УДК 512.643 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Н.Е. Зубов nezubov@bmstu.ru
Nikolay.Zubov@rsce.ru

В.Н. Рябченко

ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва», Королёв, Московская обл., Российская Федерация
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложен универсальный подход аналитического вычисления псевдообратной матрицы как для прямоугольной, так и для квадратной матриц. На основе этого подхода получена формула, связывающая операцию обращения невырожденной блочной матрицы, составленной из заданной матрицы и ее левого и правого делителей нуля максимального ранга, собственно с псевдообращением этой матрицы. Приведена теорема и ее доказательство. Исследованы основные свойства указанной формулы. Сформулированы следствия, имеющие практическое значение и упрощающие вычисление псевдообратной матрицы. Рассмотрены как полуортогональные матричные делители нуля, так и матрицы, не имеющие этого свойства. Приведены примеры иллюстративного характера, связанные с обращением символьной матрицы как квадратного, так и прямоугольного вида невысокого ранга

Ключевые слова

Обратная матрица, псевдообратная матрица, формулы вычисления псевдообратной матрицы

Поступила в редакцию 26.07.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-19-00004)

Введение. Псевдообратная матрица (псевдообратная матрица Мура — Пенроуза) $\boldsymbol{A}^+$ является хорошо известным обобщением фундаментального понятия обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$. Псевдообращение определено для любых матриц над множеством действительных $(\mathbb{R})$ и комплексных $(\mathbb{C})$ чисел [1, 2] и было независимо описано Э.Х. Муром [3] и Р. Пенроузом [4]. Псевдообратной матрицей $\boldsymbol{A}^+$ к заданной матрице $\boldsymbol{A}$ является матрица, удовлетворяющая условиям регулярности

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \;\; \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+ \tag{1}$$

и симметричности

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}, \;\; (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+. \tag{2}$$

Здесь символом «*» обозначена операция эрмитова сопряжения для комплексных матриц (в случае действительных матриц символ «*» заменяют операцией транспонирования «т»).

При решении практических задач аналитического синтеза законов управления многомерными динамическими объектами [6–12] возникают трудности вычисления псевдообратных матриц в символьном виде. Полученные формулы касаются вычисления псевдообратной квадратной матрицы и соответственно только частично решают указанную проблему, поскольку они не предназначены для псевдообращения прямоугольных матриц. В связи с этим *основная цель работы* — обеспечение возможности выполнения псевдообращения для произвольных символьных матриц неполного ранга. Конструктивные методы псевдообращения такого рода матриц авторам неизвестны.

В настоящей статье предложена формула, связывающая стандартную операцию обращения специально организованной блочной матрицы собственно с псевдообращением. С помощью этой формулы можно вычислять псевдообратную для произвольной матрицы, в том числе для прямоугольной матрицы неполного ранга, вырожденной квадратной матрицы вплоть до единичного ранга и, наконец, нулевой матрицы.

Формула псевдообращения на основе матричного обращения. Пусть в общем случае задана прямоугольная матрица неполного ранга. Для определенности будем полагать, что таковой является следующая матрица:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \;\; n > m, \;\; \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r < m. \tag{3}$$

Требуется определить псевдообратную матрицу $\boldsymbol{A}^{+}$ для матрицы (3). Сформируем блочную матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(n+m-r)\times(n+m-r)}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$, $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ — левый и правый делители нуля максимального ранга [12], т. е.

$$\boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \;\; \operatorname{rank} \boldsymbol{A}_L^{\perp} = n - r; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}, \;\; \operatorname{rank} \boldsymbol{A}_R^{\perp} = m - r. \tag{6}$$

Далее всегда полагается, что делители $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$ и $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ имеют максимальные ранги в смысле (3), (5), (6). При этом выполняется следующее тождество рангов [2]:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = n + m - r. \tag{7}$$

Если матрица (3) имеет полный ранг по строкам, то делитель $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$ имеет пустое множество строк, при этом для простоты запишем $\boldsymbol{A}_L^{\perp} = \boldsymbol{0}$.

Если матрица (3) имеет полный ранг по столбцам, то делитель $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ имеет пустое множество столбцов, как и в предыдущем случае, будем писать $\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}$.

Уточним некоторые свойства указанных выше делителей нуля, имеющие в этом случае принципиальное значение [2, 12].

Свойство 1. *Пусть выполняется* (5), *тогда* $\boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp+} = \boldsymbol{I}_{n-r}$. *Здесь и далее* $\boldsymbol{I}_l$ *— единичная матрица размером* $l \times l$.

Свойство 2. *Пусть выполняется* (6), *тогда* $\boldsymbol{A}_R^{\perp+}\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \boldsymbol{I}_{m-r}$.

Свойство 3. *Справедливы следующие тождества для левого делителя нуля:*

$$\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}_L^{\perp+}\boldsymbol{A}_L^{\perp}, \;\; \boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_L^{\perp+} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

Свойство 4. *Справедливы следующие тождества для правого делителя нуля:*

$$\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_R^{\perp+}, \;\; \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_R^{\perp+} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{A}_R^{\perp+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} = \boldsymbol{0}. \tag{9}$$

Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Пусть имеет место* (3), (5), (6), *тогда*

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp+} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp+} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{10}$$

◄ Доказательство теоремы основано на свойствах 1–4. При этом имеют место следующие цепочки преобразований:

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp+} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp+} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} + \boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_R^{\perp+} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_L^{\perp+} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp+} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_{n-m} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{array}\right); \tag{11}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp+} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp+} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} + \boldsymbol{A}_L^{\perp+}\boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_R^{\perp+} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp+}\boldsymbol{A}_R^{\perp} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_{n-r} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{array}\right). \tag{12}$$

Это доказывает справедливость теоремы. ►

Из теоремы вытекают вполне очевидные следствия.

Следствие 1. *Пусть* $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$, $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ *— полуортогональные матрицы, т. е.* $\boldsymbol{A}_R^{\perp+} = \boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{т}}$, $\boldsymbol{A}_L^{\perp+} = \boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{т}}$, *тогда*

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{т}} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{т}} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{13}$$

Следствие 2. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, *тогда*

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp+} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp+} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{14}$$

Следствие 3. *Пусть* $\alpha^{-1} = \sigma_{\max}(\boldsymbol{A})$ *— максимальное сингулярное число матрицы* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$, $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ *— полуортогональные матрицы, тогда*

$$\operatorname{cond}\left(\begin{array}{c|c} \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) \le \operatorname{cond}\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{15}$$

Здесь $\operatorname{cond}(\cdot)$ *— число обусловленности матрицы* [*1, 2*].

Следствие 4. *Пусть* $\boldsymbol{T}_L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\boldsymbol{T}_R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *— невырожденные матрицы, тогда*

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{T}_R \\ \hdashline \boldsymbol{T}_L\boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp+}\boldsymbol{T}_L^{-1} \\ \hdashline \boldsymbol{T}_R^{-1}\boldsymbol{A}_R^{\perp+} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{16}$$

Следствие 5. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— симметрическая матрица и* $\boldsymbol{A}^{\perp}$ *— ее двусторонний делитель нуля, тогда*

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\perp\mathrm{T}} \\ \hdashline \boldsymbol{A}^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}^{+} & \boldsymbol{A}^{\perp\mathrm{T}+} \\ \hdashline \boldsymbol{A}^{\perp+} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{17}$$

Следствие 6. *Пусть* $\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}$, *тогда*

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_L^{\perp} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp+} \end{array}\right). \tag{18}$$

Следствие 7. *Пусть* $\boldsymbol{A}_L^{\perp} = \boldsymbol{0}$, *тогда*

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{T}} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_R^{\perp+} \end{array}\right). \tag{19}$$

Следствие 8. *Пусть* $\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}_L^{\perp} = \boldsymbol{0}$, *тогда*

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}};\;\; \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}. \tag{20}$$

Следствие 9. *Пусть* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ *— нулевая матрица размером* $n \times m$, *тогда* $\boldsymbol{A}_L^{\perp} = \boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *— произвольные невырожденные матрицы и*

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \\ \hdashline \boldsymbol{L} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}^{-1} \\ \hdashline \boldsymbol{R}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{array}\right). \tag{21}$$

Введенное ранее условие (3) не ограничивает общность полученного результата, и в качестве матрицы $\boldsymbol{A}$ может быть выбрана любая матрица, заданная над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Примеры. Начнем с простейшего примера.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — диагональная вырожденная матрица,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Ее псевдообратная матрица очевидна:

$$\boldsymbol{A}^{+} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Получаем (23), используя формулу (10), точнее, формулу (17), поскольку (22) — симметрическая матрица.

В таком случае двусторонний полуортогональный делитель нуля

$$\boldsymbol{A}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

поэтому

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\perp\mathrm{т}} \\ \hline \boldsymbol{A}^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+} & \boldsymbol{A}^{\perp\mathrm{т}} \\ \hline \boldsymbol{A}^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right), \tag{25}$$

что и требовалось получить.

Пример 2. Рассмотрим квадратную матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ a & b & b & a \\ c & d & d & c \\ c & d & d & c \end{pmatrix}, \quad \{a, b, c, d\} \in \mathbb{Q}, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2. \tag{26}$$

Левый и правый делители нуля матрицы (26) имеют вид

$$\boldsymbol{A}_L^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Составим матрицу (4) с использованием (26) и (27), в результате получим

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cc} a & a & c & c & 0 & -1 \\ b & b & d & d & -1 & 0 \\ b & b & d & d & 1 & 0 \\ a & a & c & c & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{28}$$

Обращение матрицы (28) дает

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{т}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp +} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp +} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cc} \beta d & -\beta c & -\beta c & \beta d & -1/2 & 0 \\ \beta d & -\beta c & -\beta c & \beta d & 1/2 & 0 \\ -\beta b & \beta a & \beta a & -\beta b & 0 & -1/2 \\ -\beta b & \beta a & \beta a & -\beta b & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{29}$$

где $\beta = \dfrac{1}{4(ad - bc)}$.

Проверка условий регулярности (1) и симметричности (2) для (26) и $\boldsymbol{A}^+$ из (29) подтверждает правильность вычисления псевдообратной матрицы.

Пример 3. Изменим матрицу (26), преобразовав ее в прямоугольную матрицу, например,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & a \\ c & d & c \\ c & d & c \end{pmatrix}, \quad \{a, b, c, d\} \in \mathbb{Q}, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2. \tag{30}$$

Согласно сравнению матриц (26) и (30), в исходной матрице был удален третий столбец.

Левые делители нуля у матриц (26) и (30) совпадают, а правый делитель нуля (30) имеет вид

$$\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Вновь составим матрицу (4), используя матрицу (30), $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$ из (27) и $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ (31). Получим блочную матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a & a & c & c & -1 \\ b & b & d & d & 0 \\ a & a & c & c & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right), \tag{32}$$

обращение которой дает искомый результат

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp +} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp +} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \beta d & -\beta c & \beta d & -1/2 & 0 \\ \beta d & -\beta c & \beta d & 1/2 & 0 \\ -\beta b & \beta a & -\beta b & 0 & -1/2 \\ -\beta b & \beta a & -\beta b & 0 & 1/2 \\ \hline -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{33}$$

Как и выше, проверка условий (уравнений) регулярности (1) и симметричности (2) для матрицы (30) и $\boldsymbol{A}^+$ из (33) превращает эти уравнения в тождества, что и требовалось показать.

Пример 4. Преобразуем делители нуля $\boldsymbol{A}_L^{\perp}$ из (27) и $\boldsymbol{A}_R^{\perp}$ (31), например, следующим образом:

$$\boldsymbol{A}_L^{\perp} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{21} & -\alpha_{22} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{A}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Здесь предполагается, что $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0, \ \gamma \neq 0$.

Учитывая (34) и (35), вместо (32) запишем матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_R^{\perp} \\ \hline \boldsymbol{A}_L^{\perp} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a & a & c & c & -\gamma \\ b & b & d & d & 0 \\ a & a & c & c & \gamma \\ \hline -\alpha_{11} & \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{12} & 0 \\ -\alpha_{21} & \alpha_{21} & -\alpha_{22} & \alpha_{22} & 0 \end{array}\right). \tag{36}$$

Обращение (36) дает

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}^{+\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_L^{\perp +} \\ \hline \boldsymbol{A}_R^{\perp +} & \boldsymbol{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \beta d & -\beta c & \beta d & -\alpha_{22}(2\Delta)^{-1} & \alpha_{12}(2\Delta)^{-1} \\ \beta d & -\beta c & \beta d & \alpha_{22}(2\Delta)^{-1} & -\alpha_{12}(2\Delta)^{-1} \\ -\beta b & \beta a & -\beta b & \alpha_{21}(2\Delta)^{-1} & -\alpha_{11}(2\Delta)^{-1} \\ -\beta b & \beta a & -\beta b & -\alpha_{21}(2\Delta)^{-1} & -\alpha_{11}(2\Delta)^{-1} \\ \hline -(2\gamma)^{-1} & 0 & (2\gamma)^{-1} & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{37}$$

что согласуется со следствием 4.

Заключение. В работе предложена формула, связывающая стандартную операцию обращения блочной матрицы, составленной из заданной матрицы и ее левого и правого делителей нуля максимального ранга, собственно с псевдообращением этой матрицы. Проведены исследования основных свойств полученной формулы. Представлены примеры.

Основное преимущество приведенной формулы получения псевдообратной матрицы заключается в использовании хорошо разработанных численных методов и методов компьютерной алгебры (символьных) для определения нуль-пространств и связанных с ними матричных делителей нуля, в том числе ортогональных, полуортогональных и с другими свойствами. На основе этого появляется возможность осуществлять псевдообращение с помощью хорошо обусловленных матриц, что определяет преимущества указанного подхода относительно известных численных методов. Такой подход также может быть использован в целях получения псевдообратных символьных матриц при решении матричных аналитических задач (поиска приближенных решений по методу наименьших квадратов в аналитическом виде, аналитического синтеза законов управления многомерными динамическими системами, построения символьных алгоритмов идентификации [12] и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

2. *Bernstein D.S.* Matrix mathematics. Princeton University Press, 2009. 1184 p.

3. *Moore E.H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. 1920. Vol. 26. P. 394–395.

4. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1995. Vol. 51. No. 3. P. 406–413.

5. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.

6. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Размещение полюсов в больших динамических системах с многими входами и выходами // ДАН. 2011. Т. 439. № 4. С. 464–466.

7. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 1. С. 92–108.

8. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 118–132.

9. *Управление* по выходу спектром движения космического аппарата / Н.Е. Зубов, Е.Ю. Зыбин, Е.А. Микрин и др. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 4. С. 111–122. DOI: 10.7868/S0002338814040179

10. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Управление по выходу продольным движением летательного аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 5. С. 164–174.

11. *Оценка* угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, А.С. Олейник, В.Н. Рябченко, Д.Е. Ефанов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 5. С. 3–15.

12. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательными аппаратами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 666 с.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, Московская обл., 141070, Королёв, ул. Ленина, д. 4а), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, Московская обл., 141070, Королёв, ул. Ленина, д. 4а), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зубов Н.Е., Рябченко В.Н. О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 16–25.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25

ON CALCULATING A PSEUDOINVERSE MATRIX. GENERAL CASE

N.E. Zubov nezubov@bmstu.ru
Nikolay.Zubov@rsce.ru

V.N. Ryabchenko

S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russian Federation
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study proposes a universal approach for analytical calculation of a pseudoinverse matrix for both rectangular, and square matrices. According to this approach, we obtained a formula that, in fact, relates the operation of inversion of a nondegenerate block matrix composed of a given matrix and its left and right zero divisors of maximal rank, to a pseudoinversion of this matrix. The paper gives the theorem and its proof. Within the research we investigate the main properties of the chosen formula and formulate the corollaries that have practical value and simplify the computation of the pseudoinverse matrix. Moreover, we consider semiorthogonal matrix zero divisors and matrices that do not have this property. The examples given are illustrative and are related to inversion of matrix of both square, and rectangular types of low rank

Keywords

Inverse matrix, pseudoinverse matrix, pseudoinverse matrix calculation formulae

Received 26.07.2017

The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-19-00004)

REFERENCES

[1] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matritsy i vychisleniya [Matrixes and calculations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p.

[2] Bernstein D.S. Matrix mathematics. Princeton University Press, 2009. 1184 p.

[3] Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1920, vol. 26, pp. 394–395.

[4] Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 406–413.

[5] Albert A. Regression and the Moore — Penrose pseudoinverse. New York, London, Academic Press, 1972. 179 p.

[6] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement in large dynamical systems with many inputs and outputs. *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, iss. 1, pp. 591–593.
DOI: 10.1134/S0005117907120041

[7] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Synthesis of decoupling laws for attitude stabilization of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, iss. 1, pp. 80–96. DOI: 10.1134/S1064230711060189

[8] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, iss. 2, pp. 279–292.
DOI: 10.1134/S1064230713020135

[9] Zubov N.E., Zybin E.Yu., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Proletarskii A.V., Ryabchenko V.N. Output control of a spacecraft motion spectrum. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, iss. 4, pp. 576–586. DOI: 10.1134/S1064230714040170

[10] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Output control of the longitudinal motion of a flying vehicle. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, iss. 5, pp. 825–837. DOI: 10.1134/S1064230715040140

[11] Zubov N.E., Mikrin E.A., Oleynik A.S., Ryabchenko V.N., Efanov D.E. The spacecraft angular velocity estimation in the orbital stabilization mode by the results of the local vertical sensor measurements. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 5, pp. 3–15 (in Russ.).

[12] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatelnymi apparatami [Matrix methods in theory and practice of aircraft automatic control]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2016. 666 p.

Zubov N.E. — Dr. Sc. (Eng.), Deputy Director for Science, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Ryabchenko V.N. — Dr. Sc. (Eng.), Leading Researcher, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zubov N.E., Ryabchenko V.N. On Calculating a Pseudoinverse Matrix. General Case. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 1, pp. 16–25 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-16-25