

СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

М.П. Галанин

П.В. Глизнуцина

В.В. Лукин

А.С. Родин

galan@keldysh.ru

gliznutsinapv@gmail.com

vvlukin@gmail.com

rals@bk.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача о контактном взаимодействии двух деформируемых упругих тел в двумерной постановке. Для аппроксимации упругой задачи применен метод конечных элементов на четырехугольных билинейных элементах. Для учета контактных условий реализован метод множителей Лагранжа с тремя вариантами реализации: контакт точка–поверхность, контакт поверхность–поверхность и контакт поверхность–поверхность с подсегментами. Проведены тестовые расчеты. Решена задача Герца и выполнено сравнение с аналитическим решением. Сравнительный анализ методов показал, что методы контакт поверхность–поверхность и контакт поверхность–поверхность с подсегментами позволяют получать более точные результаты, чем метод контакт точка–поверхность. Метод контакт поверхность–поверхность с подсегментами позволяет сглаживать колебания поля напряжений, однако этот эффект проявляется на ограниченном круге задач

Ключевые слова

Деформируемое твердое тело, контактная задача, метод конечных элементов, метод множителей Лагранжа

Поступила в редакцию 22.02.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты № 15-01-03073, № 16-31-00302

Введение. Исследование механики контактного взаимодействия — важный этап анализа характера деформирования и прочности инженерных конструкций в рамках предположений механики сплошных сред [1, 2].

Контактные задачи сложны для математического моделирования, поскольку прямой учет контактных условий на поверхности тел не всегда возможен. Условия контакта включают в себя два фундаментальных условия — непроникания одного тела в другое (кинематическое условие на перемещения точек поверхности контактирующих тел) и равного силового воздействия каждого контактирующего тела на другое (условие равенства на поверхности контакта нормальных напряжений).

В большинстве случаев численного анализа контактного взаимодействия тел кинематические контактные условия можно учесть в явном виде, так как в качестве неизвестных обычно выбираются перемещения, и соответствующее условие переходит в условие равенства нормальных компонент перемещений на контактной поверхности. Силовые контактные условия содержат производные численного решения и могут быть выполнены только в некотором слабом смысле — в виде равенства интегральных средних от нормальных напряжений на контактной поверхности. Указанное обстоятельство не позволяет включать данные условия, например, в дискретизованную систему уравнений метода конечных элементов (МКЭ) явным образом — это приведет к потере точности численного решения. В этом случае для учета силовых условий приходится применять дополнительные приемы.

Для решения контактных задач применяют ряд численных методов, среди которых метод множителей Лагранжа [3], метод штрафов [3], метод Шварца [4, 5] и другие реже используемые (например, метод конечных элементов с использованием функций формы Эрмита). Здесь рассмотрим применение метода множителей Лагранжа, как одного из наиболее эффективных методов учета контактного взаимодействия, при решении двумерных статических задач теории упругости для системы тел.

Постановка контактной задачи и математическая модель. Рассмотрим постановку двумерной контактной задачи [3, 6].

Пусть имеются два тела B_1 и B_2 , которые в результате приложенных нагрузок вступают в контакт (рис. 1). На контактной поверхности Γ_C должны быть выполнены условия непроникания одного тела в другое:

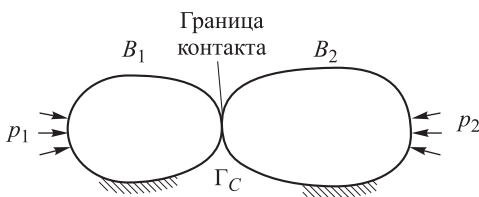


Рис. 1. Схема контакта твердых тел

$$g^\alpha = \min_{\mathbf{x}^\beta \in \Gamma^\beta} (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta) \cdot \mathbf{n}^\alpha \geq 0, \quad \mathbf{x}^\alpha \in \Gamma^\alpha,$$

где α, β — индексы контактирующих тел; Γ^α — поверхность тела B_α , обращенная к поверхности тела B_β ; Γ^β — поверхность тела B_β , обращенная к поверхности тела B_α ; \mathbf{n}^α — внешняя нормаль в точке \mathbf{x}^α к поверхности контакта для тела B_α ; g^α — зазор между точкой \mathbf{x}^α и телом B_β . Контакт возникает тогда, когда хотя бы для одной точки тела B_α зазор равен нулю. Если для всех точек тела B_α зазор положителен, то тела не находятся в контакте.

В случае контакта на совместной границе контактирующих тел возникают распределенные поверхностные силы, далее обозначаемые \mathbf{t} . Нормальная и касательная составляющие распределенной контактной силы, действующей на любое из тел, имеют вид

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \leq 0; \tag{1}$$

$$t_t = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к контактной поверхности данного тела; $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к контактной поверхности тела.

В формуле (1) нестрогое неравенство превращается в равенство при выходе тел из контакта и в строгое неравенство — при нахождении в контакте. Поэтому нормальные контактные силы могут быть только сжимающими. Касательные контактные силы могут принимать любые значения.

В случае, если на контактной поверхности реализуется условие скольжения без трения, то касательные контактные силы принимаются равными нулю: $t_t = 0$.

Основные соотношения математической модели. Математическая модель контактного взаимодействия упругих тел включает в себя следующие основные соотношения [7], записанные в прямоугольной декартовой системе координат Oxy .

1. Соотношения Коши:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = [B]\{u\},$$

где $\{\varepsilon\}$ — вектор деформаций; $\{u\}(M) = \{u(M), v(M)\}^T$ — вектор перемещений в точке тела M ; B — матрица,

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

2. Обобщенный закон Гука: $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = [H]\{\varepsilon - \varepsilon_0\}$. Здесь $\{\sigma\}$ — вектор напряжений; $\{\varepsilon_0\}$ — вектор начальной деформации (в рассматриваемых задачах она нулевая); $[H]$ — матрица упругих модулей [8].

3. Дифференциальные уравнения равновесия: $[B]^T \{\sigma\} = \{f\}$.

4. Граничные условия первого или второго рода на границе контакта.

5. Контактные условия:

$$u_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = u_n^{(2)}|_{\Gamma_C};$$

$$\sigma_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = \sigma_n^{(2)}|_{\Gamma_C},$$

где $u_n^{(i)}$, $\sigma_n^{(i)}$ — нормальные перемещения и нормальные напряжения для i -го тела, $i = 1, 2$.

Численный метод. Численный алгоритм решения рассмотренной математической модели основан на МКЭ с четырехугольными билинейными элемен-

тами в качестве функций формы [8, 9]. Более подробное описание метода можно найти в работе [10].

Учет контактных условий. При численном решении контактные условия учитываются с помощью метода множителей Лагранжа [6].

Согласно методу множителей Лагранжа к потенциальной энергии системы двух тел, входящих в контакт [10], добавляется потенциал контактных сил вида

$$W_C = - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma, \tag{2}$$

где Λ — функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил; $x^{(i)} = X^{(i)} + u^{(i)}$ — актуальные положения соответствующих сходственных точек тел $i = 1, 2$ на контактной поверхности; $X^{(i)}$, $u^{(i)}$ — исходные положения и получаемые перемещения сходственных точек. Далее полученная энергия варьируется и ее первая вариация приравняется нулю. Переменные u и Λ независимы.

Для вычисления интеграла (2) необходимо его дискретизовать. При этом дискретизируется и непрерывная функция Λ . В таком случае в систему линейных алгебраических уравнений, полученную с помощью метода конечных элементов, добавляются новые неизвестные.

Вычисление интеграла (2) осуществляется следующим образом [11]. Одно из тел выбирается активным, другое — пассивным. Интегрирование проводят по сегментам граничных элементов дискретизированного активного тела, вступивших в контакт, на них же выбирают квадратурные точки, затем строят сходственные точки на пассивном теле. Тогда интеграл (2) можно представить в следующем виде:

$$W_C = - \int_{\Gamma_C} \lambda^T (x^{(m)} - x^{(s)}) d\Gamma, \tag{3}$$

где $x^{(m)}$, $x^{(s)}$ — актуальные положения сходственных точек на активном и пассивном телах; λ^T — вектор дискретизированных множителей Лагранжа.

В общем случае используют интерполяцию

$$x^{(m)} = N_\alpha(\xi) \tilde{x}_\alpha^{(m)}(t); \quad x^{(s)} = N_\beta(\xi) \tilde{x}_\beta^{(m)}(t); \quad \lambda^T = N_c(\xi) \tilde{\lambda}_c^T(t).$$

Здесь N_α , N_β — функции формы, используемые в МКЭ для получения системы алгебраических уравнений; N_c — функции формы для дискретизации множителей Лагранжа. В зависимости от метода они могут выбираться различными способами. Рассмотрим три способа [11].

1. *Метод контакт точка-поверхность* $N_c = \delta(\xi - \xi_c)$, где ξ_c — сходственная точка на пассивном теле.

В системе линейных алгебраических уравнений МКЭ оба контактных узла представляют как линейные комбинации близлежащих узловых точек конечно-элементной сетки.

2. Метод контакт поверхность–поверхность $N_c = \delta_{c\beta} N_\beta$. Тогда (3) можно записать в виде

$$W_C = -\sum_m \int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_c^T N_c(\xi) [N_\alpha(\xi) \tilde{x}_\alpha^{(m)} - N_\beta(\xi_s) \tilde{x}_\beta^{(s)}] d\Gamma.$$

В этом случае для интегрирования используют квадратурную формулу Гаусса с четырьмя точками интегрирования на сегменте граничного элемента активного тела.

3. Метод контакт поверхность–поверхность с подсегментами имеет одно отличие от предыдущего метода: сегменты активного тела, по которому идет интегрирование, разбиваются на подсегменты так, чтобы каждому подсегменту активного тела при вычислении интеграла соответствовал лишь один сегмент пассивного тела.

В таком случае интегрирование идет по сегменту активного тела и осуществляется более точно, чем в предыдущем методе. Тогда (3) можно записать в виде

$$W_C = -\sum_m \int_{\Gamma_C} \lambda_c^T [G_{c\alpha}^m \tilde{x}_\alpha^{(m)} - G_{c\beta}^s \tilde{x}_\beta^{(s)}] d\Gamma,$$

где $G_{c\alpha}^m = \int_{\Gamma_C} N_c(\xi) N_\alpha(\xi) d\Gamma$; $G_{c\beta}^s = \int_{\Gamma_C} N_c(\xi) N_\beta(\xi_s) d\Gamma$; I — единичная матрица.

Результаты тестовых расчетов. В качестве тестовой решим задачу о двух брусках из одинакового материала (рис. 2). Первый брусок лежит на гладкой поверхности, второй — на первом. Сверху ко второму бруску приложена распределенная сила p . Параметры задачи приведены ниже:

l_1 , см	l_2 , см	h_1 , см	h_2 , см	ν_1	ν_2	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	p , МПа
10	6	3	3	0,3	0,3	70	70	50

В силу симметрии задачи рассмотрим половину области. В таком случае закрепим ось симметрии системы брусков по координате x на левой границе, первый брусок по координате y на нижней границе и ко второму бруску сверху приложим распределенную нагрузку.

Рассмотрим решение задачи двумя методами — контакт точка–поверхность и контакт поверхность–поверхность, а также сравним с получаемым численным решением, найденным с помощью альтернирующего метода Шварца [7].

Распределения компоненты перемещений u_y и компоненты напряжений σ_y для расчетов с шагом $h = 0,125$ см приведены

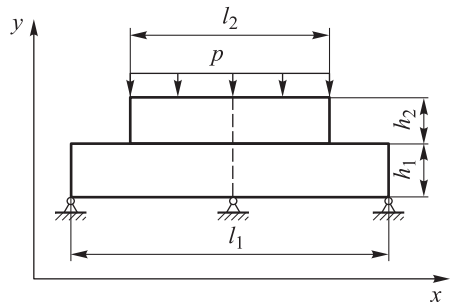


Рис. 2. Схема системы из двух брусков для задачи о двух брусках из одинакового материала

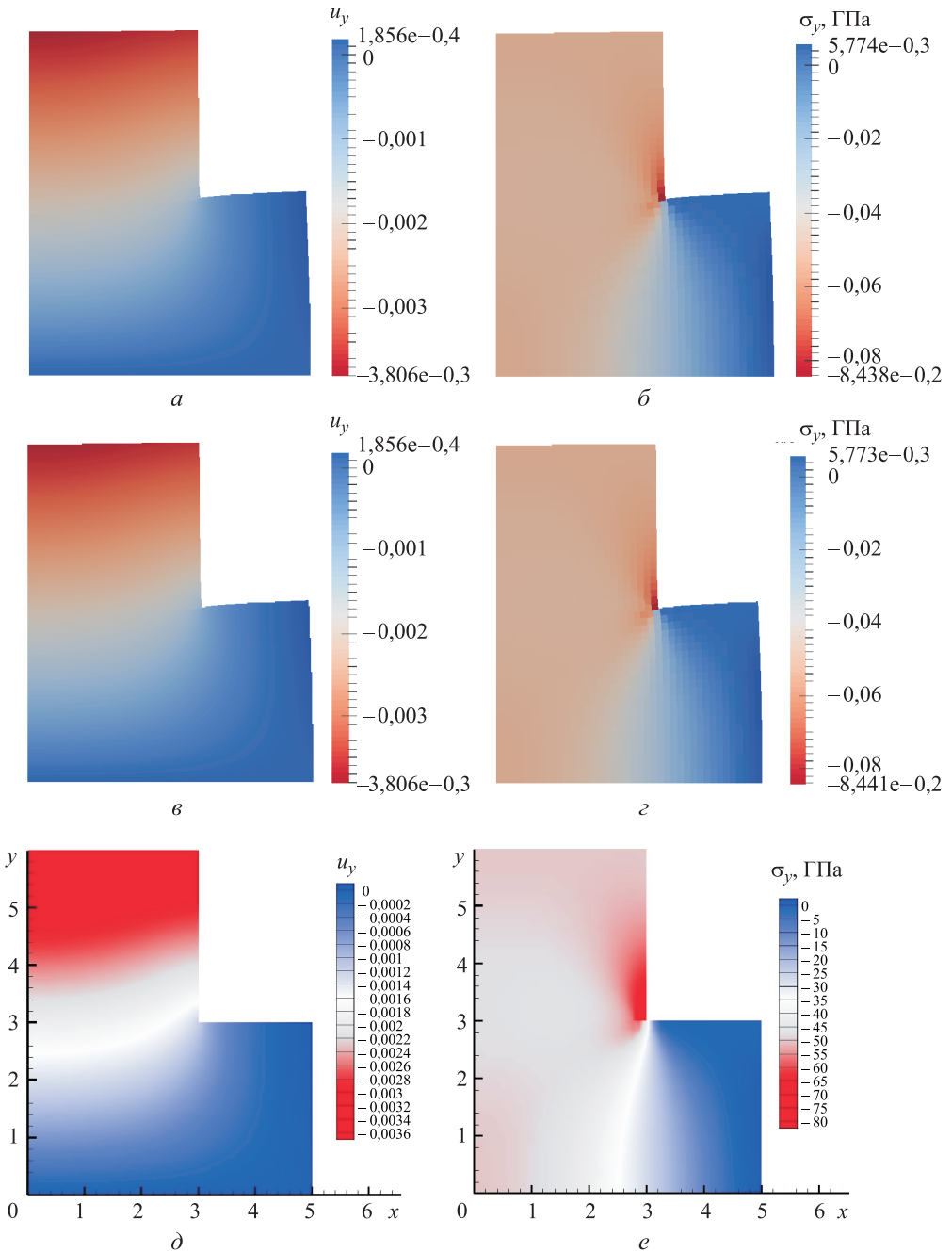


Рис. 3. Распределения вертикальной компоненты перемещений (*a*, *в*, *д*) и вертикальной компоненты напряжений (*б*, *г*, *е*), полученные методами контакт точка–поверхность (*a*, *б*), контакт поверхность–поверхность (*в*, *г*) и альтернирующим методом Шварца (*д*, *е*) при шаге 0,125 см

на рис. 3. Все распределения на рис. 3, *a–г* показаны на деформированной форме с коэффициентом масштабирования 100, а на рис. 3, *д*, *е* — с коэффициентом масштабирования 1.

В исходной конфигурации сетки для двух тел совпадают на контактной поверхности. После деформирования они смещаются относительно друг друга. Оба тела сжимаются в вертикальном направлении и расширяются в горизонтальном.

В силу геометрии задачи вертикальные компоненты перемещений и напряжений на контактной поверхности близки к соответствующим нормальным компонентам перемещений и напряжений. В угловой точке в аналитическом решении имеют место бесконечные нормальные напряжения. С уменьшением шага численно получаемые значения нормальных напряжений возрастают по модулю.

Различие в данных, получаемых двумя первыми методами, невелико — в пятом знаке после запятой (0,1 %). Однако можно отметить, что второй метод лучше отражает физические свойства задачи, чем первый, так как он позволяет получать значения нормальных напряжений в угловой точке более близкими к «аналитической бесконечности».

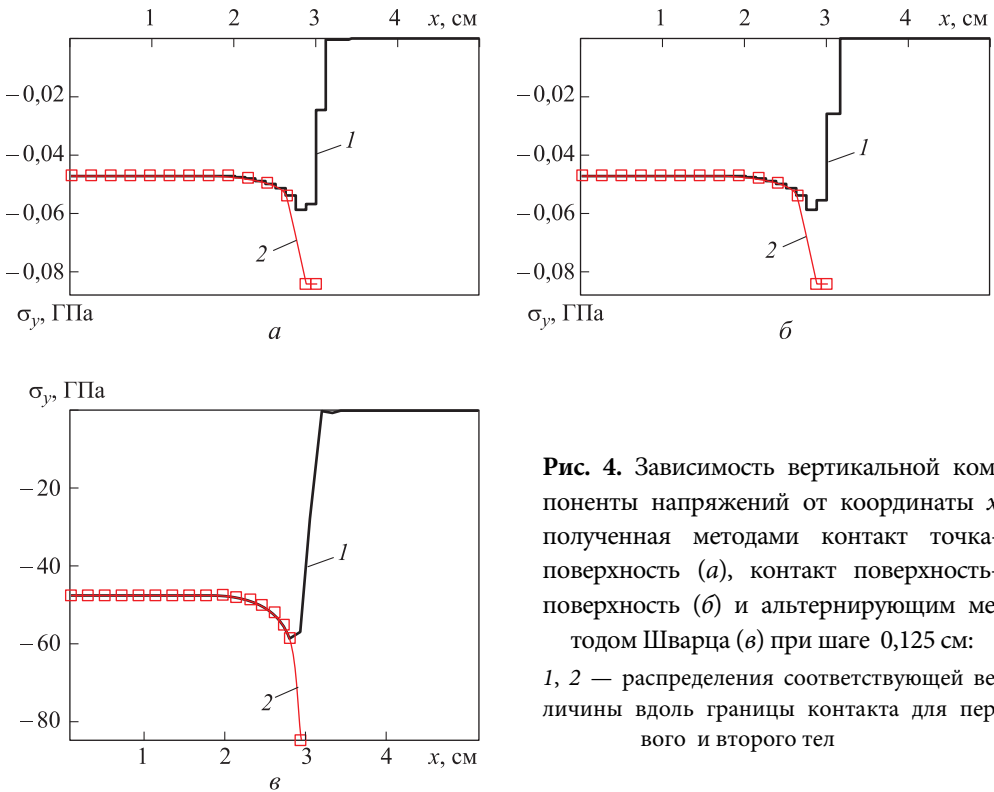


Рис. 4. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты x , полученная методами контакт точка-поверхность (а), контакт поверхность-поверхность (б) и альтернирующим методом Шварца (в) при шаге 0,125 см: 1, 2 — распределения соответствующей величины вдоль границы контакта для первого и второго тел

Результаты, полученные использованием обоих методов, близки к результатам, полученным с помощью альтернирующего метода Шварца. Поскольку наиболее интересным представляется распределение нормальных напряжений, то на рис. 4 приведены полученные в расчетах с шагом $h = 0,125$ распределения компоненты напряжений σ_y , которая в силу геометрии близка к нормальной компоненте.

Вертикальные перемещения и напряжения на контактной поверхности у обоих тел близки друг к другу, следовательно, близки нормальные перемещения и напряжения. При этом решение имеет особенность в угловой точке верхнего тела.

Рассмотрим эту задачу при несовпадении сеток на контактной поверхности. Шаг сетки для первого тела примем равным 0,08 см, шаг сетки для второго тела — 0,1 см. Получаемые напряжения приведены на рис. 5.

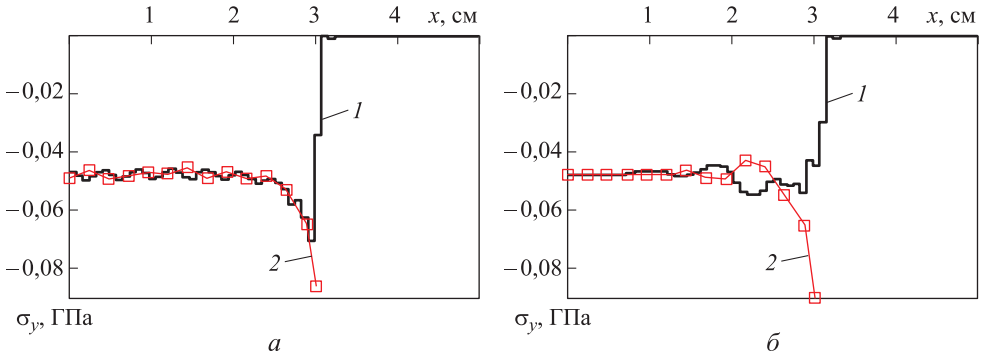


Рис. 5. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты x , полученная методами контакт точка–поверхность (а), контакт поверхность–поверхность (б):

1, 2 — распределения соответствующей величины вдоль границы контакта для первого и второго тел

Метод контакт точка–поверхность дает расхождение напряжений на всей контактной поверхности, метод контакт поверхность–поверхность — практическое совпадение контактных напряжений первого и второго тел в центре системы брусков, однако ближе к угловой точке появляются колебания, причем их амплитуда больше, чем в методе контакт точка–поверхность.

Рассмотрим аналогичную задачу о двух брусках из разных материалов с более жестким первым телом. Параметры задачи приведены ниже:

l_1 , см	l_2 , см	h_1 , см	h_2 , см	ν_1	ν_2	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	ρ , МПа
10	6	3	3	0,3	0,3	700	70	50

Аналогично предыдущей задаче рассмотрим половину области с соответствующими закреплениями.

Рассмотрим эту задачу при несовпадении сеток на контактной поверхности. Шаг сетки для первого тела примем равным 0,08 см, шаг сетки для второго — 0,1 см. Получаемые напряжения приведены на рис. 6.

В распределениях, полученных методом контакт точка–поверхность, наблюдаются колебания с приблизительно неизменной амплитудой на всей контактной границе, а в распределениях, полученных методом контакт поверхность–поверхность, ближе к центру симметрии задачи колебания незначительны, но в окрестности особой точки колебания возрастают и их амплитуда больше, чем в методе контакт точка–поверхность.

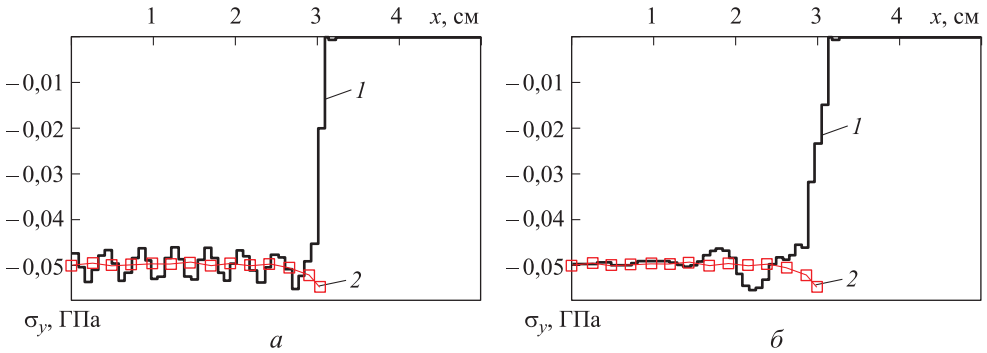


Рис. 6. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты x , полученная методами контакт точка–поверхность (а), контакт поверхность–поверхность (б): 1, 2 — распределения соответствующей величины вдоль границы контакта для первого и второго тел

Для того чтобы показать различие методов контакт поверхность–поверхность и контакт поверхность–поверхность с под-сегментами проведем тестовый расчет для задачи, аналогичной первой, только с одинаковой геометрией брусков — задачи об одинаковых брусках из разных материалов с неравномерной сеткой (рис. 7). Первый брусок лежит на гладкой поверхности, второй — на первом. Сверху ко второму бруску приложена распределенная сила p . Аналогично рассмотрим лишь половину области с соответствующими закреплениями. Параметры задачи приведены ниже:

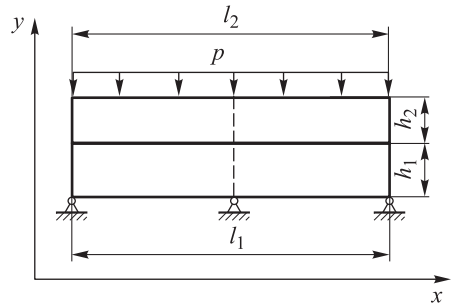


Рис. 7. Схема системы из двух брусков для задачи об одинаковых брусках из разных материалов с неравномерной сеткой

l_1 , см	l_2 , см	h_1 , см	h_2 , см	ν_1	ν_2	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	p , МПа
10	10	3	3	0,3	0,3	700	70	50

Рассмотрим эту задачу при несовпадении сеток на контактной поверхности. Шаг сетки для первого тела примем равным 0,12 см, шаг сетки для второго — 0,15 см. Получаемые напряжения приведены на рис. 8. Черным цветом показано распределение соответствующей величины на контактной поверхности для первого тела, красным — распределение соответствующей величины на контактной поверхности для второго тела.

Аналитическое решение задачи для вертикальной компоненты напряжений: $\sigma_y = p$. Как видно на рисунках, в решении метода контакт поверхность–поверхность наблюдаются колебания, однако они малы — в пятом знаке после запятой. В решении метода контакт поверхность–поверхность с подсегментами колебания отсутствуют, а полученные результаты очень близки к аналитическому решению.

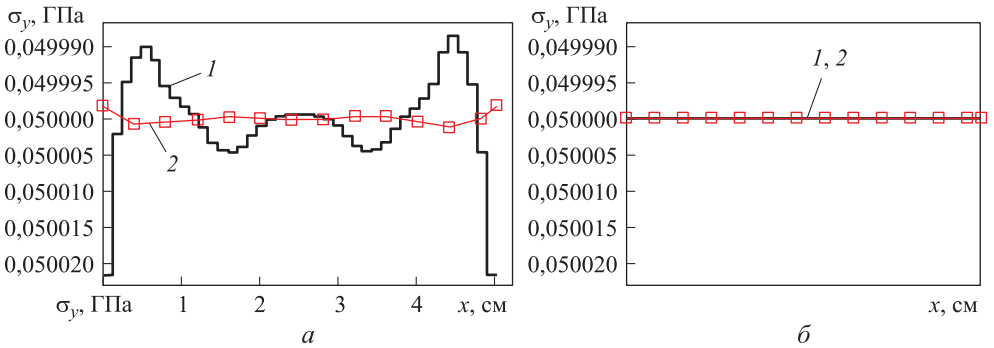


Рис. 8. Зависимость вертикальной компоненты напряжений от координаты x , полученная методами контакт точка–поверхность (а), контакт поверхность–поверхность с сегментами (б):

1, 2 — распределения соответствующей величины вдоль границы контакта для первого и второго тел

Для сравнения численного решения с известным аналитическим рассмотрим задачу Герца (рис. 9, рис. 10). Параметры задачи приведены ниже:

R , см	ν	E , ГПа	p , МПа
60	0,23	7000	100

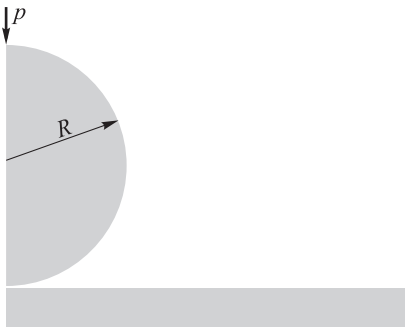


Рис. 9. Схема системы цилиндр–полуплоскость

Твердый шар радиусом R под влиянием силы p вдавливаются в упругое полупространство на глубину d , при этом образуется область контакта с полушириной

$$a = \sqrt{Rd}. \tag{4}$$

Тогда силу можно рассчитать по формуле

$$p = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}, \text{ причем } \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2},$$

где E_1, E_2 — модули упругости обоих тел; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона.

Для рассматриваемой задачи аналитическая полуширина контакта будет определяться по формуле (4) с учетом того, что

$$d = \left(\frac{3p}{4E^* R^{1/2}} \right)^{2/3}; \quad E^* = \frac{1}{\frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}} = \frac{1}{2 \frac{1-\nu}{E}}.$$

Подставив приведенные выше значения в указанные формулы, вычислим $E^* = 3695,45$ МПа, $d = 0,19$ см, а также по формуле (4) — $a = 1,06$ см.

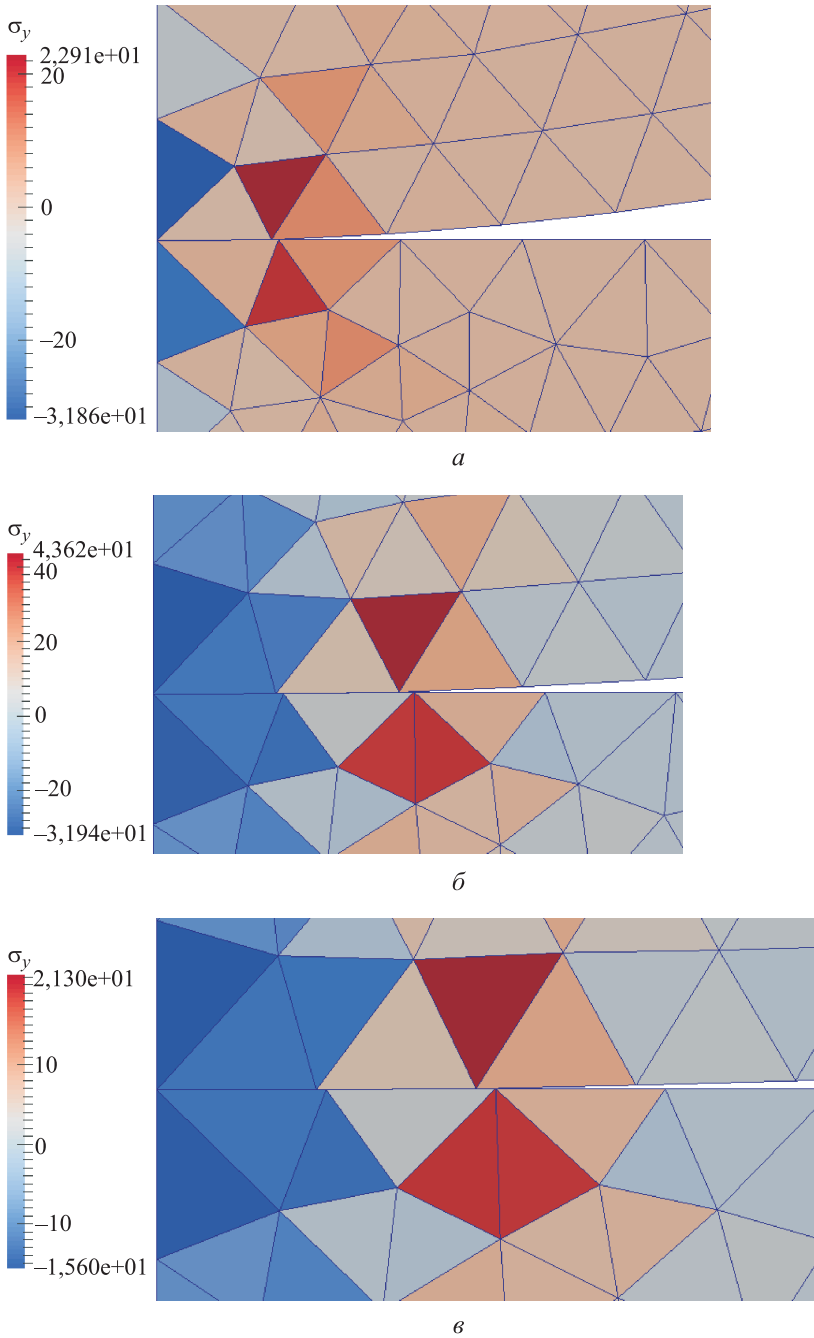


Рис. 10. Распределения вертикальной компоненты напряжений, полученные решением задачи Герца:

a — число элементов в цилиндре 4794, число элементов на плоскости 3736, полуширина контакта 2 см; *б* — число элементов в цилиндре 20 182, число элементов на плоскости 15 240, полуширина контакта 1,8 см; *в* — число элементов в цилиндре 79 458, число элементов на плоскости 58 472, полуширина контакта 1,1 см

В таком численном подходе можно утверждать о решении с точностью до длины грани конечного элемента. Здесь в контакт входят всего 2–3 конечных элемента. Однако следует отметить, что при уменьшении шага сетки решение стремится к аналитическому.

Заключение. Рассмотрен метод численного решения контактных задач с условием скольжения без трения на контактной поверхности. Для численного решения задачи использован МКЭ с билинейными функциями формы, для учета контактных условий выбран метод множителей Лагранжа с тремя вариантами реализации: контакт точка–поверхность; контакт поверхность–поверхность; контакт поверхность–поверхность с подсегментами.

Как показали результаты, метод множителей Лагранжа позволяет получать вполне удовлетворительные результаты. Метод контакт поверхность–поверхность более точно отражает физические свойства задач, чем метод контакт точка–поверхность. Однако при несовпадении сеток на границе контакта в обоих методах появляются колебания нормальных напряжений на границе контакта. В методе контакт точка–поверхность наблюдаются колебания с приблизительно неизменной амплитудой на всей границе контакта, а в методе контакт поверхность–поверхность ближе к центру симметрии задачи колебания незначительны, но в области особой точки колебания возрастают и их амплитуда больше, чем в методе контакт точка–поверхность. Метод контакт поверхность–поверхность с подсегментами позволяет сглаживать колебания, однако этот эффект проявляется на ограниченном круге задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.
3. Wriggers P. Computational contact mechanics. Springer, 2006. 521 p.
4. Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16. № 1. С. 13–18.
5. Богатырь С.М., Галанин М.П., Кузнецов В.И. и др. Математическое моделирование термоупругого контактного взаимодействия осесимметричных тел // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-4-667
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/667.html>
6. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.
7. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
9. Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2011. 44 с.
10. Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. № 89. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89>

11. *Taylor Robert L.* Finite element solution of contact problems from: 1974 to 2004.
URL: <http://faculty.ce.berkeley.edu/rlt/presentations/hughes.pdf> (дата обращения: 09.06.2015).

Галанин Михаил Павлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Глизнуцина Полина Владимировна — лаборант Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Лукин Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Родин Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. Сравнение вариантов метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 5. С. 35–48.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-35-48

COMPARISON OF LAGRANGE MULTIPLIER METHOD IMPLEMENTATION FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEMS

M.P. Galanin

P.V. Gliznutsina

V.V. Lukin

A.S. Rodin

galan@keldysh.ru

gliznutsinapv@gmail.com

vvlukin@gmail.com

rals@bk.ru

**Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation**

Abstract

We consider a two-dimensional contact problem involving two deformable solids. We used the finite element method based on quadrilateral bilinear elements to approximate our elastic problem. Three implementations of the Lagrange multiplier method account for contact conditions: node-to-surface, surface-to-surface and surface-to-surface employing sub-segments. We carried out test calculations, solving the Hertz problem and comparing our results to the analytical solution. A comparative analysis of these methods shows that the two surface-to-surface contact implementations are more accurate than the node-to-surface implementation. The surface-to-surface contact method that employs sub-segments makes it possible to smooth out stress field fluctuations, but this effect only works for a limited number of problems

Keywords

Deformable solid, contact problem, finite element method, Lagrange multiplier method

Received 22.02.2017
© BMSTU, 2017

REFERENCES

- [1] Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge University Press, 1985. 452 p.
- [2] Burago N.G., Kukudzhyanov V.N. A review of contact algorithms. *Mech. Solids*, 2005, vol. 40, no. 1, pp. 35–71.
- [3] Wriggers P. Computational contact mechanics. Springer, 2006. 521 p.
- [4] Tsvik L.B. Priority principle in conjugating and contact problems of deformable bodies. *Prikladnaya mekhanika*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 13–18 (in Russ.).
- [5] Bogatyr' S.M., Galanin M.P., Kuznetsov V.I., et al. Mathematical simulation of thermoelastic contact interaction of axisymmetric bodies. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 4 (in Russ.).
DOI: 10.18698/2308-6033-2013-4-667
Available at: <http://engjournal.ru/eng/catalog/mathmodel/hidden/667.html>
- [6] Korobeynikov S.N. Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 2000. 262 p.
- [7] Demidov S.P. Teoriya uprugosti [Elasticity theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 432 p.
- [8] Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite elements method in physics]. Moscow, Mir Publ., 1975. 543 p.
- [9] Sagdeeva Yu.A., Kopysov S.P., Novikov A.K. Vvedenie v metod konechnykh elementov [Introduction to finite elements method]. Izhevsk, Udmurt University Publ., 2011. 44 p.
- [10] Galanin M.P., Gliznushina P.V., Lukin V.V., Rodin A.S. Lagrange multiplier method implementations for two-dimensional contact problems. KIAM Preprint, 2015, no. 89, 27 p. (in Russ.). Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89>
- [11] Taylor Robert L. Finite element solution of contact problems from: 1974 to 2004. Available at: <http://faculty.ce.berkeley.edu/rlt/presentations/hughes.pdf> (accessed: 09.06.2015).

Galanin M.P. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Gliznushina P.V. — Laboratory Assistant, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Lukin V.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Rodin A.S. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Scientist, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploschad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Galanin M.P., Gliznushina P.V., Lukin V.V., Rodin A.S. Comparison of Lagrange Multiplier Method Implementation for Solving Two-Dimensional Contact Problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 5, pp. 35–48. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-35-48