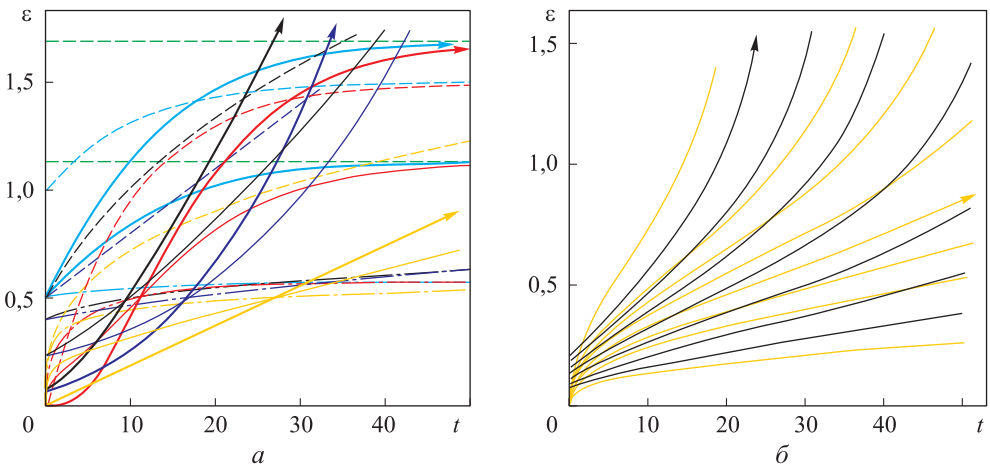


Рис. 2. Кривые ползучести (9), порожденные ОС (1) для 15 пар материальных функций (пяти видов $\Pi(t)$ и трех $\Phi(x)$), иллюстрирующие разнообразие форм КП (а) кривые ползучести двух нелинейных моделей (1) с материальной функцией (6) в сочетании с ФП $\Pi = t^{1/3} / 3$ для $\bar{\sigma} = 0,5; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,7$ (желтые КП) и с ФП вида (5) для $\bar{\sigma} = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ (черные КП) (б)

с $A = 0,5$, $n = 3$ (сплошные КП), $\Phi(x) = Ax^3$ (КП со стрелками) и $\Phi(x) = Ax^{1/3}$ (штрихпунктирные КП). Все три КП для ФП РеМ-4 (ФП (5) с $\beta = 1, \gamma = 0,5, \alpha = 0,02$) показаны черным цветом, для РеМ-3 (с $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0,5$) — голубым цветом, для модели Максвелла (с $\gamma = 0, \alpha = 0,03, \beta = 1$) — синим цветом, для модели Фойгта (с $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1,5$) — красным цветом, для степенной ФП — желтым цветом. Примечательно, что КП модели Фойгта с МФ (10) имеет две точки перегиба. У степенной ФП $\Pi(0) = 0$, как и у модели Фойгта, но еще и $\dot{\Pi}(0) = \infty$, и у КП нет горизонтальной асимптоты (так как $\Pi(\infty) = \infty$). Поскольку показатель степенной ФП $u = 1/3$, КП для МФ $\Phi = Ax^3$ получается прямолинейной, а КП для МФ (10) — очень близкой к прямолинейной. Штриховые кривые — КП тех же линейных моделей (при $\Phi(x) = x$) с такими же значениями МП (для сопоставления).

Зависимость КП двух нелинейных моделей от $\bar{\sigma}$, полученных из РеМ-4 (ФП (5) с $\lambda = 0,1, \alpha = 0,02, \beta = 1, \gamma = 0,5$) и степенной ФП $\Pi(t) = t^{1/3} / 3$ введением МФ (6), дающей для скорости ползучести зависимость $V(\bar{\sigma}) = A\bar{\sigma}(\sigma_* - \bar{\sigma})^{-1}$ с $A = 0,5, \sigma_* = 1,5$, показана на рис. 2, б [51]. Для степенной ФП — $\bar{\sigma} = 0,5; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,7$ (КП желтого цвета), для ФП РеМ-4 — $\bar{\sigma} = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$ (КП черного цвета); стрелками помечены КП с $\bar{\sigma} = 1$. Поскольку $\Phi(x)$ из (6) обладает асимптотой $x = \sigma_*$, то КП $\varepsilon(t) = A \ln[\sigma_* / (\sigma_* - \bar{\sigma} \Pi(t))]$ неограниченно растут при $\Pi(t) \rightarrow \sigma_* / \bar{\sigma}$, если только $\bar{\sigma} > \sigma_* / \Pi(\infty)$ (для указанных ФП это выполнено при всех $\bar{\sigma} > 0$, так как $\Pi(\infty) = \infty$), т. е. каждая КП имеет вертикальную асимптоту $t = t_*(\bar{\sigma})$, где $\Pi(t_*) = \sigma_* / \bar{\sigma}$.

Семейство кривых обратной ползучести. Отклик ОС (1) на программу нагружения $\sigma(t) = \bar{\sigma} [h(t) - h(t - t_1)]$ с $t_1 > 0$ и $\bar{\sigma} > 0$ имеет вид $\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} S(t; t_1))$, где $S(t; T) := \Pi(t)h(t) - \Pi(t - T)h(t - T)$:

$$\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t)) \text{ при } t \leq t_1; \quad \varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} [\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]) \text{ при } t > t_1. \quad (11)$$

Уравнение (11) справедливо при условии $\bar{\sigma} \Pi(t) \in D_\Phi$ для $t \leq t_1$, т. е. $\bar{\sigma} \Pi(t_1) < \bar{x}$. Тогда кривая обратной ползучести (11) определена на всем луче $t \geq 0$, так как $S(t; t_1) = \Pi(t) - \Pi(t - t_1)$ убывает по t в силу выпуклости вверх ФП [49] и $\bar{\sigma} [\Pi(t) - \Pi(t - t_1)] \leq \bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)] \leq \bar{\sigma} \Pi(t_1) < \bar{x}$ при $t > t_1$. В частности, если $\bar{x} = \infty$ (как для линейного ОС), то кривая обратной ползучести (11) определена на всем луче $t \geq 0$ при всех $\bar{\sigma} > 0$, $t_1 > 0$. Если $\bar{x} < \infty$ и $\bar{\sigma} \Pi(t_1) > \bar{x}$ (или $\underline{x} < \infty$ и $\bar{\sigma} \Pi(t_1) < \underline{x}$ при $\bar{\sigma} < 0$), то второй участок кривой обратной ползучести (11) вообще не реализуется, поскольку разрушение происходит еще на первой стадии (ползучести). Далее примем, что условие $\bar{\sigma} < \bar{x} / \Pi(t_1)$ выполнено.

Семейство кривых обратной ползучести (11) возрастает по $\bar{\sigma}$ при любом $t > 0$. Для любого (допустимого) $\bar{\sigma} > 0$ кривая обратной ползучести (11) возрастает по t на всем промежутке $t \leq t_1$ и убывает (нестрого) на луче $t > t_1$ (у вязкого элемента и модели Максвелла $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} \alpha t_1) = \text{const} > 0$ при $t > t_1$, а у упругого элемента $\varepsilon(t) \equiv 0$). При $t \rightarrow \infty$ $\Pi(t) - \Pi(t - t_1) \rightarrow \nu t_1$, где $\nu := \dot{\Pi}(\infty) \geq 0$ [49], поэтому кривая обратной ползучести (11) стремится к пределу $\varepsilon_\infty = \Phi(\bar{\sigma} \nu t_1)$; ε_∞ имеет смысл остаточной деформации (при полной разгрузке и бесконечно долгой выдержке). В силу возрастания МФ $\Phi(x)$ и требования $\Phi(0) = 0$, $\varepsilon_\infty = 0$ только тогда, когда $\nu = 0$ (как и для линейного ОС (2)); только в этом случае моделируется «полное восстановление». При $\nu \neq 0$ знак ε_∞ совпадает со знаком $\bar{\sigma}$.

Ограничение на ФП $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$, выведенное для линейного ОС (2) [49], и возрастание МФ Φ обеспечивают монотонное убывание функции $S(t; t_1)$ и кривой обратной ползучести (11) при $t > t_1$, никаких дополнительных ограничений на Φ для этого не требуется. Возрастание $\ddot{\Pi}(t)$ гарантирует выпуклость вниз на луче $t > t_1$ кривой обратной ползучести линейного ОС $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} S(t; t_1)$, $\bar{\sigma} > 0$, но для выпуклости вниз кривой обратной ползучести (11) этого уже недостаточно.

Перечислим качественные отличия кривой обратной ползучести ОС (1) от кривой обратной ползучести линейного ОС (2), обусловленные введением второй МФ: 1) кривая обратной ползучести (11) с $\bar{\sigma} > 0$ не обязана быть выпуклой вверх на интервале $(0; t_1)$ и выпуклой вниз на луче $t \geq t_1$; 2) у линейного ОС (2) скачки деформации и скорости в точке $t = t_1$ $\hat{\varepsilon}(t_1) = -\bar{\sigma} \Pi(0) = -\hat{\varepsilon}(0)$ и $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) = -\bar{\sigma} \dot{\Pi}(0) = -\hat{\dot{\varepsilon}}(0)$ не зависят от t_1 (и от скачка напряжения зависят линейно), а у нелинейных РеМ скачки $\hat{\varepsilon}(t_1)$ и $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1)$ зависят от t_1 и не совпадают с $-\hat{\varepsilon}(0)$ и $-\hat{\dot{\varepsilon}}(0)$ (наличие этих свойств у экспериментальной кривой обратной ползучести — индикаторы неприменимости линейного ОС).

Действительно, в момент $t = t_1$ кривая обратной ползучести (11) имеет разрыв первого рода: пределы слева и справа равны $\varepsilon(t_1 - 0; \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t_1))$, $\varepsilon(t_1 + 0; \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)])$, а скачок равен $\hat{\varepsilon}(t_1) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t_1) - \bar{\sigma} \Pi(0)) - \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t_1)) \leq 0$. Если $\Pi(0) > 0$, то скачок отрицателен и зависит от $\Pi(t_1)$. Для нерегулярных моделей $\hat{\varepsilon}(t_1) = 0$, т. е. кривые обратной ползучести непрерывны в точке $t = t_1$ (как и в случае линейного ОС). Если $\Phi'(x)$ монотонна на D_Φ , то и зависимость $s(t_1) := \hat{\varepsilon}(t_1)$ монотонна, в противном случае (когда Φ имеет точку перегиба) $s(t_1)$ не обязана быть монотонной. Действительно, $s'(t_1) = \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t_1) [\Phi'(\bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)]) - \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t_1))]$; если Φ' возрастает на D_Φ (т. е. $\Phi''(x) > 0$), то $s'(t_1) < 0$, а если Φ' убывает ($\Phi''(x) < 0$), то $s'(t_1) > 0$.

Производная кривой обратной ползучести (11) и ее пределы в точке $t = t_1$ выражаются формулами

$$\dot{\varepsilon}(t; \bar{\sigma}, t_1) = \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t)) \geq 0 \text{ при } t < t_1;$$

$$\dot{\varepsilon}(t; \bar{\sigma}, t_1) = \bar{\sigma} [\dot{\Pi}(t) - \dot{\Pi}(t - t_1)] \Phi'(\bar{\sigma} [\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]) \leq 0 \text{ при } t > t_1;$$

$$\dot{\varepsilon}(t_1 - 0; \bar{\sigma}, t_1) = \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t_1) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t_1)) \geq 0;$$

$$\dot{\varepsilon}(t_1 + 0; \bar{\sigma}, t_1) = \bar{\sigma} [\dot{\Pi}(t_1) - \dot{\Pi}(0)] \Phi'(\bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)]) \leq 0.$$

Скачок скорости деформации $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) \leq 0$. Если $\dot{\Pi}(0) = +\infty$, то $\dot{\varepsilon}(t_1 + 0; \bar{\sigma}, t_1) = -\infty$. Если $\Pi(0) = 0$, то $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) = -\bar{\sigma} \dot{\Pi}(0) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t_1))$, в частности, $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) = 0$, лишь при условии $\Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t_1)) = 0$ (для линейного ОС всегда $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) = -\bar{\sigma} \dot{\Pi}(0) < 0$).

Исследуем выпуклость кривой обратной ползучести (11) при $t > t_1$. При $t > t_1$

$$\ddot{\varepsilon}(t) = \bar{\sigma} [\ddot{\Pi}(t) - \ddot{\Pi}(t - t_1)] \Phi'(\bar{\sigma} [\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]) + \bar{\sigma}^2 [\dot{\Pi}(t) - \dot{\Pi}(t - t_1)]^2 \Phi''(\bar{\sigma} [\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]). \quad (12)$$

Если $\Pi(t) = \alpha t + \beta$ на некотором отрезке $[a; b]$, таком, что $b - a \geq t_1$, то $\ddot{\varepsilon}(t) = 0$ при $t \in [a + t_1; b]$ (в частности, для модели Максвелла — при всех $t > t_1$). В остальных случаях первое слагаемое положительно (ибо $\Phi'(x) > 0$, а $\ddot{\Pi}(t)$ возрастает), а знак второго совпадает со знаком $\Phi''(x)$, где $x := \bar{\sigma} [\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]$, $x \in (\bar{\sigma} \nu t_1; \bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)])$ (для модели Максвелла $x(t) = \bar{\sigma} \alpha t_1 = \text{const}$, в остальных случаях $x(t)$ убывает на луче $t > t_1$, $x(\infty) = \bar{\sigma} \nu t_1$). Если $\Phi''(x) \geq 0$ на D_Φ (т. е. $\Phi''(\varepsilon) \leq 0$ на $[0, \omega)$) и $\ddot{\Pi}(t) \geq 0$, то $\ddot{\varepsilon}(t) \geq 0$ при $t > 0$ и КП выпукла вниз, а если есть интервал с $\Phi''(x) < 0$, лежащий внутри $(\bar{\sigma} \nu t_1; \bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)])$, то на соответствующем интервале времени возможно $\ddot{\varepsilon}(t) > 0$, т. е. КП может иметь точки перегиба и участки выпуклости вверх (рис. 3, а).

Кривые обратной ползучести модели с МФ $\Phi(x) = [1 - (x - 1)^2]^{0,5}$, $x \in [0; 1]$ ($\varphi(\varepsilon) = 1 - [1 - \varepsilon^2]^{0,5}$, $\varepsilon \in [0; 1]$, $\omega_+ = 1$, $\bar{x} = 1$) и ФП Фойгта $\Pi(t) = \beta - \beta e^{-\lambda t}$, $\beta = 1, 5$, $\lambda = 0, 1$, при значениях $\bar{\sigma} = 0, 01; 0, 1; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1$ (кривые обратной ползучести для $\bar{\sigma} = 1$ и $\bar{\sigma} = 0, 01$ выделены красным цветом) приведены на рис. 3, а.

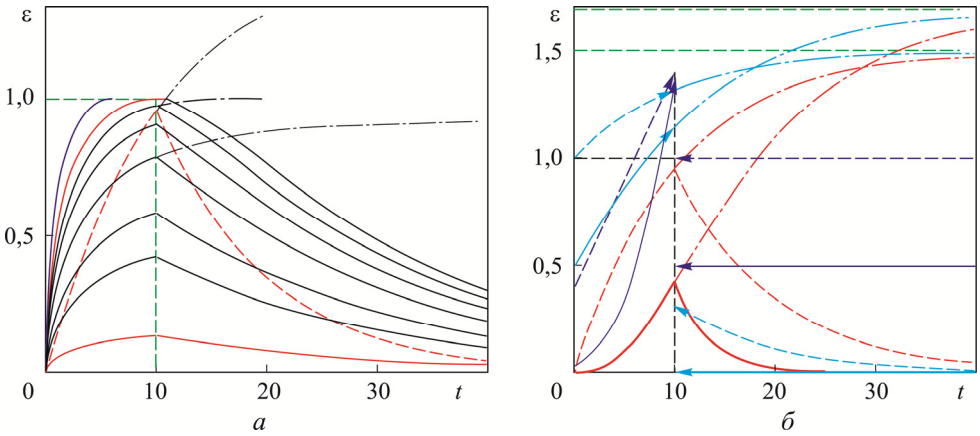


Рис. 3. Кривые обратной ползучести (11) модели с $\Phi(x)=[1-(x-1)^2]^{0,5}$, $x \in [0; 1]$, и $\Pi = \beta - \beta e^{-\lambda t}$, $\beta = 1,5$, $\lambda = 0,1$, при $\bar{\sigma} = 0,01; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ (а) и шести моделей с $\Phi = 0,5x^3$ (сплошные линии) или $\Phi = x$ (штриховые линии) в сочетании с функциями ползучести РеМ-3 (голубые линии), РеМ-2 (синие линии) и СиМ-2 (красные линии) для $\bar{\sigma} = 1$ (б)

Разрыва в точке $t = t_1$ нет, поскольку $\Pi(0) = 0$. Хорошо заметна нелинейная зависимость КП от $\bar{\sigma}$. При $\bar{\sigma} \in [0,6; 1]$ на кривой обратной ползучести есть участок выпуклости вверх и точка перегиба. При $\bar{\sigma} > 1,1$ КП обрывается еще на первом участке ($t < t_1$), так как нарушается условие $\bar{\sigma} \Pi(t) \in D_\Phi$ (при $\epsilon(t) = \omega_+ = 1$); кривая синего цвета — КП при $\bar{\sigma} = 1,5$, штриховая линия красного цвета — кривая обратной ползучести для линейной модели Фойгта ($\Phi(x) = x$) с $\bar{\sigma} = 1$, штрихпунктирные линии — КП при постоянном напряжении (без разгрузки).

Кривые обратной ползучести (с $\bar{\sigma} = 1$, $t_1 = 10$) моделей, задаваемых МФ $\Phi(x) = A(x/C)^3$, $A = 0,5$, $C = 1$ и тремя ФП вида (5) с $\lambda = 0,1$: ФП РеМ-3 (КП голубого цвета с $\alpha = 0$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 0,5$), РеМ-2 (КП синего цвета с $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,4$), СиМ-2 (КП красного цвета с $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1,5$) приведены на рис. 3, б. Для МФ $\Pi(t) = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$ (РеМ-3 и СиМ-2), $\gamma \in [0; \beta]$, и $\Phi(x) = Ax^n$, $n > 0$, формула (12) дает $\ddot{\epsilon}(t) = An^2 \lambda^2 \gamma^n \bar{\sigma}^n [e^{-\lambda(t-t_1)} - e^{-\lambda t}]^n > 0$ для всех $n > 0$, т. е. кривые обратной ползучести выпуклы вниз на луче $t > t_1$ (это верно и для МФ Φ , равной линейной комбинации степенных функций с положительными коэффициентами, в частности, (7)). Штриховыми линиями показаны кривые обратной ползучести соответствующих линейных моделей (с $\Phi(x) = x$), штрихпунктирными — обычные КП (без разгрузки).

Свойства кривых ползучести для кусочно-постоянных программ нагружения. Оператор (1), переводящий процесс $\sigma(t)$ в $\varphi(\epsilon(t))$, линеен и инвариантен относительно сдвигов по времени, поэтому он переводит программу нагружения с n ступеньками

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i [h(t-t_{i-1}) - h(t-t_i)] + \sigma_n h(t-t_{n-1}) \quad (13)$$

(полагаем, что $t_0 = 0$, $t_i > t_{i-1}$ и $\sigma(t) = \sigma_n$ при $t > t_{n-1}$) в сумму откликов на каждую ступеньку

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t-t_{i-1}; t_i-t_{i-1}) + \sigma_n \Pi(t-t_{n-1})h(t-t_{n-1}), \quad (14)$$

где $S(t; T) := \Pi(t)h(t) - \Pi(t-T)h(t-T)$ — отклик на единичную ступеньку напряжения с носителем $[0, T]$ (задающий форму кривой обратной ползучести линейного ОС (2)). Тогда

$$\varepsilon(t) = \Phi \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t-t_{i-1}; t_i-t_{i-1}) + \sigma_n \Pi(t-t_{n-1})h(t-t_{n-1}) \right), \quad t > 0. \quad (15)$$

Здесь $\Phi = \varphi^{-1}$. Определение деформации по формуле (15) возможно лишь при тех t , при которых значение правой части выражения (14) принадлежит $D_\Phi = (\underline{x}; \bar{x})$. В противном случае (при конечном \underline{x} или \bar{x}) отклик $\varepsilon(t)$ не определен, и это можно интерпретировать как разрушение, происходящее в момент $t = t_*$, когда (впервые) происходит выход за пределы интервала $D_\Phi = (\underline{x}; \bar{x})$ (например, если $\sigma_1 \geq \bar{x} / \Pi(0)$ или $\sigma_1 \leq \underline{x} / \Pi(0)$, т. е. σ_1 превосходит предел прочности на растяжение или сжатие, то КП обрывается прямо в момент $t = 0$). Если \underline{x} и \bar{x} бесконечны, т. е. область значения МФ $\varphi(u)$ — вся ось, то для программ нагружения (13) с любыми t_i и σ_i формула (15) справедлива для всех $t > 0$. Именно этот случай и будет рассмотрен, чтобы не усложнять формулировки дополнительными ограничениями на программы (13) и оговорками.

Уравнение КП (14) можно представить в виде суммы влияний скачков напряжения $\hat{\sigma}_i := \sigma_{i+1} - \sigma_i$ ($\sigma_0 := 0$) в точках t_i :

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon(t)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\sigma}_i \Pi(t-t_i)h(t-t_i), \quad t > 0, \text{ или} \\ \varepsilon(t) &= \Phi \left(\sigma_1 \Pi(t) + \sum_{k=1}^i \hat{\sigma}_k \Pi(t-t_k) \right) \text{ при } t \in (t_i; t_{i+1}). \end{aligned} \quad (16)$$

В моменты $t = t_i$ КП (15) и ее производная имеют разрывы ($\varepsilon(t)$ — разрыв первого рода). Из (16) можно выразить пределы $\varepsilon(t)$ в точке $t = t_i$ слева и справа и скачок $\hat{\varepsilon}(t_i)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_i - 0) &= \Phi(p_i), \text{ где } p_i := \sigma_1 \Pi(t_i) + \sum_{k=1}^{i-1} \hat{\sigma}_k \Pi(t_i - t_k), \quad i = 1, \dots, n-1; \\ \varepsilon(t_i + 0) &= \Phi \left(\sigma_1 \Pi(t_i) + \sum_{k=1}^i \hat{\sigma}_k \Pi(t_i - t_k) \right) = \Phi(p_i + \hat{\sigma}_i \Pi(0)); \\ \hat{\varepsilon}(t_i) &= \Phi(p_i + \hat{\sigma}_i \Pi(0)) - \Phi(p_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (17)$$

У нерегулярных моделей (у которых $\Pi(0) = 0$, в частности, у СиМ- n и степенных моделей) $\hat{\varepsilon}(t_i) = 0$, т. е. КП (15) непрерывны во всех точках $t = t_i$, как и в случае линейного ОС. Однако у регулярных нелинейных моделей скачки (17) ненулевые и зависят от всех параметров программы нагружения с номером, не превосходящим i ; скачок $\hat{\varepsilon}(t_i)$ возрастает с увеличением скачка напряжения $\hat{\sigma}_i$ и совпадает с ним по знаку (так как МФ Φ возрастает).

Следует отметить, что для линейного ОС (2) скачки КП (15) и ее производной выражаются формулами $\hat{\varepsilon}(t_i) = \hat{\sigma}_i \Pi(0)$ и $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_i) = \hat{\sigma}_i \dot{\Pi}(0)$ (если $\dot{\Pi}(t)$ и $\dot{R}(t)$ непрерывны [47]), т. е. скачок процесса-отклика в любой момент t_i линейно (и локально) зависит только от скачка программы нагружения (и ее производных) в этот же момент времени и не зависит от t_i , от предыстории (от всех t_k и σ_k при $k < i$) и от ФП $\Pi(t)$ (только от ее начальных значений $\Pi(0)$ и $\dot{\Pi}(0)$). В частности, модуль скачка $\varepsilon(t)$ не меняется при изменении знака скачка нагрузки. Эти свойства можно использовать как индикаторы применимости (неприменимости) линейного ОС (2): например, в испытаниях сплавов алюминия зафиксировано, что модуль скачка деформации вниз в момент сброса нагрузки меньше, чем скачок вверх в момент ее приложения [52], следовательно, поведение этих материалов не описывается ОС (2). Для КП регулярных нелинейных моделей (1) все обстоит иначе: зависимость (17) скачков КП от всех параметров программы нагружения и ФП $\Pi(t)$ отличается от линейного случая не только нелинейностью, но и нелокальностью.

Исследуем асимптотику КП (15) при $t \rightarrow \infty$ (для моделей с $D_\Phi = (-\infty; \infty)$, когда КП (15) определена для всех $t > 0$). Поскольку для произвольно допустимой ФП (дифференцируемой, возрастающей, выпуклой вверх при $t > 0$) $S(t; T) \rightarrow vT$ при $t \rightarrow \infty$, $v := \dot{\Pi}(\infty)$ [47], то

$$S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}) = v(t_i - t_{i-1}) + o(1),$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}) = vs + z(t), \quad s := \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i (t_i - t_{i-1})$$

(сумма импульсов напряжений), $z(t) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому КП (15) представима в виде

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + vs + z(t)), \quad z(t) = o(1) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (18)$$

а отклонение КП (15) от КП $\varepsilon_0(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}))$ мгновенного нагружения до уровня σ_n в момент t_{n-1} (с нулевой предысторией) — в виде

$$\Delta(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + vs + z(t)) - \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})), \quad t > t_{n-1}, \quad (19)$$

Вьясним, при каких ограничениях на МФ и параметры программ нагружения (13) $\Delta(t) \rightarrow 0$. Если $\Delta(t) \rightarrow 0$ для любой ступенчатой программы нагружения (13), то будем говорить, что ОС обладает свойством затухающей памяти (о начальной истории) [45–47].

Параметр νs (наряду с σ_n) управляет асимптотическим поведением конкретной КП (15), а параметр ν — характером поведения всех КП (15) и отклонений (19) для произвольных ступенчатых программ нагружения (13). Из асимптотических представлений (18), (19) вытекают несколько важных следствий.

1. Если производная $\Phi'(x)$ ограничена сверху на полуоси $[0; \infty)$ ($\Phi'(u) > \gamma > 0$), то для любых двух программ вида (13) с одинаковыми конечными уровнями напряжения σ_n , моментами их включения $T = t_{n-1}$ (число ступенек может различаться) и значениями s разность откликов (КП (15)) $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. По теореме Лагранжа $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + s + z_1(t)) - \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + s + z_2(t)) = \Phi'(\xi)(z_1(t) - z_2(t))$ и из $0 < \Phi'(x) < C$ следует, что $|\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)| < M |z_1(t) - z_2(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, при перестановке ступеней нагружения с номерами $i < n$ (тогда s и σ_n не меняются) выполняется свойство асимптотической коммутативности $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ [47].

2. Если $\sigma_n = 0$ (программа нагружения (13) с полной разгрузкой в момент t_{n-1}), то для любой ФП в силу (18) (и непрерывности МФ $\Phi(x)$) имеем $\varepsilon(t) \rightarrow \Phi(\nu s)$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. КП (15) обладает горизонтальной асимптотой $\varepsilon = \varepsilon_\infty$, где $\varepsilon_\infty = \Phi(\nu s)$. Величина ε_∞ имеет смысл остаточной деформации (не исчезающей даже за бесконечное время после снятия нагрузки). Если $\nu s \neq 0$, то и $\Phi(\nu s) \neq 0$ (в силу требования $\varphi(0) = 0$ и возрастания МФ $\varphi(x)$). Постоянная νs (остаточная деформация в случае линейного ОС (2)) распадается в произведение характеристики ФП ν и множителя s , характеризующего конкретную программу нагружения (13). В зависимости от параметров программы (13) КП (15) может стремиться к асимптоте $\varepsilon = \Phi(\nu s)$ как сверху, так и снизу; если все $\sigma_i > 0$, $i < n$ (и $\sigma_n = 0$), то КП (15) убывает на всем луче $t \geq t_{n-1}$ и стремится к асимптоте сверху (так как все слагаемые $\sigma_i S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1})$ в (15) положительны и убывают). Если $\nu s = 0$, то $\Phi(\nu s) = 0$, т. е. деформация релаксирует до нуля (полное восстановление при $t \rightarrow \infty$); в частности, так будет для всех ступенчатых программ нагружения (13), если ФП обладает свойством $\nu = 0$.

3. Если $\sigma_n \neq 0$, то следует рассмотреть два класса моделей:

1) модели с $\nu = 0$ (например, все модели с ограниченными ФП, в частности, РеМ-(2k-1) и СиМ-2k, $k \in \mathbb{N}$, модели со степенными ФП, фрактальная модель Фойгта и т. п.);

2) модели с $\nu \neq 0$ (как у моделей РеМ-2k и СиМ-(2k-1), $k \in \mathbb{N}$).

1. Если $\nu = 0$ (и $\sigma_n \neq 0$), то по (18) и (19) $\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + z(t))$ и

$$\Delta(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + z(t)) - \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})), \quad z(t) = o(1) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

В отличие от линейного ОС (когда $\Phi(x) = x$ и $\Delta(t) = z(t) = o(1)$ в случае $\nu = 0$) в нелинейном случае отклонение (20) не обязано стремиться к нулю, если $\Pi(\infty) = \infty$. В этом случае, чтобы обеспечить $\Delta(t) \rightarrow 0$, необходимо наложить на

МФ $\Phi(x)$ или ФП $\Pi(t)$ дополнительные ограничения, например, достаточно потребовать ограниченность сверху производной $\Phi'(x)$ в некоторой окрестности $+\infty$ (в случае $\sigma_n > 0$) и в окрестности $-\infty$ (в случае $\sigma_n < 0$), т. е. при $|x| > C$ с некоторым $C > 0$. Тогда по теореме Лагранжа $\Delta(t) = \Phi'(\xi)z(t)$, где $\xi = \xi(t)$ лежит в интервале между $\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})$ и $\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + z(t)$, и потому $\xi(t) \rightarrow \sigma_n \Pi(\infty) = \pm\infty$ (знак совпадает со знаком σ_n) при $t \rightarrow \infty$, $\Phi'(\xi) < M$ при достаточно больших t и $\Delta(t) < Mz(t) = o(1)$, т. е. $\Delta(t) \rightarrow 0$ для любой неограниченной ФП.

Если $\Pi(t)$ ограничена, то $v = 0$ и по (18) $\varepsilon(t) \rightarrow \Phi(\sigma_n \Pi(\infty))$ при $t \rightarrow \infty$ (в силу непрерывности $\Phi(x)$ при $x \in (-\infty, +\infty)$), т. е. КП (15) обладает горизонтальной асимптотой $\varepsilon = \Phi(\sigma_n \Pi(\infty))$, и по (20) $\Delta(t) \rightarrow \Phi(\sigma_n \Pi(\infty)) - \Phi(\sigma_n \Pi(\infty)) = 0$ для произвольной непрерывной МФ $\Phi(x)$, т. е. память при ползучести затухает. Отметим, что КП (15) с $\sigma_n \neq 0$ может обладать горизонтальной асимптотой и в том случае, когда $\Pi(t)$ не ограничена. Так будет, если (и только если) МФ $\Phi(x)$ ограничена (необходимо $\omega_+ < +\infty$ в случае $\sigma_n > 0$ и $\omega_- > -\infty$ в случае $\sigma_n < 0$): тогда из (18) (и $\Pi(\infty) = \infty$) следует, что при $t \rightarrow \infty$ $\varepsilon(t) \rightarrow \omega_+$ для программ с $\sigma_n > 0$ и $\varepsilon(t) \rightarrow \omega_-$ для $\sigma_n < 0$ (в этом случае асимптота не зависит от уровня напряжения σ_n и «чувствует» только его знак); при $\sigma_n = 0$ $\varepsilon(t) \rightarrow \Phi(0) = 0$.

Если обе МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ не ограничены (и $\sigma_n \neq 0$), то из (18) следует, что $\varepsilon(t) \rightarrow \infty$, т. е. $|\varepsilon(t)|$ неограниченно возрастает.

2. Если $v \neq 0$ и $\sigma_n \neq 0$, то возможны два случая: 1) $s = 0$ (специально подобранные программы нагружения); 2) $s \neq 0$ (основной). Если $s = 0$, то справедливо все изложенное выше в п. 1 про поведение КП (15) при $\Pi(\infty) = \infty$: отклонение (19) будет стремиться к нулю лишь при дополнительных ограничениях на МФ Φ (достаточно требовать ограниченность $\Phi'(x)$).

Если $s \neq 0$, то ограниченности $\Phi'(x)$ не достаточно, и для обеспечения $\Delta(t) \rightarrow 0$ требуются гораздо более сильные ограничения на МФ. В отличие от линейного ОС (2) (когда $\Phi(x) = x$ и $\Delta = \varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) = vs + o(1)$, т. е. $\Delta(t) \rightarrow vs \neq 0$ и память не затухает при $v \neq 0$), для нелинейного ОС возможны разные варианты поведения $\Delta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от свойств МФ Φ . Поскольку $v \neq 0$, то $\Pi(\infty) = \infty$ и $\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) \rightarrow \pm\infty$; поэтому поведение $\Delta(t)$ зависит от поведения $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$. По теореме Лагранжа, (19) можно представить в виде $\Delta(t) = \Phi'(\xi)[vs + z(t)]$, где $\xi = \xi(t)$ лежит в интервале между $\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})$ и $\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + vs + z(t)$, поэтому $\xi(t) \rightarrow \pm\infty$ (знак совпадает со знаком σ_n) при $t \rightarrow \infty$. Если существуют пределы $\theta_+ = \Phi'(+\infty)$ и $\theta_- = \Phi'(-\infty)$ производной $\Phi'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ (каждый неотрицателен, так как $\Phi'(x) > 0$, и может равняться $+\infty$), то $\Delta(t) \rightarrow \theta_+ vs$ в случае $\sigma_n > 0$ и $\Delta(t) \rightarrow \theta_- vs$ при $\sigma_n < 0$. Если $\theta_+ = \theta_- = 0$, то $\Delta(t) \rightarrow 0$ для любой неограниченной ФП и любой программы нагружения (13) с $\sigma_n \neq 0$. Если хотя бы один из пределов θ_+ , θ_- больше нуля, то $\Delta(t) \rightarrow \theta_+ vs \neq 0$ в случае $\sigma_n > 0$ или $\Delta(t) \rightarrow \theta_- vs \neq 0$ в случае $\sigma_n < 0$, т. е.

память не затухает (возможно, только при растяжении или только при сжатии, если второй предел нулевой). Если $\theta_+ = +\infty$, то для программ (13) с $\sigma_n > 0$ будет $\Delta(t) \rightarrow \infty$ (так как $vs \neq 0$), а если $\theta_- = +\infty$, то $\Delta(t) \rightarrow \infty$ для программ с $\sigma_n < 0$. Если предел $\Phi'(+\infty)$ или $\Phi'(-\infty)$ не существует (это возможно, поскольку от $\Phi'(x)$ не требуется ни монотонность, ни ограниченность), то и предел отклонения (19) при $t \rightarrow \infty$ не существует (для программ с $\sigma_n > 0$ или $\sigma_n < 0$ соответственно), память не затухает.

Подытожим доказанные выше свойства кривой ползучести (15) при ступенчатых нагружениях (13).

Теорема 1. Пусть ФП $\Pi(t)$ положительна, дифференцируема, возрастает и (нестрого) выпукла вверх на $(0; \infty)$, а МФ $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (возможно $\omega_- = -\infty$ и $\omega_+ = +\infty$), $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ и область значений $\varphi(u)$ совпадает с $(-\infty; +\infty)$ (т. е. $D_\Phi = (-\infty; +\infty)$). Тогда КП (15) нелинейного ОС (1) для любой ступенчатой программы нагружения (13) определена при всех $t > 0$ и обладает следующими свойствами:

1) скачки КП (15) в точках разрыва напряжения t_i выражаются формулой (17), в отличие от скачков КП линейного ОС (2), они зависят не только от скачка напряжения в этот же момент времени, но и от предыстории нагружения и от ФП $\Pi(t)$; у нерегулярных моделей ($\Pi(0) = 0$) КП (15) непрерывны во всех точках t_i ;

2) асимптотика КП (15) при $t \rightarrow \infty$ имеет вид (18), где $v = \dot{\Pi}(\infty)$;
 $s = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i (t_i - t_{i-1})$; $z(t) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$;

3) если производная $\Phi'(x)$ ограничена сверху на полуоси $[0; \infty)$ (т. е. $\Phi'(u) > \gamma > 0$), то для любых двух программ вида (13) с одинаковыми конечными уровнями напряжения σ_n , моментами их включения $T = t_{n-1}$ (число ступенек произвольно) и значениями s разность КП (15) $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$; в частности, при перестановке ступеней нагружения с номером $i < n$ выполняется свойство асимптотической коммутативности $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;

4) если ФП ограничена, то $v = 0$ и все КП (15) обладают асимптотой $\varepsilon = \Phi(\sigma_n \Pi(\infty))$;

5) если $\sigma_n = 0$ (для финитных программ нагружений (13) с полной разгрузкой), то при $t \rightarrow \infty$ асимптотика КП (15) имеет вид $\varepsilon(t) = \Phi(vs + z(t))$, $z(t) = o(1)$, КП (15) обладает горизонтальной асимптотой $\varepsilon = \Phi(vs)$, остаточная (пластическая) деформация $\varepsilon_\infty = \Phi(vs)$ не зависит от значений ФП на любом конечном интервале времени и отлична от нуля тогда и только тогда, когда $vs \neq 0$; если ФП обладает свойством $v = 0$, то $\varepsilon_\infty = 0$ для любых ступенчатых программ нагружения (13), в частности, не происходит накопление пластических деформаций при любых циклических ступенчатых нагружениях;

б) если существуют пределы $\Phi'(+\infty)$ и $\Phi'(-\infty)$ производной $\Phi'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и оба равны нулю (т. е. $\Phi'(\omega_- + 0) = \Phi'(\omega_+ - 0) = +\infty$), то $\Delta(t) \rightarrow 0$ для любой неограниченной ФП и любой программы нагружения (13) с $\sigma_n \neq 0$.

Замечание. Условие б будет выполнено, например, для $\Phi(x) = ax^\alpha$ при $x > 0$, $\Phi(x) = -b(-x)^\beta$ при $x < 0$, $\alpha, \beta \in (0; 1)$, $a, b > 0$, или для $\Phi = \varphi^{-1}$, где $\varphi(u)$ — МФ вида (7).

Теорема 2. Пусть выполнены предпосылки теоремы 1. Тогда для того, чтобы ОС (1) обладало свойством затухающей памяти при ползучести (т. е. $\Delta(t) \rightarrow 0$ для всех КП (15) при любых ступенчатых нагружениях (13)) необходимо, чтобы $\dot{\Pi}(\infty) = 0$, и достаточно одного из двух условий:

- 1) $\Pi(\infty) < \infty$ (ФП ограничена на $[0; \infty)$), а МФ $\Phi(x)$ — любая (допустимая);
- 2) $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ (возможно, $\Pi(\infty) = \infty$) и существует число $C > 0$, такое, что $\Phi'(x)$ ограничена сверху при $|x| > C$ ($\Phi'(u)$ ограничена снизу на множестве $|u| > c$ с некоторым $c > 0$).

В случае линейного ОС (2) условие $\nu = 0$ на ФП необходимо и достаточно (условие 2 теоремы 2 выполняется) для затухания памяти при ступенчатых нагружениях. Если $\nu > 0$ (например, как у модели Максвелла и всех РеМ-2п), то след, оставленный прямоугольным импульсом нагрузки, не стирается никогда (остаточная деформация $\varepsilon_\infty = \bar{\sigma}\nu T$), а при несимметричном циклическом ступенчатом нагружении происходит неограниченное нарастание пластической деформации (*ratcheting*).

Для нелинейного ОС (1) условие $\nu = 0$ не достаточно для затухания памяти. Вместе с тем, модель может обладать затухающей памятью, хотя ни одно из двух достаточных условий теоремы 2 не выполнено. Примером может служить модель (1) с МФ:

$$\Pi = at^u, \quad a > 0, \quad u \in (0; 1); \quad \Phi = A[\vartheta x^m + (1 - \vartheta)x^{1/m}], \quad m > 1, \quad A > 0, \quad \vartheta \in (0; 1]. \quad (21)$$

При любых значениях параметров a, u, m, ϑ, A в (21) необходимое условие $\nu = 0$ выполнено, а достаточные условия затухания памяти из теоремы 2, не выполняются: 1) $\Pi(\infty) = \infty$ при $u < 1$; 2) производная $\Phi' = A[m\vartheta x^{m-1} + m^{-1}(1 - \vartheta)x^{(1-m)/m}]$ не ограничена при $m > 1$. Покажем, что при определенных ограничениях на параметры модель (21) обладает свойством затухания памяти, а при их нарушении — нет.

Рассмотрим случай $n = 2$, когда КП (15) принимает вид

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1) + \sigma_1 S(t; t_1)), \quad S(t; t_1) = \Pi(t) - \Pi(t - t_1),$$

а отклонение (19) от КП $\varepsilon_0(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$, $t > t_1$, — вид

$$\Delta(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1) + z(t)) - \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1)),$$

где $z(t) = \sigma_1 S(t; t_1) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$, и найдем условия, при которых $\Delta(t) \rightarrow 0$. По теореме Лагранжа $\Delta(t) = \Phi'(\xi)z(t)$, где $\xi = \xi(t)$ лежит в интервале между

$\sigma_2\Pi(t-t_1)$ и $\sigma_2\Pi(t-t_1)+z(t)$, потому для любого $\sigma_2 > 0$ будет $\xi(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$ (так как $\Pi(\infty) = \infty$, а $z(t) = o(1)$), точнее, $\xi(t) \sim \sigma_2\Pi(t-t_1) = \sigma_2 a(t-t_1)^u \sim \sigma_2 at^u$. Для (21) $\Phi'(x) \sim \vartheta Am x^{m-1}$ при $x \rightarrow \infty$ и при $t \rightarrow \infty$ $\Phi'(\xi(t)) \sim \vartheta Am(\sigma_2 at^u)^{m-1} = Bt^{u(m-1)}$, $B > 0$. Для ФП (21) имеем $z(t) = \sigma_1 S(t; t_1) = au\sigma_1 t_1 t^{u-1} + O(t^{u-2})$ и $\Delta(t) = \Phi'(\xi)z(t) \sim Bt^{u(m-1)} au\sigma_1 t_1 t^{u-1} \sim Ct^{um-1}$ при $t \rightarrow \infty$, где $C = C(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Показатель главного члена асимптотики отрицателен (тогда $\Delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) тогда и только тогда, когда $um - 1 < 0$, т. е.

$$1 < m < 1/u \tag{22}$$

(множество решений не пусто при любом $u \in (0; 1)$). Неравенство (22) — критерий затухания памяти для семейства моделей (21). Если $m > 1/u$, то $\Delta(t) \rightarrow \infty$.

Обнаруженные свойства КП (15), порождаемых ОС (1), полезно сравнить со свойствами КП при ступенчатых нагружениях, порождаемых нелинейным ОС типа Максвелла для вязкоупругопластичных разносопротивляющихся материалов (оно тоже управляется двумя материальными функциями) [55, 56].

Семейства кривых ползучести при двухступенчатом нагружении. Для иллюстрации свойств КП (15) рассмотрим случай $n = 2$. Тогда при $t > t_1$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \Phi(\sigma_1 \Pi(t) + (\sigma_2 - \sigma_1)\Pi(t - t_1)), \text{ или} \\ \varepsilon(t) &= \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1) + \sigma_1 S(t; t_1)), \text{ или} \\ \varepsilon(t) &= \Phi(\sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2)S(t; t_1)), \end{aligned} \tag{23}$$

где $S(t; t_1) = \Pi(t) - \Pi(t - t_1)$, $t > t_1$ — положительная убывающая функция t , $S(t; t_1) \rightarrow vt_1 \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для КП (23) с $\sigma_1 > 0$ всегда $\varepsilon(t) > \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$, так как $S(t; t_1) > 0$, а $\Phi(x)$ возрастает (в отличие от случая линейного ОС, отклонение $\Delta(t) := \varepsilon(t) - \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$ уже не обязательно убывает). Аналогично, из второго представления (23) следует, что $\varepsilon(t) > \Phi(\sigma_2 \Pi(t))$ при $\sigma_2 < \sigma_1$ и

$$\Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1)) < \varepsilon(t) < \Phi(\sigma_2 \Pi(t)) \text{ при } \sigma_2 > \sigma_1, t > t_1, \tag{24}$$

т. е. в случае $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ справедлива двусторонняя оценка для КП (23), не зависящая от σ_1 .

Из (18) при $n = 2$ следует, что при $t \rightarrow \infty$ КП (23) имеет асимптотику

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1) + \sigma_1 vt_1 + o(1)), \text{ или } \varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2) vt_1 + o(1)).$$

Если ФП ограничена, то $v = 0$ и $\varepsilon(\infty) = \Phi(\sigma_2 \Pi(\infty))$, т. е. КП (23) стремится к горизонтальной асимптоте. Если обе МФ не ограничены (и $\sigma_2 \neq 0$), то $\varepsilon(t) \rightarrow \infty$.

Кривые ползучести (23) для фрактальной линейной модели с ФП $\Pi(t) = At^u$, $A = 0,5$, $u = 0,5$ для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$ и значений $\sigma_2 = 1; 1,25; 1,5$ (КП черного цвета для $\sigma_2 \geq \sigma_1$) и $\sigma_2 = 0,75; 0,5; 0,25; 0$ (КП синего цвета для $\sigma_2 < \sigma_1$) приведены на рис. 4, а. Штриховые линии красного цвета — обычная КП $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t)$ с $\sigma_2 = 1,5$ и

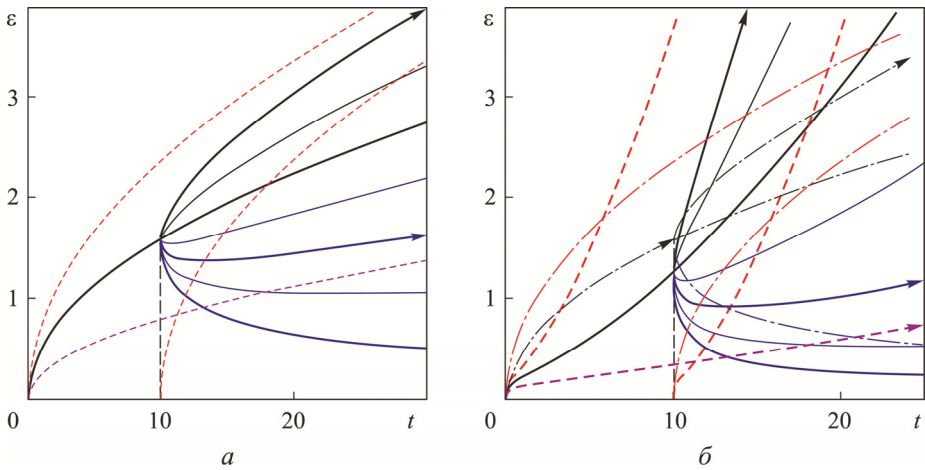


Рис. 4. Кривые ползучести (23) линейной модели с МФ $\Pi = at^u$ и $\Phi(x) = x$ (а) и нелинейной модели с $\Pi = at^u$ и $\Phi = A[\vartheta x^m + (1 - \vartheta)x^{1/m}]$ (б) для различных значений σ_2 / σ_1

ее сдвиг $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t - t_1)$, участвующие в двусторонней оценке (24) для КП (23) (в случае $\Phi(x) = x$), штриховая линия розового цвета — КП $\varepsilon = \sigma_2 \Pi(t)$ с $\sigma_2 = 0,5$. Поскольку $\Pi(0) = 0$, то в точке $t = t_1$ все КП не имеют разрыва; из $\dot{\Pi}(0) = +\infty$ следует, что у всех КП $\dot{\Pi}(t_1 + 0) = \pm\infty$ (знак совпадает с $\text{sgn}(\sigma_2 - \sigma_1)$). При любом $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ у КП есть точка минимума $t_m > t_1$, она движется вправо от t_1 до ∞ с убыванием σ_2 от σ_1 до нуля: функция $t_m(\sigma_2)$ убывает, $t_m(0+) = \infty$, $t_m(\sigma_1 - 0) = t_1$ [47] (наличие точек экстремума деформации между точками разрыва программы нагружения наблюдается в испытаниях разных материалов [2, 4, 52–54], но, как правило, считается признаком нелинейности их поведения). Для любого $u < 1$, очевидно, $\nu = 0$, и потому $\sigma_2(\Pi(t) - \Pi(t - t_1)) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (точнее, $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) = (\sigma_1 - \sigma_2)[uat_1 t^{u-1} + O(t^{u-2})]$). Таким образом, ширина полосы между штриховыми КП красного цвета стремится к нулю, и эта линейная модель (класса НеМ) обладает свойством затухания памяти.

Кривые ползучести (23) (с $\sigma_1 = 1$, $t_1 = 10$ и разными σ_2) нелинейной модели, полученной из степенной ФП $\Pi(t) = at^u$ с $a = 0,5$, $u = 0,5$ введением МФ $\Phi(x)$ вида (21) с $m = 3$, $\vartheta = 0,5$, $A = 0,5$, приведены на рис. 4, б. Параметры программ нагружения те же: $\sigma_1 = 1$, $t_1 = 10$, $\sigma_2 = 1; 2,25; 1,5$ (КП черного цвета для $\sigma_2 \geq \sigma_1$) и $\sigma_2 = 0,75; 0,5; 0,25; 0$ (КП синего цвета для $\sigma_2 < \sigma_1$). Поскольку $\Pi(0) = 0$, то в точке $t = t_1$ все КП (23) непрерывны. При $\dot{\Pi}(0) = +\infty$ у всех КП $\dot{\Pi}(t_1 + 0) = \pm\infty$. При любом $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ у КП есть точка минимума $t_m > t_1$, которая движется вправо от t_1 до ∞ , с убыванием σ_2 от σ_1 до нуля ($t_m(\sigma_2)$ убывает, $t_m(0+) = \infty$, $t_m(\sigma_1 - 0) = t_1$). Штриховые линии красного цвета — обычная КП $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \Pi(t))$ и ее сдвиг $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$ с $\sigma_2 = 1,5$ участвующие в оценке (24). Штрихпунктирные линии — КП линейной модели, приведенной на рис. 4, а для сравнения: КП черного цвета — для $\sigma_2 = 1$ и $\sigma_2 = 0, 1,5$ синего цвета — для

$\sigma_2 = 0$, т. е. кривая обратной ползучести, красного — вилка оценки (24) для КП (23) с $\sigma_2 = 1,5$. Хотя у рассматриваемой модели $\nu = 0$, линейная модель с ФП $\Pi(t) = at^u$ обладает свойством затухания памяти, введение МФ $\Phi(x)$ вида (21) меняет ситуацию: при заданных значениях $u = 0,5$, $m = 3$ не выполняется доказанный выше критерий затухания памяти (22) для моделей семейства (21). Их КП (23) не сходятся к обычной КП и отклонение $\Delta(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Соответственно, полоса между штриховыми линиями красного цвета, приведенными на рис. 4, б, не стягивается до нуля, а неограниченно расширяется.

Кривые ползучести (23) (сингулярной) линейной модели Фойгта ($\Pi = \beta - \beta e^{-\lambda t}$, $\lambda = 0,1$, $\gamma = \beta = 1,5$) для $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$ и тех же значений σ_2 приведены на рис. 5, а. Каждая КП имеет горизонтальную асимптоту $\varepsilon = \sigma_2 \beta$ (прямые зеленого цвета). Поскольку $\nu = 0$, то эта модель обладает свойством затухания памяти (полоса между штриховыми линиями красного цвета, изображающими вилку двусторонней оценки (24) для КП с $\sigma_2 = 1,5$ стягивается до нуля). Особенность КП модели Фойгта (и КП РеМ-3) — отсутствие точки минимума на всех КП с $\sigma_2 < \sigma_1$: при $\sigma_2 > \bar{\sigma}_2 := \sigma_1 (1 - \exp(-\lambda t_1))$ КП (23) возрастает на всем луче $t \geq t_1$, а при $\sigma_2 < \bar{\sigma}_2$ КП (23) убывает [47]. Таким образом, для РеМ-3 и СиМ-2 смена возрастания КП на убывание (а также выпуклости) происходит *тотально* на всем луче $t \geq t_1$, *синфазно во всех точках*. Штриховая линия синего цвета, приведенная на рис. 5, а, — КП при $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2$ (для $\lambda = 0,1$ и $t_1 = 10$ имеем $\bar{\sigma}_2 \approx 0,63\sigma_1$, $\varepsilon(t, \bar{\sigma}_2) \equiv \varepsilon(\infty) = \bar{\sigma}_2 \beta$).

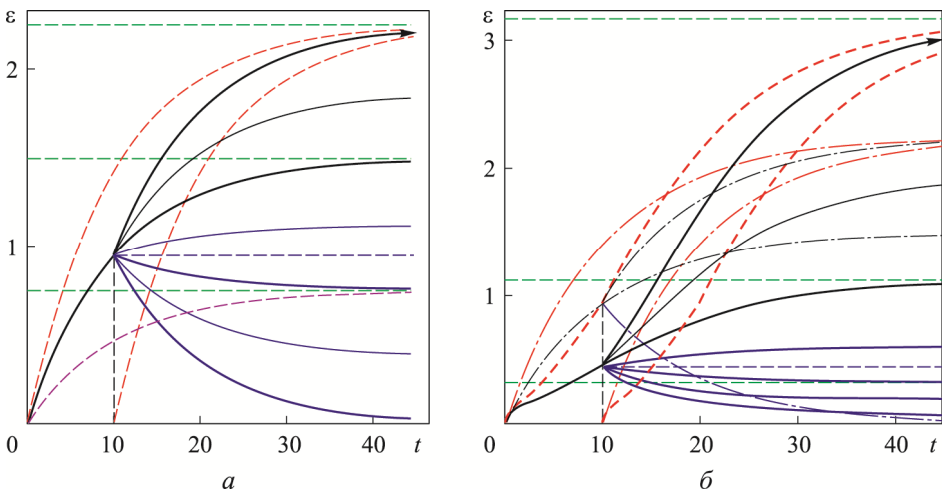


Рис. 5. Кривые ползучести (23) линейной модели Фойгта ($\Pi = \beta - \beta e^{-\lambda t}$, $\Phi(x) = x$) (а) и нелинейной модели с $\Pi = \beta - \beta e^{-\lambda t}$ и $\Phi = A[\vartheta x^m + (1 - \vartheta)x^{1/m}]$ (б) для различных значений σ_2 / σ_1

Кривые ползучести (23) нелинейной модели, полученной из модели Фойгта введением (той же) МФ $\Phi(x)$ вида (21) с $m = 3$, $\vartheta = 0,5$, $A = 0,5$, приведены на рис. 5, б. Параметры программ нагружения те же: $\sigma_1 = 1$; $t_1 = 10$; $\sigma_2 = 1; 1,25; 1,5$

(КП черного цвета для $\sigma_2 \geq \sigma_1$) и $\sigma_2 = 0,75; 0,5; 0,25; 0$ (КП синего цвета для $\sigma_2 < \sigma_1$). При $\Pi(0) = 0$ в точке $t = t_1$ все КП непрерывны. Штриховые линии красного цвета — обычная КП $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \Pi(t))$ с $\sigma_2 = 1,5$ и ее сдвиг $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$, изображающие вилку двусторонней оценки (24) для КП (23) с $\sigma_2 = 1,5$. Поскольку ФП ограничена, то каждая КП (23) имеет горизонтальную асимптоту $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \beta)$, $\nu = 0$, $s = 0$ для всех ступенчатых нагружений и выполняется первое достаточное условие затухания памяти из теоремы 2. Поэтому отклонение $\Delta = \varepsilon(t) - \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$ стремится к нулю и $\Phi(\sigma_2 \Pi(t)) - \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. ширина полосы между красными штриховыми кривыми, стремится к нулю. Штрихпунктирные линии — КП линейной модели Фойгта, приведенные на рис. 5, а: КП черного цвета — для $\sigma_2 = 1$ и $\sigma_2 = 1,5$, синего цвета — для $\sigma_2 = 0$ (кривая обратной ползучести). Остаточная деформация при полной разгрузке ($\sigma_2 = 0$) равна нулю ($\varepsilon(t) \rightarrow 0$) как у линейной модели Фойгта, так и у всех нелинейных моделей с такой ФП (и произвольной МФ $\Phi(x)$) в силу ограничения $\Phi(0) = 0$. Для любой нелинейной модели с возрастающей МФ $\Phi(x)$ и ФП Фойгта описанное свойство семейства КП линейной модели Фойгта (и РеМ-3) сохраняется: КП при $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2$ на луче $t \geq t_1$ — горизонтальная прямая ($\varepsilon(t, \bar{\sigma}_2) = \Phi(\bar{\sigma}_2 \beta)$) — штриховая линия синего цвета на рис. 5, б), при $\sigma_2 > \bar{\sigma}_2$ КП возрастает на всем луче $t \geq t_1$, а при $\sigma_2 < \bar{\sigma}_2$ КП убывает (смена возрастания КП на убывание происходит *только* на всем луче $t \geq t_1$).

Заключение. Изучены общие свойства и качественные особенности КП (15), порождаемых определяющим соотношением Работнова (1) при произвольном ступенчатом нагружении (13), их зависимость от характеристик двух МФ и параметров программы нагружения. Получены формулы для скачков деформации и ее скорости в точках разрыва напряжения, для остаточной деформации при полной разгрузке и для отклонения от обычной КП (с нулевой предысторией); исследованы асимптотика КП (15), условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения, условия монотонности кривой обратной ползучести. Основные обнаруженные свойства собраны в двух теоремах. В частности, установлены необходимые и достаточные условия затухания памяти и асимптотической коммутативности ОС при ступенчатых нагружениях, установлена ключевая роль предела производной функции ползучести $\nu = \dot{\Pi}(\infty)$: доказано, что его равенство нулю — критерий полного восстановления после снятия нагрузки, необходимое условие затухания памяти (но не достаточное, в отличие от линейной вязкоупругости) и критерий отсутствия накопления пластической деформации при циклических нагружениях.

На основе сравнения свойств теоретических кривых (15) с типичными свойствами экспериментальных кривых ползучести вязкоупругопластичных материалов выявлены возможности ОС (1) по описанию различных эффектов при ползучести, сферы влияния его МФ и необходимые ограничения на МФ, способы идентификации и настройки ОС.

Свойства кривых ползучести ОС (1) при ступенчатых нагружениях сопоставлены со свойствами КП, порождаемых линейным ОС вязкоупругости (2), чтобы сравнить арсеналы возможностей и области применимости линейного и нелинейного ОС, указать дополнительные эффекты, которые нелинейное ОС способно описывать по сравнению с линейным за счет второй МФ.

В последующих статьях будут представлены результаты анализа качественных свойств остальных базовых кривых, порожденных ОС (1): кривых деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях нагружения и деформации, кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, «аномальной» ползучести и релаксации после начальной перегрузки, кривых длительной прочности, откликов на ступенчатые и циклические программы нагружения, условий описания эффекта Маллинза, рэтчетинга и приспособляемости (*shakedown*) и других эффектов. На основе этого анализа будут составлены более полные списки индикаторов применимости ОС (1), удобных для экспериментальной проверки, и его возможностей по моделированию поведения классов вязкоупругопластичных материалов, проявляющих нелинейную наследственность, скоростную чувствительность и разносопротивляемость (полимеров, композитов, асфальтобетонов, твердых топлив, пен, биологических тканей, медицинских цементов, алюминиевых и титановых сплавов, легированных сталей и керамик при высокой температуре и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
3. *Findley W.N., Lai J.S., Onaran K.* Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. Amsterdam: North Holland, 1976. 368 p.
4. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.
5. *Москвитин В.В.* Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука. 1981. 344 с.
6. *Tschoegl N.W.* The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. Berlin: Springer, 1989. 769 p.
7. *Betten J.* Creep mechanics. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.
8. *Радченко В.П., Кичаев П.Е.* Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. Самара: Самарский гос. тех. ун-т. 2011. 157 с.
9. *Christensen R.M.* Mechanics of composite materials. New York: Dover Publications, 2012. 384 p.
10. *Bergstrom J.S.* Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
11. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
12. *Работнов Ю.Н.* Некоторые вопросы теории ползучести // Вестник МГУ. 1948. № 10. С. 81–91.
13. *Наместников В.С., Работнов Ю.Н.* О наследственных теориях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1961. Т. 2. № 4. С. 148–150.

14. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // *Механика полимеров*. 1971. № 1. С. 74–87.
15. *Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н.* Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // *Прикладная механика и техническая физика*. 1971. № 2. С. 76–82.
16. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // *Механика полимеров*. 1971. № 3. С. 391–397.
17. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* О связи характеристик ползучести стеклопластиков с кривой мгновенного деформирования // *Механика полимеров*. 1971. № 4. С. 624–628.
18. *Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В.* О законе деформирования металлов при одноосном нагружении // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1972. № 4. С. 41–54.
19. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
20. *Мельшианов А.Ф., Суворова Ю.В., Хазанов С.Ю.* Экспериментальная проверка определяющего уравнения для металлов при нагружении и разгрузке // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1974. № 6. С. 166–170.
21. *Суворова Ю.В.* Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // *Механика полимеров*. 1977. № 6. С. 976–980.
22. *Осокин А.Е., Суворова Ю.В.* Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров // *Прикладная математика и механика*. 1978. Т. 42. № 6. С. 1107–1114.
23. *Суворова Ю.В., Алексеева С.И.* Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния // *Механика композитных материалов*. 1993. № 5. С. 602–607.
24. *Суворова Ю.В., Алексеева С.И.* Инженерные приложения модели наследственного типа к описанию поведения полимеров и композитов с полимерной матрицей // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2000. Т. 66. № 5. С. 47–51.
25. *Алексеева С.И.* Модель нелинейной наследственной среды с учетом температуры и влажности // *Доклады академии наук*. 2001. Т. 376. № 4. С. 471–473.
26. *Суворова Ю.В.* О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 2004. № 1. С. 174–181.
27. *Викторова И., Дандуранд Б., Алексеева С., Фроня М.* Моделирование ползучести полимерных нанокompозитов на основе альтернативного метода нелинейной оптимизации. *Механика композитных материалов*. 2012. Т. 48. № 6. С. 997–1010.
28. *Fung Y.C.* Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation, biomechanics: Its foundations and objectives. New Jersey: Prentice-Hall; 1972. P. 181–208.
29. *Фанг Я.Ч.* Математические модели зависимости напряжение — деформация для живых мягких тканей // *Механика полимеров*. 1975. № 5. С. 850–867.
30. *Woo S.L.-Y.* Mechanical properties of tendons and ligaments — I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties // *Biorheology*. 1982. Vol. 19. P. 385–396.
31. *Sauren A.A., Rousseau E.P.* A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung // *J. Biomech. Eng.* 1983. Vol. 105. No. 1. P. 92–95.
DOI: 10.1115/1.3138391 URL: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1396152&resultClick=3>

32. *Fung Y.C.* Biomechanics. Mechanical properties of living tissues. New York: Springer-Verlag, 1993. 568 p.
33. *Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D.* Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments // *J. Biomech. Eng.* 2000. Vol. 122. No. 1. P. 15–22. DOI: 10.1115/1.429623 URL: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1399078&resultClick=3>
34. *Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M.* Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: Application to incremental stress-relaxation experiments // *J. Biomech. Eng.* 2003. Vol. 125. No. 5. P. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247 URL: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1410862&resultClick=3>
35. *Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y.* An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory // *J. Biomech. Eng.* 2004. Vol. 126. No. 1. P. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528 URL: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1411316&resultClick=3>
36. *Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M.* A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling // *J. of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. No. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019 URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2085233>
37. *De Frate L.E., Li G.* The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No. 4. P. 245–251. DOI: 10.1007/s10237-006-0056-8 URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10237-006-0056-8>
38. *Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S.* Constitutive equations for ligament and other soft tissue: Evaluation by experiment // *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. No. 1. P. 23–33. DOI: 10.1007/s00707-009-0161-8 URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/s00707-009-0161-8>
39. *Lakes R.S.* Viscoelastic materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
40. *Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S.* Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling // *Biorheology* 47. 2010. Vol. 47. P. 1–14. DOI: 10.3233/BIR-2010-0559 URL: <http://content.iospress.com/articles/biorheology/bir559>
41. *De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J.* On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model // *Proc. R. Soc. A*. 2014. Vol. 470. P. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058 URL: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/470/2166/20140058>
42. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials / B. Babaei, S.D. Abramowitch, E.L. Elson, S. Thomopoulos, G.M. Genin // *J. Royal Soc. Interface*. 2015. Vol. 12. No. 113. P. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707 URL: <http://rsif.royalsocietypublishing.org/content/12/113/20150707>
43. *Хохлов А.В.* Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов // *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Вып. 78. № 4. С. 452–466.
44. *Хохлов А.В.* Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. 2016. № 3. С. 524–543. DOI: 10.14498/vsgtu1512

45. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 147–166.
46. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 2. С. 140–160.
47. Хохлов А.В. Свойства теоретических кривых ползучести при ступенчатом нагружении в линейной вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 4. С. 344–359.
48. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 1. С. 60–74.
49. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75. № 4. С. 257–267.
50. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 5. С. 187–245. DOI: 10.7463/0516.0840650
URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/840650.html>
51. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния при ползучести // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–91.
52. Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2009. Vol. 13. No. 4. P. 303–315. DOI: 10.1007/s11043-009-9089-6
URL: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11043-009-9089-6>
53. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // Int. J. Plasticity. 2011. Vol. 27. No. 4. P. 512–521.
54. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // Mechanics of Materials. 2014. Vol. 69. No. 1. P. 116–131.
55. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2016. № 6. С. 36–41.
56. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 3. С. 35–48.

Хохлов Андрей Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник лаборатории упругости и пластичности Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123

ANALYSIS OF GENERAL PROPERTIES OF CREEP CURVES GENERATED BY THE RABOTNOV NONLINEAR HEREDITARY RELATION UNDER MULTI-STEP LOADINGS

A.V. Khokhlov

andrey-khokhlov@ya.ru

**Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation**

Abstract

We analyze basic properties of the theoretic creep curves under arbitrary piecewise-constant uniaxial stress histories generated by the Rabotnov constitutive relation with two material functions for elastoviscoplastic materials which exhibit a pronounced nonlinear heredity, rate sensitivity and multi-modulus behavior. Under minimal primary restrictions on the material functions of the relation, we study analytically the creep curves properties dependence on creep compliance function and loading program parameters, their asymptotic behavior at infinity, conditions of memory fading, formula for plastic strain after complete unloading (after recovery), influence of stress steps permutation, relations for strain and strain rate jumps produced by given stress jumps, etc. We compare the qualitative features of theoretic creep curves to typical test creep curves properties of rheonomous materials under multi-step uniaxial loadings in order to examine the Rabotnov relation abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena related to creep and recovery, to find the zones of material functions influence and necessary phenomenological restrictions on material functions, to indicate the field of applicability or non-applicability of the model and to develop techniques for its identification and tuning. We compare the arsenal of capabilities of the Rabotnov nonlinear constitutive relation and its applicability scope to capabilities of the Boltzmann — Volterra linear viscoelasticity theory which was generalized to state the Rabotnov relation. We elucidate the inherited properties and the acquired properties due to the introduction of the second material function providing a sort of physical non-linearity

Keywords

Elastoviscoplasticity, tension compression asymmetry, piecewise-constant loading, creep curves, asymptotics, recovery, fading memory, plastic strain accumulation, regular and singular models

REFERENCES

- [1] Rabotnov Yu.N. Creep problems in structural members. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969. 822 p.
- [2] Bugakov I.I. Polzuchest' polimernykh materialov [Polymer materials creep]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 287 p.

- [3] Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. Amsterdam, North Holland, 1976. 368 p.
- [4] Malinin N.N. Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruktsiy [Creep design of machine-building constructions elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 221 p.
- [5] Moskvitin V.V. Tsiklichesкое nagruzhenie elementov konstruktsiy [Cyclic loading constructive of parts]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 344 p.
- [6] Tschoegl N.W. The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. Berlin, Springer, 1989. 769 p.
- [7] Betten J. Creep mechanics. Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 367 p.
- [8] Radchenko V.P., Kichaev P.E. Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov [Power conception of materials creep and vibrocreep]. Samara, SamSTU Publ., 2011. 157 p.
- [9] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. New York, Dover Publications, 2012. 384 p.
- [10] Bergstrom J.S. Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
- [11] Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-term strength of metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 504 p.
- [12] Rabotnov Yu.N. Some issues of creep theory. *Vestnik MGU*, 1948, no. 10, pp. 81–91 (in Russ.).
- [13] Namestnikov V.S., Rabotnov Yu.N. On hereditary creep theories. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1961, vol. 2, no. 4, pp. 148–150 (in Russ.).
- [14] Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Application of nonlinear heredity theory to description theory in polymers. *Mekhanika polimerov*, 1971, no. 1, pp. 74–87 (in Russ.).
- [15] Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analysis of behavior of graphite on the basis of nonlinear heredity theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, vol. 12, no. 2, pp. 235–240. DOI: 10.1007/BF00850695
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00850695>
- [16] Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Nonlinear creep of TS8/3-250 fiberglass. *Mekhanika polimerov*, 1971, no. 3, pp. 391–397 (in Russ.).
- [17] Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. On connection between fiberglass creep behavior and momentary deforming curve. *Mekhanika polimerov*, 1971, no. 4, pp. 624–628 (in Russ.).
- [18] Rabotnov Yu.N., Suvorova Yu.V. On metal deformation law under uniaxial loading. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1972, no. 4, pp. 41–54 (in Russ.).
- [19] Rabotnov Yu.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdyykh tel [Elements of solid mechanics hereditary theory]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 384 p.
- [20] Mel'shanov A.F., Suvorova Yu.V., Khazanov S.Yu. Experimental verification of determining equation for metals under loading and unloading. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1974, no. 6, pp. 166–170 (in Russ.).
- [21] Suvorova Yu.V. Nonlinear effects in case of deformation of hereditary medium. *Mekhanika polimerov*, 1977, no. 6, pp. 976–980 (in Russ.).

- [22] Osokin A.E., Suvorova Yu.V. Nonlinear governing equation of a hereditary medium and methodology of determining its parameters. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1978, vol. 42, no. 6, pp. 1214–1222. DOI: 10.1016/0021-8928(78)90072-2
Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892878900722>
- [23] Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nonlinear model of isotropic hereditary medium under combined stress. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1993, no. 5, pp. 602–607 (in Russ.).
- [24] Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Engineering application of hereditary model to description of the polymer and polymer matrix composite behavior. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2000, vol. 66, no. 5, pp. 47–51 (in Russ.).
- [25] Alekseeva S.I. Nonlinear hereditary medium taking into account temperature and humidity. *Doklady akademii nauk*, 2001, vol. 376, no. 4, pp. 471–473 (in Russ.).
- [26] Suvorova Yu.V. Yu.N. Rabotnov's nonlinear hereditary-type equation and its applications. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 2004, no. 1, pp. 174–181 (in Russ.).
- [27] Viktorova I., Dandurand B., Alekseeva S., Fronya M. Creep simulation of polymer nanocomposites based on alternate method of nonlinear optimization. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 997–1010 (in Russ.).
- [28] Fung Y.C. Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation, biomechanics: Its foundations and objectives. New Jersey, Prentice-Hall, 1972. P. 181–208.
- [29] Fung Y.C. Mathematical models of strain-deformation dependence for soft living tissues. *Mekhanika polimerov*, 1975, no. 5, pp. 850–867 (in Russ.).
- [30] Woo S.L.-Y. Mechanical properties of tendons and ligaments – I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties. *Biorheology*, 1982, vol. 19, pp. 385–396.
- [31] Sauren A.A., Rousseau E.P. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. *J. Biomech. Eng.*, 1983, vol. 105, no. 1, pp. 92–95.
DOI: 10.1115/1.3138391 Available at: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1396152&resultClick=3>
- [32] Fung Y.C. Biomechanics. Mechanical properties of living tissues. New York, Springer-Verlag, 1993. 568 p.
- [33] Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *J. Biomech. Eng.*, 2000, vol. 122, no. 1, pp. 15–22.
DOI: 10.1115/1.429623 Available at: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1399078&resultClick=3>
- [34] Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: Application to incremental stress-relaxation experiments. *J. Biomech. Eng.*, 2003, vol. 125, no. 5, pp. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247
Available at: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1410862&resultClick=3>
- [35] Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *J. Biomech. Eng.*, 2004, vol. 126, no. 1, pp. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528
Available at: <http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1411316&resultClick=3>
- [36] Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *J. of Biomechanics*, 2007, vol. 40, no. 14, pp. 3070–3078.
DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019 Available at: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2085233>

- [37] De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2007, vol. 6, no. 4, pp. 245–251. DOI: 10.1007/s10237-006-0056-8
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10237-006-0056-8>
- [38] Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*, 2009, vol. 205, no. 1, pp. 23–33.
DOI: 10.1007/s00707-009-0161-8
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/s00707-009-0161-8>
- [39] Lakes R.S. Viscoelastic materials. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
- [40] Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling. *Biorheology*, 2010, vol. 47, pp. 1–14.
DOI: 10.3233/BIR-2010-0559
Available at: <http://content.iospress.com/articles/biorheology/bir559>
- [41] De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung’s quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. Soc. A.*, 2014, vol. 470.
DOI: 10.1098/rspa.2014.0058
Available at: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/470/2166/20140058>
- [42] Babaei B., Abramowitch S.D., Elson E.L., Thomopoulos S., Genin G.M. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials. *J. Royal. Soc. Interface*, 2015, vol. 12, no. 113, pp. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707
Available at: <http://rsif.royalsocietypublishing.org/content/12/113/20150707>
- [43] Khokhlov A.V. Creep and relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear constitutive relation for viscoelastoplastic materials. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2016, vol. 78, no. 4, pp. 452–466 (in Russ.).
- [44] Khokhlov A.V. Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 524–543 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1512
- [45] Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes: Properties of theoretic creep curves and simulation of memory decay. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 291–306.
DOI: 10.3103/S0025654407020148
Available at: <http://link.springer.com/article/10.3103%2FS0025654407020148>
- [46] Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes with known loading history. Creep and long-term strength curves. *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 283–299.
DOI: 10.3103/S0025654408020155
Available at: <http://link.springer.com/article/10.3103%2FS0025654408020155>
- [47] Khokhlov A.V. Properties of creep curves at piecewise-constant stress generated by the linear viscoelasticity theory. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2015, vol. 77, no. 4, pp. 344–359 (in Russ.).
Available at: <http://www.unn.ru/e-library/ppp.html?anum=322>
- [48] Khokhlov A.V. General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from linear theory of viscoelasticity. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2015, vol. 77, no. 1, pp. 60–74 (in Russ.).
Available at: <http://www.unn.ru/e-library/ppp.html?anum=296>

- [49] Khokhlov A.V. Creep recovery curves yielding from linear viscoelasticity theory and the necessary restrictions on a creep function. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2013, vol. 75, no. 4, pp. 257–267 (in Russ.). Available at: <http://www.unn.ru/e-library/ppp.html?anum=245>
- [50] Khokhlov A.V. The qualitative analysis of theoretic curves generated by linear viscoelasticity constitutive equation. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific Publication of BMSTU], 2016, no. 5, pp. 187–245 (in Russ.). DOI: 10.7463/0516.0840650 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/840650.html>
- [51] Shesterikov S.A., Yumasheva M.A. Specification of equation of state in creep theory. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1984, no. 1, pp. 86–91 (in Russ.).
- [52] Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2009, vol. 13, no. 4, pp. 303–315. DOI: 10.1007/s11043-009-9089-6 Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11043-009-9089-6>
- [53] Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 4, pp. 512–521.
- [54] Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermo-plastic elastomers. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 116–131.
- [55] Khokhlov A.V. Properties of the nonlinear Maxwell-type model with two material functions for viscoelastoplastic materials. *Moscow University Mechanics Bulletin. Ser.1. Matematika, mekhanika*, 2016, no 6, pp. 36–41 (in Russ.).
- [56] Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: Properties of creep curves at piecewise-constant stress and criterion for plastic strain accumulation. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 3, pp. 35–48 (in Russ.).

Khokhlov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Researcher Scientist of the Laboratory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (Michurinskiy prospekt 1, Moscow, 119192 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Khokhlov A.V. Analysis of General Properties of Creep Curves Generated by the Rabotnov Nonlinear Hereditary Relation under Multi-Step Loadings. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 3, pp. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123