

ВЛИЯНИЕ МЕСТА РАСПОЛОЖЕНИЯ И ТИПА ОПОРЫ НА КРИТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

А.А. Саакян

areg1992@gmail.com

Институт механики Национальной академии наук Республики Армения,
Ереван, Республика Армения

Аннотация

Рассмотрена задача устойчивости прямолинейного стержня, закрепленного на одном конце и сжимаемого на другом конце центральной осевой нагрузкой, при наличии дополнительной опоры. Для трех видов закрепления конца стержня (шарнирное, жесткое и скользящее, в перпендикулярном к оси стержня направлении) решена задача устойчивости стержня под воздействием как консервативной сжимающей силы, так и следящей силы. Предположено, что в некоторой точке стержня есть точечная опора, которая может быть как шарнирного типа, так и типа скользящей, в направлении оси стержня, заделки. Получены зависимости критической сжимающей нагрузки от места расположения дополнительной опоры и найдены точки приложения опоры, когда критическая нагрузка принимает максимальные значения

Ключевые слова

Стержень, устойчивость, промежуточная опора, консервативная нагрузка, следящая нагрузка

Поступила в редакцию 07.02.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Введение. Задача устойчивости центрально сжатого упругого стержня была сформулирована и решена еще в XVIII в. Л. Эйлером. В последние десятилетия интерес к этой задаче усилился ввиду широкой ее распространенности [1]. Из множества работ, в той или иной мере связанных с устойчивостью тонкого стержня, отметим, в частности, работы в области биомеханики [2, 3], в микроэлектронике [4, 5] и в инженерии [6–8].

Задачи оптимизации устойчивости сжатого упругого стержня по критерию минимального веса исследованы достаточно полно [9]. Задачи оптимизации на основе определения места расположения опоры рассмотрены в работах [10, 11]. Решение задачи устойчивости закрепленного по концам двухкомпонентного составного стержня под действием осевой сосредоточенной силы, приложенной в точке раздела материалов, а также зависимость критической силы от отношения изгибных жесткостей составных частей стержня даны в работе [12].

В настоящей работе проведено исследование характера изменения критической нагрузки в зависимости от места расположения и типа опоры. Установлено, что в случае опоры шарнирного типа значение критической силы по мере удаления опоры от закрепленного конца монотонно возрастает, в то время как в

случае опоры типа скользящей заделки это значение имеет максимум. Найдены точки приложения дополнительной опоры, когда значение критической силы достигает максимума, который существенно превосходит соответствующее значение в первом случае.

Постановка задачи. Пусть стержень постоянного поперечного сечения, закрепленный на одном конце, сжимается центральной силой P . Предположим возможность установки точечной опоры, ограничивающей поперечное смещение стержня в этой точке, которая может быть шарнирного типа (опора a) или типа скользящей заделки (опора b) (рис. 1).

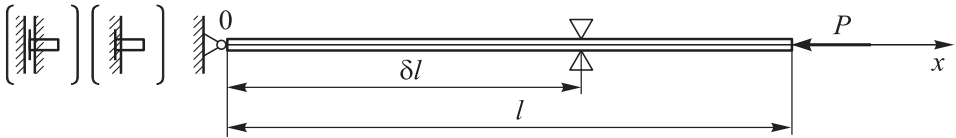


Рис. 1. Схема установки точечной опоры

При заданной длине стержня l требуется определить местоположение опоры, т. е. найти множитель $0 < \delta < 1$, при котором критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости, будет наибольшей.

Уравнение устойчивости для каждой части стержня имеет вид [13]

$$\frac{d^4 w_i(x)}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w_i(x)}{dx^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (1)$$

где $w(x)$ — поперечное перемещение (прогиб), при $i = 1$ на отрезке $0 \leq x \leq \delta l$, а при $i = 2$ на отрезке $\delta l \leq x \leq l$; P — сжимающая нагрузка; E — модуль упругости материала стержня; J — наименьший момент инерции поперечного сечения стержня.

Предположим, что на опоре, т. е. в точке раздела $x = \delta l$ частей стержня, выполняются условия

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2}, \quad x = \delta l \text{ опора } a \quad (2)$$

или

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0, \quad \frac{dw_2}{dx} = 0, \quad x = \delta l \text{ опора } b. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w_i = A_i + B_i x + C_i \sin \alpha x + D_i \cos \alpha x, \quad i = 1, 2.$$

Раздельно рассмотрим каждый случай закрепления конца стержня, учитывая при этом тип опоры и характер сжимающей силы.

Шарнирное закрепление. Удовлетворяя условиям шарнирного закрепления конца

$$w_1 = 0, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \quad x = 0 \quad (4)$$

и условиям непрерывности (2), в случае опоры a имеем

$$w_1 = C_1 \left(\sin \alpha x - \frac{x}{\delta l} \sin \alpha \delta l \right); \quad (5)$$

$$w_2 = \frac{C_1 - C_2}{\cos \alpha \delta l} (\sin \alpha \delta l \cos \alpha x - \alpha \delta l + \alpha x) - \frac{x}{\delta l} C_1 \sin \alpha \delta l + C_2 \sin \alpha x.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяют из граничных условий на конце $x = l$. Поскольку этот конец свободен относительно перемещений и подвержен действию лишь осевой нагрузки, запишем условия, налагаемые на изгибающий момент и перерезывающую силу:

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \kappa \frac{dw_2}{dx} = 0, \quad x = l. \quad (6)$$

При $\kappa = \alpha^2$ будем иметь случай консервативной нагрузки, а при $\kappa = 0$ — следящей нагрузки.

Подставляя второе из представлений (5) в условия (6), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l C_1 - (\operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l - \sin \alpha l) C_2 = 0; \\ & C_1 \left\{ (\alpha^2 - \kappa) \operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l + \kappa \left[\frac{1}{\cos \alpha \delta l} - \frac{\sin \alpha \delta l}{\alpha \delta l} \right] \right\} + \\ & + C_2 \left\{ -(\alpha^2 - \kappa) (\operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l + \cos \alpha l) - \frac{\kappa}{\cos \alpha \delta l} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Приравняв детерминант матрицы приведенной выше системы к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости в зависимости от местоположения опоры:

$$-(\alpha^2 - \kappa) \operatorname{tg} \alpha \delta l + \kappa \frac{\sin \alpha \delta l \sin \alpha (1 - \delta) l - \alpha \delta l \sin \alpha l}{\alpha \delta l \cos \alpha \delta l} = 0. \quad (7)$$

В случае консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$) уравнение (7) примет вид

$$\alpha \delta l \sin \alpha l - \sin \alpha \delta l \sin \alpha (1 - \delta) l = 0, \quad (8)$$

а в случае следящей нагрузки ($\kappa = 0$) — вид

$$\operatorname{tg} \alpha \delta l = 0. \quad (9)$$

Когда имеем опору b , решения для разных частей стержня не связываются друг с другом и при удовлетворении условиям (3), (4) и (6) для каждой части стержня записываем собственное трансцендентное уравнение:

$$\alpha \delta l \cos \alpha \delta l - \sin \alpha \delta l = 0 \quad (10)$$

и

$$(\alpha^2 - \kappa) + \kappa \cos \alpha (1 - \delta) l = 0,$$

которое в случае консервативной нагрузки сводится к уравнению

$$\cos \alpha (1 - \delta) l = 0, \quad (11)$$

а в случае следящей нагрузки — к уравнению

$$\alpha^2 = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что для левой части стержня нет понятия «консервативная» или «следящая» нагрузка, а также уравнение (12) для правой части, можно сделать следующий вывод: в случае следящей нагрузки стержень не теряет устойчивость независимо от месторасположения опоры типа скользящей заделки.

Жесткое защемление. В этом случае у конца стержня будем иметь условия

$$w_1 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0, \quad x = 0. \quad (13)$$

В случае опоры *a* для прогибов каждой части стержня получим выражения

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 \left[(\alpha \delta l - \sin \alpha \delta l) \frac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \alpha \delta l} - \alpha x + \sin \alpha x \right]; \\ w_2 &= C_2 \left\{ \frac{\alpha (\delta l - \alpha x)}{\cos \alpha \delta l} + \sin \alpha x - \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha x \right\} + \\ &+ C_1 \left\{ -\frac{\alpha \delta l}{\cos \alpha \delta l} + \frac{(\alpha \delta l - \sin \alpha \delta l)}{1 - \cos \alpha \delta l} + \alpha x \frac{1 - \cos \alpha \delta l}{\cos \alpha \delta l} + \operatorname{tg} \alpha \delta l \frac{(1 - \alpha \delta l \operatorname{ctg} \alpha \delta l)}{1 - \cos \alpha \delta l} \cos \alpha x \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Удовлетворяя вторым из представлений (14) условиям (6), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \frac{(\alpha \delta l - \operatorname{tg} \alpha \delta l)}{1 - \cos \alpha \delta l} \cos \alpha l + C_2 (-\sin \alpha l + \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l) &= 0; \\ C_1 \left\{ \alpha \kappa \frac{1 - \cos \alpha \delta l}{\cos \alpha \delta l} + \alpha (\kappa - \alpha^2) \frac{\alpha \delta l - \operatorname{tg} \alpha \delta l}{1 - \cos \alpha \delta l} \sin \alpha l \right\} + \\ + C_2 \left\{ -\frac{\alpha \kappa}{\cos \alpha \delta l} + \alpha (\kappa - \alpha^2) (\cos \alpha l + \operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l) \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв детерминант матрицы последней системы к нулю, придем к следующему трансцендентному уравнению:

$$\begin{aligned} \kappa [-2\alpha \delta l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l + \sin \alpha (1 - 2\delta) l - 4 \sin \alpha (1 - \delta) l] + \\ + 2(\kappa - \alpha^2) [\alpha \delta l \cos \alpha \delta l - \sin \alpha \delta l] = 0, \end{aligned}$$

которое в случае консервативной нагрузки примет вид

$$-2\alpha\delta l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l + \sin \alpha (1 - 2\delta)l - 4 \sin \alpha (1 - \delta)l = 0, \quad (15)$$

а в случае следящей нагрузки — вид

$$\alpha\delta l \cos \alpha\delta l - \sin \alpha\delta l = 0. \quad (16)$$

В случае опоры b очевидно, что уравнения (11) и (12) для правой части стержня сохраняются, а для левой части нетрудно получить уравнение

$$2 \cos \alpha\delta l + \alpha\delta l \sin \alpha\delta l - 2 = 0. \quad (17)$$

Скользкая заделка. Для скользящей в перпендикулярном направлении заделки граничными условиями являются

$$\frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0, \quad x = 0.$$

Удовлетворяя последним условиям и условиям непрерывности (2), в случае опоры a запишем

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 (\alpha\delta l - \alpha x - \sin \alpha\delta l + \sin \alpha x); \\ w_2 &= C_1 \left\{ -\frac{1 - \cos \alpha\delta l}{\cos \alpha\delta l} (\alpha\delta l - \alpha x) - \sin \alpha\delta l + \operatorname{tg} \alpha\delta l \cos \alpha x \right\} + \\ &+ C_2 \left\{ \frac{1}{\cos \alpha\delta l} (\alpha\delta l - \alpha x) + \sin \alpha x - \operatorname{tg} \alpha\delta l \cos \alpha x \right\}. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю определитель матрицы однородной системы, получаемой после удовлетворения условиям (6), приходим к тригонометрическому уравнению $(\alpha^2 - \kappa) \sin \alpha\delta l + \kappa \{ \sin \alpha l - \sin \alpha (1 - \delta)l \} = 0$.

При $\kappa = 0$ (следящая нагрузка) критическая нагрузка определяется из уравнения

$$\sin \alpha\delta l = 0, \quad (18)$$

при $\kappa = \alpha^2$ (консервативная нагрузка) — из уравнения

$$\sin \alpha l - \sin \alpha (1 - \delta)l = 0. \quad (19)$$

В случае опоры b прогиб левой части определяется однозначно, независимо от силы, и равен нулю. Следовательно, устойчивость всего стержня обуславливается устойчивостью только лишь правой его части.

Численный анализ. Учитывая обозначения в уравнении (1), численный анализ и выводы будут выполняться относительно параметра α с использованием критической нагрузки.

Рассмотрим крайние положения опоры. Пусть опора вплотную подходит к закрепленному концу стержня ($\delta \rightarrow 0$), тогда, независимо от вида закрепления этого конца и типа опоры, имеем задачу устойчивости стержня с жестко закрепленным концом, критическая консервативная нагрузка для которой известна [13] и равна

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}. \tag{20}$$

Анализируя поведение уравнений (8), (11), (15) и (19) при $\delta \rightarrow 0$, нетрудно найти, что эти уравнения переходят в уравнение $\cos \alpha l = 0$, решением которого является (16). Для следящей нагрузки уравнения (9), (12), (16) и (18) дают только нулевое решение, т. е. под действием следящей силы стержень устойчивость не теряет.

Когда опора a приближается к свободному концу стержня ($\delta \rightarrow 1$), уравнения (8) и (9), как и уравнения (18) и (19), сводятся к уравнению $\sin \alpha l = 0$, решением которого является $\alpha = \pi/l$, совпадающее с известным результатом [13] для шарнирно закрепленного по концам стержня. Из уравнений (15) и (16) получим уравнение

$$\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l = 0, \tag{21}$$

решением которого является

$$\alpha = \frac{4,493409457\dots}{l} \approx \frac{\pi}{0,7l}, \tag{22}$$

совпадающее с известным результатом [13] для стержня, жестко закрепленного на одном конце и шарнирно закрепленного на другом.

В случае, когда опора b подходит к свободному концу ($\delta \rightarrow 1$), уравнение (10) переходит в уравнение (21) и имеет решение (22), а из уравнения (17) находим $\alpha l = 2\pi$, что совпадает с известным результатом [13] для стержня, жестко закрепленного на одном конце и скользяще заделанного на другом.

Зависимости критической консервативной нагрузки от расположения опоры при промежуточных расположениях опоры представлены на рис. 2.

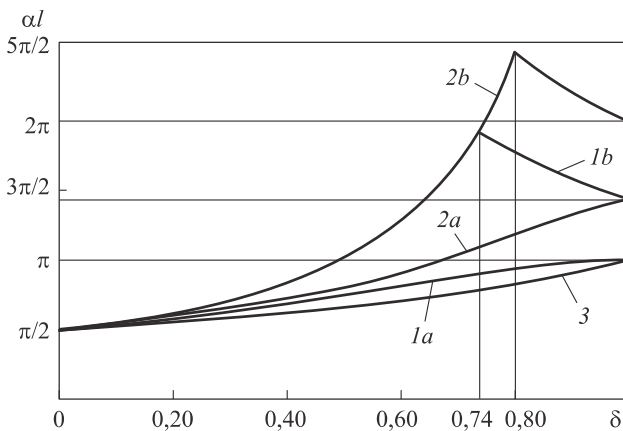


Рис. 2. Зависимости критической нагрузки от расположения опоры при различных условиях закрепления конца стержня:

$1a, 1b$ — для шарнирно закрепленного конца при опорах a и b ; $2a, 2b$ — для защемленного конца при опорах a и b ; 3 — для скользяще заделанного конца

Для следящей нагрузки зависимости критической нагрузки от расположения опоры представляются аналитически:

– для шарнирно закрепленного конца и скользящей заделки (опора a)
 $\alpha l = \pi / \delta$;

– для защемленного конца (опора a) и шарнирно закрепленного конца (опора b) $\alpha l = 4,493409457\dots \approx \pi / (0,7\delta)$;

– для защемленного конца (опора b) $\alpha l = 2\pi / \delta$.

В приведенных выше формулах уменьшение δ ограничивается условием прочности стержня

$$\sigma = \frac{P}{S} < [\sigma],$$

где S — площадь поперечного сечения; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на сжатие.

Согласно зависимостям, приведенным на рис. 2, непосредственно можно отметить преимущество установки опоры b , т. е. опоры типа скользящей заделки (гладкой обоймы), выражающееся в существенном повышении значения критической нагрузки. Установка вместо опоры a опоры b в точке $0,74l$, в случае шарнирно закрепленного конца, и в точке $0,8l$, в случае жесткого его защемления, приводит к более чем двукратному ($\approx 2,12$) увеличению значения критической нагрузки.

Заключение. Исследовано влияние промежуточной точечной опоры типа шарнира или гладкой обоймы на значение критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости центрально сжатого упругого стержня, при различных условиях закрепления одного его конца. Показано, что при расположении опоры близко к свободному концу стержня даже при следящей нагрузке возможна потеря устойчивости, причем при наличии опоры a критическая следящая нагрузка всегда превосходит критическую консервативную нагрузку. Установлено, что при любом местоположении опоры обоих типов значение критической консервативной нагрузки для стержня с защемленным концом превосходит это же значение для стержня с шарнирно закрепленным концом, а последнее, в случае опоры a , превосходит значение для стержня со скользяще заделанным концом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shan W., Chen Z. Mechanical instability of thin elastic rods // Journal of Postdoctoral Research. 2013. Vol. 1. No. 2. P. 1–8. URL: <http://www.postdocjournal.com/archives/557/mechanical-instability-of-thin-elastic-rods.htm>
2. Brangwynne C.P., MacKintosh F.C., Kumar S., Geisse N.A., et al. Microtubules can bear enhanced compressive loads in living cells because of lateral reinforcement // The Journal of Cell Biology. 2006. Vol. 173. No. 5. P. 733–741. DOI: 10.1083/jcb.200601060 URL: <http://jcb.rupress.org/content/173/5/733>

3. *Das M., Levine A.J., MacKintosh F.C.* Buckling and force propagation along intracellular microtubules // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 84. No. 1. P. 18003.
DOI: 10.1209/0295-5075/84/18003
URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/84/18003/pdf>
4. *Sun Y., Choi W.M., Jiang H., Huang Y.Y., Rogers J.A.* Controlled buckling of semiconductor nanoribbons for stretchable electronics // *Nature Nanotechnology*. 2006. Vol. 1. No. 3. P. 201–207. DOI: 10.1038/nnano.2006.131
URL: <http://www.nature.com/nnano/journal/v1/n3/abs/nnano.2006.131.html>
5. *Xu F., Lu W., Zhu Y.* Controlled 3D buckling of silicon nanowires for stretchable electronics // *ACS Nano*. 2011. Vol. 5. No. 1. P. 672–678. DOI: 10.1021/nn103189z
URL: <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nn103189z>
6. *Liu Y., Xue Y.* Some aspects of research on mechanics of thin elastic rod // *Journal of Physics: Conference Series*. 2013. Vol. 448. Conf. 1. P. 012001.
DOI: 10.1088/1742-6596/448/1/012001
URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/448/1/012001/meta>
7. *Kolomiets L., Oroby V., Lymarenko A.* Non-conservative problems of the stability of bar structures // *Hrcak*. 2015. Vol. 9. No. 3. P. 311–316.
URL: http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=215291&lang=en
8. *Auciello N.M.* Stability and vibration of rods under follower forces; the boundary characteristic orthogonal polynomials (BCOP) method // *Proc. of AIMETA2009 XIX Int. Congress of the Italian Association for Theoretical and Applied Mechanics*. 2009, Italy. ARAS Edizioni. P. 1–10.
9. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
10. *Гнуни В.Ц.* Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки // Сб. «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. С. 115–120.
11. *Гнуни В.Ц., Элоян А.В.* Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки // *Известия НАН РА. Механика*. 2001. Т. 54. № 3. С. 14–17.
12. *Lee G.E., Reissner E.* Note on a problem of beam buckling // *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 1975. Vol. 26. No. 6. P. 839–841. DOI: 10.1007/BF01596086
URL: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01596086>
13. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

Саакян Арег Аветикович — аспирант Института механики Национальной академии наук Республики Армения (Республика Армения, 0019, Ереван, пр-т Баграмяна, д. 24/2).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Саакян А.А. Влияние места расположения и типа опоры на критическую нагрузку сжатого стержня // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 4. С. 65–74. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-65-74

INFLUENCE OF A SUPPORT TYPE AND LOCATION ON THE VALUE OF CRITICAL LOAD FOR COMPRESSION BAR

A.A. Sahakyan

areg1992@gmail.com

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia,
Yerevan, Republic of Armenia

Abstract

The study considers the stability problem of a rectilinear bar fastened at one end and compressed by a central axial force. We assume that at some point the bar is supported by a) hinge, allowing axial movement and rotation, or b) sliding sleeve, allowing axial movement only. We examine three types of end fastening: a) hinge, b) rigid clamp and c) sliding sleeve perpendicular to the bar axis. We solved the stability problem for the bar for both “conservative” compressing force and “follower” force. Findings of the research show that in the case of hinge support the value of critical “conservative” force decreases monotonically when the distance between the fastened end and the support decreases, but in the case of sliding sleeve the value of critical “conservative” force has a maximum. The point of maximum and maximal value depend on the type of the bar end fastening. In case when the compressing load is a “follower” force, the value of critical force increases monotonically when the distance between the fastened end and the support decreases

Keywords

Bar, stability, intermediate support, conservative force, follower force

REFERENCES

- [1] Shan W., Chen Z. Mechanical instability of thin elastic rods. *Journal of Postdoctoral Research*, 2013, vol. 1, no. 2, pp. 1–8. Available at: <http://www.postdocjournal.com/archives/557/mechanical-instability-of-thin-elastic-rods.htm>
- [2] Brangwynne C.P., MacKintosh F.C., Kumar S., Geisse N.A., Talbot J., Mahadevan L., Parker K.K., Ingber D.E., Weitz D.A. Microtubules can bear enhanced compressive loads in living cells because of lateral reinforcement. *The Journal of Cell Biology*, 2006, vol. 173, no. 5, pp. 733–741. DOI: 10.1083/jcb.200601060 Available at: <http://jcb.rupress.org/content/173/5/733>
- [3] Das M., Levine A.J., MacKintosh F.C. Buckling and force propagation along intracellular microtubules. *Europhysics Letters*, 2008, vol. 84, no. 1, pp. 18003. DOI: 10.1209/0295-5075/84/18003 Available at: <http://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/84/18003/pdf>
- [4] Sun Y., Choi W.M., Jiang H., Huang Y.Y., Rogers J.A. Controlled buckling of semiconductor nanoribbons for stretchable electronics. *Nature Nanotechnology*, 2006, vol. 1, no. 3, pp. 201–207. DOI: 10.1038/nnano.2006.131 Available at: <http://www.nature.com/nnano/journal/v1/n3/abs/nnano.2006.131.html>

- [5] Xu F., Lu W., Zhu Y. Controlled 3D buckling of silicon nanowires for stretchable electronics. *ACS Nano*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 672–678. DOI: 10.1021/nn103189z
Available at: <http://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/nn103189z>
- [6] Liu Y., Xue Y. Some aspects of research on mechanics of thin elastic rod. *Journal of Physics: Conference Series*, 2013, vol. 448, conf. 1, pp. 012001. DOI: 10.1088/1742-6596/448/1/012001
Available at: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/448/1/012001/meta>
- [7] Kolomiets L., Orobey V., Lymarenko A. Non-conservative problems of the stability of bar structures. *Hrcak*, 2015, vol. 9, no. 3, pp. 311–316.
Available at: http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=215291&lang=en
- [8] Auciello N.M. Stability and vibration of rods under follower forces; the boundary characteristic orthogonal polynomials (BCOP) method. *Proc. of AIMETA2009 XIX Int. Congress of the Italian Association for Theoretical and Applied Mechanics*. 2009, Italy, ARAS Edizioni, pp. 1–10.
- [9] Banichuk N.V. Optimizatsiya form uprugikh tel [Elastic body shape optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 256 p.
- [10] Gnuni V.Ts. Optimal'nyy vybor raspolozheniya opor v zadachakh izgiba, kolebaniy i ustoychivosti uprugoy balki [Optimum choice of support arrangement in bending, vibration and spring beam stability problems]. *Sb. «Voprosy optimal'nogo upravleniya, ustoychivosti i prochnosti mekhanicheskikh sistem»* [Collection “Problems of mechanical system optimal control, stability and strength”]. Erevan: EGU Publ., 1997, pp. 115–120 (in Russ.).
- [11] Gnuni V.Ts., Eloyan A.V. Optimal choice of the supports place in the problem of the rectangular plate bending. *Izvestiya NAN RA. Mekhanika* [Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia: Mechanics], 2001, vol. 54, no. 3, pp. 14–17 (in Russ.).
- [12] Lee G.E., Reissner E. Note on a problem of beam buckling. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1975, vol. 26, no. 6, pp. 839–841. DOI: 10.1007/BF01596086
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01596086>
- [13] Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 984 p.

Sahakyan A.A. — post-graduate student of Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia (Baghramyan prospekt 24/2, Yerevan, 0019 Republic of Armenia).

Please cite this article in English as:

Sahakyan A.A. Influence of a Support Type and Location on the Value of Critical Load for Compression Bar. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 4, pp. 65–74.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-65-74