УДК 517.552 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-26-37

# НЕРАВЕНСТВО ЛУЗИНА ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ В $\mathbb{C}^n$

**А.С. Роткевич** rotkevichas@gmail.com

**Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация**

**Аннотация**

Получено обобщение интегрального неравенства площади для функций, определяемых в дополнение к комплексным эллипсоидам в $\mathbb{C}^n$ сопряженными интегралами Коши — Лере — Фантаппье. Эти оценки могут быть применены для характеризации гладкости голоморфных функций с помощью псевдоаналитических продолжений и являются частью исследования, посвященного описанию пространств голоморфных функций через полиномиальные приближения. Методы исследования можно рассматривать как модельный пример применения векторнозначной $T1$-теоремы для доказательства нелинейных неравенств

**Ключевые слова**

*Неравенство Лузина, интеграл Коши — Лере — Фантаппье, T1-теорема*

Поступила в редакцию 25.09.2017


*Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-41-00010)*

**Введение.** Рассмотрим область Радона $G \subset \mathbb{C}$ и для $z \in \partial G$ сектор $S(z) = \left\{ \xi \in G : \operatorname{dist}(\xi, \partial G) \geq \frac{1}{2}|\xi - z| \right\}$. Известно [1, 2], что для функции $f$, голоморфной в области $G$,

$$\|I_f\|_{L^p(\partial G)} \leq c(p, G)\|f\|_{L^p(\partial G)}, \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

для некоторой постоянной $c(p, G)$, где $I_f$ — интеграл Лузина,

$$I_f(z) = \left( \int\limits_{S(z)} |f'(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) \right)^{1/2},$$

$d\mu$ — мера Лебега в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Обобщения неравенства (1) для областей в $\mathbb{C}^n$ рассмотрены в работах [3–5]. Обобщение этого неравенства, в котором вместо голоморфной функции $f$ рассмотрена функция, определенная ядром интегрального оператора Коши — Лере — Фантаппье в дополнение к строго выпуклой области в $\mathbb{C}^n$, предложено в работе [6]. *Цель настоящей работы* — распространить результаты работы [6] на комплексные эллипсоиды. В дальнейших исследованиях полученный результат планируется применять к задачам описания гладкости голоморфных функций через псевдоаналитические продолжения и полиномиальные приближения (см. [7]). Геометрия эллипсоида подробно изучена в работах [8–10], и здесь будут активно использоваться полученные в них результаты.

**Основные обозначения.** Для краткой записи неравенств введем символы $\lesssim, \asymp,$ и будем утверждать, что $f \lesssim g$, если $f \le cg$ для некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от основных аргументов величин $f$ и $g$. Также $f \asymp g$, если $c^{-1} g \le f \le cg$ для некоторой постоянной $c > 1$.

Рассмотрим комплексный эллипсоид

$$B_t^p = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) = |z_1|^{2p_1} + \ldots + |z_n|^{2p_n} - 1 < t \right\},$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$. Полагаем $B^p = B_0^p$.

Примем $v(z,\xi) = \left\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z \right\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial\rho(\xi)}{\partial\xi_j}\left( z_j - \xi_j \right)$, тогда $\left|v(z,\xi)\right| \asymp \left|v(\xi,z)\right|$ и функция $d(\xi,z) = \left|v(z,\xi)\right| + \left|v(\xi,z)\right|$ определяет на $\partial B^p$ квазиметрику. Шар в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $B = B^{(1,\ldots,1)}$, соответствующую квазиметрику — через $d_B$.

Теорема Лере позволяет выписать воспроизводящую формулу для голоморфных в эллипсоиде $B^p$ функций в явном виде, точнее для функции $f \in H^1(B^p)$:

$$f(z) = Kf(z) = \int\limits_{\partial B^p} f(\xi) K(\xi, z) dS(\xi), \quad z \in \partial B^p. \tag{2}$$

Здесь $K(\xi,z) = \left\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z \right\rangle^{-n}$; $dS(\xi) = (2\pi i)^{-n} \partial\rho(\xi) \wedge (\bar{\partial}\partial\rho(\xi))^{n-1}$ — форма, определяющая меру Леви — Лере, причем $dS \sim w d\sigma$, где $w(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{n} p_j^2 |\xi_j|^{2(p_j - 1)}$; $d\sigma$ — индуцированная мера Лебега на границе $\partial B_t^p$. Далее полагаем, что пространства Лебега $L^p$ на $\partial B^p$ определены относительно меры $dS$ и определяем $L^p(\partial B^p) = L^p(\partial B^p, dS)$.

Квазишары $B(z,\delta) = B(z,\delta,t) = \{w \in \partial B_t^p : d(w,z) < \delta\}$ в квазиметрике $d$ имеют меру, сравнимую с $\delta^n$, $|B(z,\delta)| = dS_t(B(z,\delta)) \asymp \delta^n$ равномерно по $t \in [0,\varepsilon]$ для любого значения $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\{\partial B_t^p, d, dS_t\}$ является пространством однородного типа.

Для $z \in \mathbb{C}^n$ определим проекцию $\hat{z}$ на эллипсоид $\partial B^p$ формулой $z_j = (1 + \rho(z))^{1/(2p_j)} \hat{z}_j$. В работе Т. Ханссона [9, леммы 2, 3] приведены следующие оценки:

$$\left|v(w,z)\right| \asymp \rho(w) + \left|v(\hat{w},z)\right|,\ w \in (B^p)^c,\ z \in \partial B^p; \tag{3}$$

$$\left|v(w,z)\right| \asymp \left|v(\hat{w},\hat{z})\right|,\ w,z \in (B^p)^c. \tag{4}$$

Кроме того, для $\gamma = \dfrac{1}{2\max(p_j)}$ и некоторой постоянной $C > 0$

$$\left|\nu(w,\xi) - \nu(z,\xi) + \nu(z,w)\right| \lesssim d(w,z)^{\gamma} d(z,w)^{1-\gamma} + d(w,\xi)^{1-\gamma} d(z,w)^{\gamma}, \quad z,\xi,w \in \partial B^p;$$
$$\left|\nu(w,\xi) - \nu(z,\xi)\right| + \left|\nu(\xi,w) - \nu(\xi,z)\right| \lesssim \varepsilon^{\gamma} d(\xi,z_0)^{1-\gamma}, \quad z,\xi,w \in \partial B^p,$$
$$z,w \in B(z_0,\varepsilon), \quad \xi \in \partial B^p \setminus B(z_0, C\varepsilon).$$

Пусть $X, Y$ — нормированные пространства. Пространство ограниченных линейных операторов из $X$ в $Y$ обозначим через $\mathcal{L}(X,Y)$, пространства Шварца на $\partial B^p$ — через $\mathcal{S}(\partial B^p)$, $\mathcal{S}(\partial B^p, X)$, пространство, сопряженное к пространству Шварца $\mathcal{S}(\partial B^p, X)$, — через $\mathcal{S}'(\partial B^p, X) = \mathcal{L}(\mathcal{S}(\partial B^p), X)$. Более подробно это рассмотрено в работе [11].

**Внешние угловые области Корани.** Для точки $\xi \in \mathbb{C}^n$ определим точку $\hat{\xi}_t$ формулой $(\hat{\xi}_t)_j = (1 - \rho(\xi) + t)^{1/(2p_j)} \xi_j$. В этом случае, если $\xi \in \partial B^p$, то $\hat{\xi}_t \in \partial B_t^p$. Для $\xi \in \partial B^p$ примем

$$D_t(\xi,\eta) = \left\{ \tau \in \mathbb{C}^n \setminus B^p : \rho(\tau) = t,\ d(\tau, \hat{\xi}_t) < \eta t \right\}.$$

Определяем *внешнюю область Корани* как множество

$$D(\xi,\eta) = D(\xi,\eta,\varepsilon) = \bigcup_{0 \le t \le \varepsilon} D_t(\xi,\eta).$$

Отметим, что $\left|D_t(\xi,\eta)\right| \asymp t^n$, следовательно, для любой функции $F$, суммируемой в $D(\xi,\eta,\varepsilon)$,

$$\int\limits_{B_\varepsilon^p \setminus B^p} \left|F(z)\right| d\mu(z) \asymp \int\limits_{\partial B^p} dS(\xi) \int\limits_{D(\xi,\eta,\varepsilon)} \left|F(\tau)\right| \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau)^n}.$$

Кроме того, если $F(w) = \tilde{F}(\rho(w))$, то

$$\int\limits_{D(\xi,\eta,\varepsilon)} \left|F(\tau)\right| d\mu(\tau) \asymp \int\limits_0^{\varepsilon} \left|\tilde{F}(t)\right| t^n dt. \tag{5}$$

Уточним оценку (3) величины $\left|\nu(\tau,z)\right|$ для точек $\tau \in D(z,\eta,\varepsilon)$.

**Лемма 1.** *Пусть* $\varepsilon, \eta > 0$. *Тогда*

$$\left|\nu(\tau,w)\right| \asymp \rho(\tau) + d(z,w), \quad z,w \in \partial B^p,\ \tau \in D(z,\eta,\varepsilon).$$

◂ Предположим, что $\rho(\tau) = t$. Согласно оценке (4), $\left|\nu(\tau,\hat{z}_t)\right| \asymp \left|\nu(\hat{\tau},z)\right|$ и, согласно оценке (3),

$$\left|\nu(\tau,w)\right| \lesssim \left|\nu(\hat{\tau},w)\right| + t \lesssim \left|\nu(z,w)\right| + \left|\nu(\hat{\tau},z)\right| \lesssim t + \left|\nu(z,w)\right|.$$

Однако из гладкости функции $\nu(\tau,w)$ по $\tau, w \in \mathbb{C}^n$ получаем равномерную по $w \in \partial B^p$ оценку $\left|\nu(\hat{\tau},w) - \nu(\tau,w)\right| \lesssim \left|\tau - \hat{\tau}\right| \lesssim t$. Следовательно,

$$\rho(\tau)+|\nu(z,w)|\lesssim\rho(\tau)+|\nu(\hat\tau,z)|+|\nu(\hat\tau,w)|\lesssim\rho(\tau)+|\nu(\tau,\hat z_t)|+|\nu(\hat\tau,w)|\lesssim\rho(\tau)+|\nu(\tau,w)|,$$

что заканчивает доказательство. ►

Для дальнейших рассуждений понадобятся отображения областей Корани $D(\xi,\eta,\varepsilon)$ на некоторую универсальную область Корани $D_0$ для шара, и выберем покрытие $\{\Gamma_j\}_{j=1}^N$ множества $B^p_{2\varepsilon}\setminus B^p$ со следующими свойствами:

1) $\Gamma_j\bigcap\partial B^p\neq\varnothing$;

2) отображение $z\in\Gamma_j\to z^{(p)}=(z_1^{p_1},\dots,z_n^{p_n})$ голоморфно и инъективно;

3) на $\Gamma_j^p=\left\{z^{(p)}:z\in\Gamma_j\right\}$ можно задать голоморфную замену $A(w):\mathbb{C}^n\to$ $\to GL(n,\mathbb{C}),\ \ w\in\Gamma_j^p$ так, что $A(w)w=e_n=(0,\dots,0,1)$ и $\|A(w)-A(w')\|\lesssim|w-w'|$;

4) пусть $\varphi_j=A(w)z^{(p)}:\Gamma_j\times\Gamma_j\to\{1<|w|<1+2\varepsilon\}$ и $\Gamma_j^0(w)=A(w)\Gamma_j^{(p)}$. Обозначим обратное отображение через $\psi_j(w,\cdot)$. Можно полагать, что для некоторой постоянной $\eta_1>0$ отображение $\psi_j(w,\cdot)$ определено во внешней области Корани для шара

$$D_0=D_0(\eta_1,\varepsilon)=\left\{\tau\in\mathbb{C}^n:1<|\tau|<1+\varepsilon,\,d_B\left(\tau,|\tau|e_n\right)\le\eta_1\left(|\tau|-1\right)\right\}$$

и для некоторой постоянной $c>0$ при $0<\eta<c\eta_1$

$$\psi_j(w,D_0(\eta,\varepsilon))\subset\Gamma_j\cap D(w,c\eta,c\varepsilon);\ \ \varphi_j(w,D(w,\eta,\varepsilon))\subset D_0(c\eta,c\varepsilon).$$

Далее предположим, что выбрано разбиение единицы для покрытия $\left\{\Gamma_j\right\}_{j=1}^N$

$$\chi_j\in C^\infty(\Gamma_j),\,0\le\chi_j\le1,\,\operatorname{supp}\chi_j\subset\Gamma_j,\ \ \sum_{j=1}^N\chi_j(z)=1,\,z\in\partial B^p.$$

**Основная теорема.** Пусть $\eta,\varepsilon>0$, для функции $g\in L^1(\partial B^p)$ и $l\in\mathbb{N}_0$ определим функцию

$$I_l(g,z)=\left(\int\limits_{D(z,\eta,\varepsilon)}\left|\int\limits_{\partial B^p}\frac{g(w)dS(w)}{\nu(\tau,w)^{n+l}}\right|^2d\nu_l(\tau)\right)^{1/2},\tag{6}$$

где $dS(w)=(2\pi i)^{-n}\partial\rho(w)\wedge\left(\bar\partial\partial\rho(w)\right)^{n-1}$ (см. (2)) и $d\nu_l(\tau)=\dfrac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau)^{n-2l-1}}$.

**Теорема 1.** *Пусть* $g\in L^p(\partial B^p)$, $1<p<\infty$, $l\in\mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\partial B^p}I_l(g,z)^p dS(z)\le c(p,l)\int\limits_{\partial B^p}|g(z)|^p\,dS(z)$$

*для некоторой постоянной* $c(p,l)>0$.

Отметим, что при $n=1$ интеграл (6) является голоморфной функцией, и результат теоремы следует из статьи Е.М. Дынькина [2].

Основная идея доказательства этой теоремы заключается в том, что оператор $I_l$ можно рассмотреть как сумму операторов со значениями в некотором модельном пространстве $L^2$.

Зафиксируем параметры $0<\varepsilon, \eta, \eta_1<\varepsilon_0$, обозначим через $J_j(z,\tau)$ комплексный дифференциал отображения $\psi_j$, тогда

$$I_l(g,z)^2=\sum_{j=1}^{N}\chi_j(z)\int\limits_{D(z,\eta,\varepsilon)}\left|\int\limits_{\partial B^p}\frac{g(w)J_j(z,\tau)dS(w)}{v(\psi_j(z,\tau),w)^{n+l}}\right|^2\frac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Re}(\tau_n)^{n-2l+1}}\lesssim$$
$$\lesssim\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{D_0}\left|\int\limits_{\partial B^p}\frac{g(w)\chi_j^{1/2}(z)J_j(z,\tau)dS(w)}{v(\psi_j(z,\tau),w)^{n+l}}\right|^2\frac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Re}(\tau_n)^{n-2l+1}}. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$K_j(z,w)(\tau)=\frac{\chi_j^{1/2}(z)J_j(z,\tau)}{v(\psi_j(z,\tau),w)^{n+l}}$$

как отображение $\partial B^p\times\partial B^p\to\mathcal{L}(\mathbb{C},L^2(D_0,d\nu_l))$ такое, что его значениями являются операторы домножения $\zeta\in\mathbb{C}\to\zeta K_j(\xi,w)\in L^2(D_0,d\nu_l)$, где $d\nu_l(\tau)=$ $=\dfrac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Im}(\tau_n)^{n-2l+1}}$ мера на множестве $D_0$. Далее полагаем, что числа $j$, $l$ зафиксированы. Норму функции $F$ в пространстве $L^2(D_0,d\nu_l)$ обозначим через $\|F\|$.

Покажем, что интегральный оператор $T_j$, определенный ядром $K_j$, непрерывно отображает пространство $L^p(\partial B^p)$ в пространство $L^p\left(\partial B^p,L^2(D_0,d\nu_l)\right)$. Для этого адаптируем $T1$-теорему для интегральных операторов с операторнозначными ядрами [11] для рассматриваемого контекста.

**Определение 1.** *Функцию* $f\in C_0^\infty(\partial B^p)$ *называем bump-функцией, ассоциированной с квазишаром* $B(w_0,r)$, *если* $\operatorname{supp} f\subset B(w_0,r)$, $|f|\le 1$, *и*

$$|f(\xi)-f(z)|\le\frac{d(\xi,z)^\gamma}{r^\gamma},\quad \xi,z\in\partial B^p.$$

*Множество bump-функций, ассоциированных с квазишаром* $B(w_0,r)$, *обозначим* $A(\gamma,w_0,r)$.

**Теорема 2.** *Предположим, что ядро* $K:\partial B^p\times\partial B^p\to\mathcal{L}(\mathbb{C},L^2(D_0,d\nu_l))$ *удовлетворяет оценкам*

$$\|K(z,w)\|\lesssim\frac{1}{d(z,w)^n}; \tag{8}$$

$$\|K(z,w)-K(\xi,w)\|\lesssim\frac{d(z,\xi)^\gamma}{d(z,w)^{n+\gamma}},\quad d(z,w)>Cd(z,\xi); \tag{9}$$

$$\|K(z,w)-K(z,w')\|\lesssim\frac{d(w,w')^\gamma}{d(z,w)^{n+\gamma}},\quad d(z,w)>Cd(w,w') \tag{10}$$

*для* $\xi,z,w\in\partial B^p$ *и некоторых постоянных* $C>0$.

*Предположим, что оператор* $T:\mathcal{S}(\partial B^p)\to\mathcal{S}'(\partial B^p,\ \mathcal{L}(\mathbb{C},L^2(D_0,d\nu_l)))$ *с ядром* $K$ *удовлетворяет следующим условиям:*

*1)* $T1,\ T'1 \in \mathrm{BMO}(\partial B^p,\ L^2(D_0,\ d\nu_l))$, *где* $T'$ *формально сопряженный к* $T$ *оператор;*

*2) оператор* $T$ *является слабо ограниченным, т. е. для произвольных витр-функций* $f, g \in A(\gamma, w_0, r)$

$$\left\|(g,\ Tf)\right\| \le Cr^{-n},$$

*где* $(g,\ Tf) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, d\nu_l))$ *— действие* $Tf \in \mathcal{S}'(\partial B^p, \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, d\nu_l)))$ *на функцию* $g \in \mathcal{S}(\partial B^p)$. *Тогда* $T \in \mathcal{L}\left(L^p(\partial B^p),\ L^p(\partial B^p,\ L^2(D_0,\ d\nu_l))\right)$ *при* $p \in (1, \infty)$.

Подробные определения, связанные с этой теоремой, и ее доказательство приведены в работе [11]. Отметим, что пространство $L^p(\partial B^p, L^2(D_0, d\nu_l))$ определяется относительно меры Лере — Леви $dS$.

В следующие четырех леммах докажем, что ядра $K_j$ и соответствующие им операторы $T_j$ удовлетворяют условиям $T1$-теоремы. В частности, в леммах 2, 3 докажем, что $T1, T'1 \in L^\infty(\partial B^p, L^2(D_0, d\nu_l)) \subset \mathrm{BMO}(\partial B^p, L^2(D_0, d\nu_l))$.

**Лемма 2.** *Ядро* $K_j$ *удовлетворяет оценкам (7)–(9).*

◄ Пусть $D(z) = D(z, c\eta)$. Согласно лемме 1, $|v(\tau, w)| \asymp \rho(\tau) + d(z, w)$, $z, w \in \partial B^p$, $\tau \in D(z)$. Следуя правилу (5), получаем

$$\left\|K_j(z, w)\right\|^2 \lesssim \int\limits_{D(z)} \frac{d\nu_l(\tau)}{(\rho(\tau) + d(z, w))^{2n+2l}} \lesssim \int\limits_0^\infty \frac{t^{2l-1}dt}{(t + d(z, w))^{2n+2l}} \lesssim \frac{1}{d(z, w)^{2n}}.$$

Для доказательства свойства (9) введем обозначение $\tau_z = \psi_j(z, \tau)$. Тогда $(A(z)\tau_k) = (\tau_z)_k^{p_k}$, $k = 1, \ldots, n$, отсюда для некоторой постоянной $C > 0$ (см. [9]) при $d(z, w) > Cd(z, \xi)$

$$\left|v(\tau_z, w) - v(\tau_\xi, w)\right| \lesssim \left|v(\tau_\xi, w)\right|^{1-\gamma} \left|v(\xi, z)\right|^\gamma.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{v(\tau_z, w)^m} - \frac{1}{v(\tau_\xi, w)^m}\right| = \frac{\left|v(\tau_z, w) - v(\tau_\xi, w)\right| \sum\limits_{j=0}^{m-1} \left|v(\tau_z, w)\right|^j \left|v(\tau_\xi, w)\right|^{m-1-j}}{v(\tau_z, w)^m v(\tau_\xi, w)^m} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{\left|v(z, \xi)\right|^\gamma \left|v(\tau_\xi, w)\right|^{1-\gamma}}{\left|v(\tau_\xi, w)\right|^{m+1}} \lesssim \frac{\left|v(z, \xi)\right|^\gamma}{\left|v(\tau_\xi, w)\right|^{m+\gamma}}.$$

Окончательно

$$\left\|K_j(z, w) - K_j(\xi, w)\right\|^2 \lesssim \int\limits_{D(z)} \frac{\left|\chi_j(z)^{1/2} - \chi_j(\xi)^{1/2}\right|^2}{\left|v(\tau, w)^{2n+2l}\right|} \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau)^{n-2l+1}} +$$

$$+\ \chi_j(\xi) \int\limits_{D_0} \frac{\left|v(z, \xi)\right|^{2\gamma}}{\left|v(\tau_z, w)\right|^{2n+2l+2\gamma}} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau|^{n-2l+1}} \lesssim \frac{\left|v(z, \xi)\right|^{2\gamma}}{\left|v(z, w)\right|^{2n+2\gamma}} \lesssim \frac{\left|v(z, \xi)\right|^{2\gamma}}{\left|v(z, w)\right|^{2n+2\gamma}} \lesssim \frac{d(z, \xi)^{2\gamma}}{d(z, w)^{2n+2\gamma}}.$$

Свойство (10) доказывается аналогично. ►

**Лемма 3.** *Пусть* $\tau_z = \psi_j(z,\tau)$, *тогда*

$$\left\| \int_{\partial B^p} \frac{dS(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w\right\rangle^{n+l}} \right\| \lesssim 1,$$

*следовательно,* $\left\|T_j(1)\right\| \lesssim 1.$

◄ Функция $v(\tau_z, w) = \left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w\right\rangle$ голоморфна в $B^p$ относительно $w$, отсюда

$$T_j(1)(\tau) = \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z,\tau) dS(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w\right\rangle^{n+l}} = \int_{B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z,\tau) dV(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w\right\rangle^{n+l}},$$

где $dV(w) = (\overline{\partial}\partial\rho(\xi))^n$.

Аналогично лемме 1

$$\left|\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w\right\rangle\right| \asymp \rho(\tau) + |\rho(w)| + \left|\left\langle \partial\rho(z),\ z - \hat{w}\right\rangle\right|.$$

Следовательно,

$$\left|T_j(1)(\tau)\right| \lesssim \int_{B^p} \frac{d\mu(z)}{\left|v(\tau_z, w)\right|^{n+l}} \lesssim \int_0^T dt \int_{\partial B^p{}_t} \frac{d\sigma_t}{(t + \rho(\tau) + v(z,\hat{w}))^{n+l}} \lesssim$$
$$\lesssim \int_0^T dt \int_0^\infty \frac{v^{n-1} dv}{(t+\rho(\tau)+v)^{n+l}} \lesssim \int_0^T \frac{dt}{(t+\rho(\tau))^l} \lesssim \rho(\tau)^{1-l} \ln\left(1 + \frac{1}{\rho(\tau)}\right)$$

и

$$\int_{D_0} \left|T_j(1)(\tau)\right|^2 d\nu_l(\tau) \lesssim \int_{D_0} \rho(\tau)^{2-2l} \ln^2\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Re}(\tau_n)}\right) d\nu_l(\tau) \lesssim \int_0^\varepsilon \ln^2\left(1 + \frac{1}{s}\right) s ds \lesssim 1.$$

Это заканчивает доказательство теоремы. ►

**Лемма 4.** $\left\|T_{j'}(1)\right\| \lesssim 1.$

◄ Рассмотрим

$$\overline{T_j'(1)}(w)(\tau) = \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z,\tau) dS(z)}{\left|v(\tau_z, w)\right|^{n+l}} = \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z,\tau)(dS(z) - dS(\tau_z))}{\left|v(\tau_z, w)\right|^{n+l}} +$$
$$+ \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z,\tau) dS(\tau_z)}{\left|v(\tau_z, w)\right|^{n+l}} = L_1 + L_2.$$

Отметим, что $\left|dS(z) - dS(\tau_z)\right| \lesssim \rho(\tau_z) d\sigma(z)$ и

$$\left|L_1\right| \lesssim \int_{\partial B^p} \frac{\rho(\tau_z) d\sigma(z)}{\left|v(\tau_z, w)\right|^{n+l}} \lesssim \int_0^\infty \frac{\rho(\tau_z) v^{n-1} dv}{(\rho(\tau_z) + v)^{n+l}} \lesssim \frac{1}{\mathrm{Re}(\tau_n)^{l-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_{D_0} \left|L_1\right|^2 d\nu_l(\tau) \lesssim \int_{D_0} \frac{1}{\rho(\tau_z)^{2l-2}} \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau_z)^{n-2l+1}} \lesssim \int_0^\varepsilon \frac{t^n dt}{t^{n-1}} \lesssim 1. \tag{11}$$

Чтобы оценить $L_2$, напомним, что $d_\xi \dfrac{dS(\xi)}{\left\langle \partial\rho(\xi),\, \xi - z\right\rangle^n} = 0,\ z \in \partial B^p,\ \xi \in \mathbb{C}^n \setminus B^p,$ отсюда

$$d_\xi \frac{dS(\xi)}{\nu(\xi,z)^{n+l}} = \frac{\left(\bar\partial\partial\rho(\xi)\right)^n}{\nu(\xi,z)^{n+l}} - (n+l)\frac{\left(\bar\partial_\xi\left(\nu(\xi,z)\right)\wedge\bar\partial\partial\rho(\xi)\right)^{n-1}}{\nu(\xi,z)^{n+l}} = -\frac{l}{n}\frac{dV(\xi)}{\nu(\xi,z)^{n+l}}.$$

По теореме Стокса

$$L_2 = \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z,\tau) dS(\tau_z)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}} = \int_{B^p_{\varepsilon_1}\setminus B^p} \frac{\bar\partial_z\left(\chi_j(z)^{1/2}J_j(z,\tau)\right)\wedge dS(\tau_z)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}} -$$

$$-\frac{l}{n}\int_{B^p_{\varepsilon_1}\setminus B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2}J_j(z,\tau)dV(\tau_z)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}}.$$

Аналогично лемме 1 оцениваем $\left|\nu(\tau_z,w)\right| \asymp \rho(\tau)+\rho(z)+\left|\nu(\hat z,w)\right|$, где $\hat z = \mathrm{pr}_{\partial B^p}(z)$, откуда $\left\|L_2\right\| \lesssim 1$ аналогично лемме 3. Объединяя это с оценкой (11), получаем $\left\|T_j(1)\right\| \lesssim 1$. ►

**Лемма 5.** *Оператор* $T_j$ *слабо ограничен.*

◄ Пусть $f, g \in A\left(\frac{1}{2}, w_0, r\right)$, введем обозначение $\tau_z = \psi_j(z,\tau)$, тогда

$$\left\|(g,\, T_j f)\right\|^2 \lesssim \int_{D_0} d\nu_l(\tau)\left(\int_{B(w_0,r)}\left|g(z)\right|dS(z)\left|\int_{B(w_0,r)}\frac{f(w)dS(w)}{\left\langle\partial\rho(\tau_z),\, \tau_z - w\right\rangle^{n+l}}\right|\right)^2.$$

Обозначим $t := \inf\limits_{w\in\partial B^p}\left|\nu(\tau_z,w)\right|$ и определим множество

$$W(z,\tau,r) := \left\{w\in\partial B^p : \left|\nu(\tau_z,w)\right| < t+r\right\}.$$

Отметим, что $\operatorname{supp} f \subset B(w_0,r) \subset W(z,\tau,cr) \subset B(z,c^2 r)$ для некоторой постоянной $c>0$, отсюда

$$\left|\int_{B(w_0,r)}\frac{f(w)dS(w)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}}\right| = \left|\int_{W(z,\tau,cr)}\frac{f(w)dS(w)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}}\right| \lesssim \int_{W(z,\tau,cr)}\frac{\left|f(z)-f(w)\right|}{\left|\nu(\tau_z,w)\right|^{n+l}}dS(w) +$$

$$+\left|f(z)\right|\left(\left|\int_{\partial B^p\setminus W(z,\tau,cr)}\frac{dS(w)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}}\right| + \left|\int_{\partial B^p}\frac{dS(w)}{\nu(\tau_z,w)^{n+l}}\right|\right) =$$

$$= L_1(z,\tau) + \left|f(z)\right|\left(L_2(z,\tau)+L_3(z,\tau)\right).$$

Из оценки $\left|f(z)-f(w)\right| \le \dfrac{d(w,z)^\gamma}{r^\gamma}$ следует, что

$$L_1(z,\tau) \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \int\limits_{B(z,c^2r)} \frac{\nu(w,z)^\gamma\, dS(w)}{(\rho(\tau)+\nu(w,z))^{n+l}} \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \int\limits_0^{c^2r} \frac{t^{n+\gamma-1}dt}{(\rho(\tau)+t)^{n+l}} \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \int\limits_0^{c^2r} \frac{dt}{(\rho(\tau)+t)^{l-\gamma+1}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{r^\gamma}\left( \frac{1}{\rho(\tau)^{l-\gamma}} - \frac{1}{(\rho(\tau)+r)^{l-\gamma}} \right) = \frac{1}{r^\gamma} \frac{(\rho(\tau)+r)^{l-\gamma} - \rho(\tau)^{l-\gamma}}{\rho(\tau)^{l-\gamma}(\rho(\tau)+r)^{l-\gamma}}.$$

Таким образом,

$$L_1(z,\tau) \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \frac{r^{l-\gamma}}{\rho(\tau)^{l-\gamma}(\rho(\tau)+r)^{l-\gamma}},\ \rho(\tau) \le r;$$

$$L_1(z,\tau) \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \frac{r\rho(\tau)^{l-\gamma-1}}{\rho(\tau)^{l-\gamma}(\rho(\tau)+r)^{l-\gamma}},\ \rho(\tau) \le r.$$

Используя оценку (5) и замену $s=\rho(\tau)$, оценим $L^2(D_0, d\nu_l)$ норму функции $L_1(z,\tau)$,

$$\int\limits_{D_0(\tau)} L_1(z,\tau)^2 d\nu_l(\tau) \lesssim 1 + \frac{1}{r^{2\gamma}} \int\limits_0^r \frac{1}{s^{2(l-\gamma)}(s+r)^{2l-2\gamma}} \frac{s^n ds}{s^{n-2l+1}} +$$

$$+ \frac{r^2}{r^{2\gamma}} \int\limits_r^\infty \frac{s^{n+2} ds}{s^{2(l-\gamma)}(s+r)^{2l-2\gamma} s^{n-2l+1}} \lesssim 1. \qquad (12)$$

Чтобы оценить второе слагаемое $L_2$, применим к дифференциальной форме $\dfrac{dS(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle^{n+l}}$ теорему Стокса в области

$$W_0 = \left\{ w \in B^p : \left| \left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle \right| > t + cr \right\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial B^p \setminus W(z,\tau,cr)} \frac{dS(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle^{n+l}} = \int\limits_{W_0} \frac{dV(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle^{n+l}} -$$

$$- \int\limits_{\substack{w\in B^p \\ |\nu(\tau_z,w)|=t+cr}} \frac{dS(w)}{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle^{n+l}} = L_4 - \frac{1}{(t+cr)^{2n+2l}} \int\limits_{\substack{w\in B^p \\ |\nu(\tau_z,w)|=t+cr}} \overline{\left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle}^{n+l} dS(w).$$

Из доказательства леммы 3 следует, что

$$\|L_4\| \le \int\limits_{W_0} \frac{dV(w)}{\left| \left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle \right|^{n+l}} \le \int\limits_{B^p} \frac{dV(w)}{\left| \left\langle \partial\rho(\tau_z),\ \tau_z - w \right\rangle \right|^{n+l}} \lesssim 1.$$

Применяя теорему Стокса к области $\left\{ w \in B^p : |\nu(\tau_z, w)| < t + cr \right\}$, получаем

$$L_5 := \int\limits_{\substack{w\in B^p \\ |\nu(\tau_z,w)|=t+cr}} \overline{\nu(\tau_z,w)}^{n+l} dS(w) = - \int\limits_{\substack{w\in \partial B^p \\ |\nu(\tau_z,w)|<t+cr}} \overline{\nu(\tau_z,w)}^{n+l} dS(w)\ +$$

$$+\int\limits_{\substack{w\in B^p\\ |v(\tau_z,w)|<t+cr}} \overline{\partial}_w\left(\overline{v(\tau_z,w)}^{n+l}\right)\wedge dS(w)+\int\limits_{\substack{w\in B^p\\ |v(\tau_z,w)|<t+cr}} \overline{v(\tau_z,w)}^{n+l}dV(w).$$

Поскольку

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{w}_j}\left(\overline{\langle\partial\rho(\tau_z),\ \tau_z-w\rangle}^{n+l}\right)\wedge dS(w)\right|\lesssim\left|\langle\partial\rho(\tau_z),\ \tau_z-w\rangle\right|^{n+l-1},$$

$$|L_5|\lesssim\int\limits_t^{t+cr}(s^{n+l}s^{n-1}+s^{n+l}s^n+s^{n+l-1}s^n)ds\lesssim\int\limits_t^{t+cr}s^{2n+l-1}ds\lesssim r(t+r)^{2n+l-1}.$$

Отметим, что и

$$\int\limits_{D_0}L_5(z,\tau)^2d\nu_l(\tau)\lesssim\int\limits_{D_0}\left(\frac{r(\mathrm{Re}(\tau_n)+r)^{2n+l-1}}{(\mathrm{Re}(\tau_n)+r)^{2n+2l}}\right)^2d\nu_l(\tau)\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_0^\infty\frac{r^2}{(t+r)^{2l+2}}\frac{t^ndt}{t^{n-2l+1}}=r^2\int\limits_0^\infty\frac{t^{2l-1}}{(t+r)^{2l+2}}\frac{t^ndt}{t^{n-2l+1}}\lesssim r^2\int\limits_0^\infty\frac{dt}{(r+t)^3}\lesssim 1 \qquad (13)$$

Объединяя оценки (12), (13), лемму 3 и условие $|f(z)|\le 1,\ z\in\partial B^p$, получаем

$$\|(g,\ T_jf)\|^2\le\int\limits_{D_0}d\nu_l(\tau)\left(\int\limits_{B(w_0,r)}|g(z)|\left(L_1(z,\tau)+|f(z)|(L_2(z,\tau)+L_3(z,\tau))\right)dS(z)\right)^2\lesssim$$

$$\lesssim\|g\|^2_{L^1(\partial B^p)}\sup_{z\in\partial B^p}\int\limits_{D_0}\left(L_1(z,\tau)^2+L_2(z,\tau)^2+L_3(\tau,z)^2\right)d\nu_l(\tau)\lesssim\|g\|^2_{L^1(\partial B^p)}\lesssim|B(w_0,r)|^2.$$

Эта оценка влечет слабую ограниченность оператора $T$ и завершает доказательство теоремы. ►

**Заключение.** *Доказательство теоремы 2.* Поскольку операторы $T_j$ с ядрами теоремы 1 $K_j$ удовлетворяют условиям $T1$-теоремы, $T_j\in\mathcal{L}(L^p(\partial B^p),$ $L^p(\partial B^p),\ L^2(D_0,d\nu_l))$ и

$$\|I_l(g)\|^p_{L^p(\partial B^p)}=\sum_{j=1}^N\int\limits_{\partial B^p}\|T_jg(z)\|^p\,dS(z)=$$

$$=\sum_{j=1}^N\int\limits_{\partial B^p}dS(z)\left(\int\limits_{D_0}\left|\int\limits_{\partial B^p}\frac{g(w)\chi_j^{1/2}(z)J_j(z,\tau)dS(w)}{\langle\partial\rho(\psi_j(z,\tau)),\ \psi_j(z,\tau)-w\rangle^{n+1}}\right|^2\frac{d\mu(\tau)}{\mathrm{Re}(\tau_n)^{n-1}}\right)^p\lesssim\|g\|^p_{L^p(\partial B^p)}.$$

Следовательно, из разложения (7) $\int\limits_{\partial B^p}I_l(g,z)^p\ dS(z)\lesssim\int\limits_{\partial B^p}|g(z)|^p\ dS(z)$, что доказывает теорему 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Stein E.M.* On the functions of Littlewood — Paley, Lusin, Marcinkiewicz // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 88. P. 430–466.

2. *Дынькин Е.М.* Оценки аналитических функций в жордановых областях // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 73. С. 70–90.

3. *Ahern P., Bruna J.* Maximal and area integral characterization of Hardy — Sobolev spaces in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ // Rev. Mat. Iberoamericana. 1988. Vol. 4. No. 1. P. 123–153.

4. *Krantz S., Li S.Y.* Area integral characterizations of functions in Hardy spaces on domains in $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables. 1997. Vol. 32. No. 4. P. 373–399.

5. *Sandrine G.* Complex tangential characterizations of Hardy — Sobolev spaces of holomorphic functions // Rev. Mat. Iberoamericana. 1993. Vol. 9. No. 2. P. 201–255.

6. *Rotkevich A.S.* External area integral inequality for the Cauchy — Leray — Fantappié integral. URL: https://arxiv.org/abs/1707.08181 (дата обращения: 15.09.2017).

7. *Роткевич А.С.* Конструктивное описание классов Бесова в выпуклых областях в $\mathbb{C}^d$ // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 2013. Т. 416. С. 136–174.

8. *Bonami A., Lohoue N.* Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations $L^p$ // Comp. Math. 1982. Vol. 46. No. 2. P. 159–226.

9. *Hansson T.* On Hardy spaces in complex ellipsoids // Ann. Inst. Fourier. 1999. Vol. 49. No. 5. P. 1477–1501. DOI: 10.5802/aif.1727

10. *Широков Н.А.* Равномерные полиномиальные приближения в выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$ // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 2006. Т. 333. С. 98–112.

11. *Hytönen T., Weis L.* A *T*1 theorem for integral transformations with operator-valued kernel // J. Reine Angew. Math. 2006. Vol. 599. P. 155–200.

12. *Leray J.* Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy. III) // Bull. Soc. Math. Fr. 1959. Vol. 87. P. 81–180. DOI: 10.24033/bsmf.1515

**Роткевич Александр Сергеевич** — доцент кафедры математического анализа Санкт-Петербургского государственного университета (Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Роткевич А.С. Неравенство Лузина для дополнения комплексных эллипсоидов в $\mathbb{C}^n$ // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 26–37.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-26-37

## LUZIN INEQUALITY FOR THE COMPLEMENT OF COMPLEX ELLIPSOIDS IN $\mathbb{C}^n$

**A.S. Rotkevich** rotkevichas@gmail.com

**Saint Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation**

**Abstract**

We consider a generalization of Luzin area integral inequality for functions defined by Cauchy — Leray — Fantappie adjoint integral in the complement of complex ellipsoids in $\mathbb{C}^n$. In this work we obtain estimates that are useful for characterization of the smoothness of holomorphic functions by pseudoanalytical continuations. These

**Keywords**

*Luzin inequality, Cauchy — Leray — Fantappie integral, T1-theorem*

results are a technical part of the investigation devoted to the description of spaces of holomorphic functions by polynomial approximations. Our methods could be considered as a model example of the application of vector-valued $T1$-theorem to the proof of nonlinear inequality

Received 25.09.2017


*The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 14-41-00010)*

## REFERENCES

[1] Stein E.M. On the functions of Littlewood — Paley, Lusin, Marcinkiewicz. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1958, vol. 88, pp. 430–466.

[2] Dyn'kin E.M. Estimates of analytic functions in Jordan domain. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 34, iss. 6, pp. 2060–2073. DOI: 10.1007/BF01741580

[3] Ahern P., Bruna J. Maximal and area integral characterization of Hardy — Sobolev spaces in the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 123–153.

[4] Krantz S., Li S.Y. Area integral characterizations of functions in Hardy spaces on domains in $\mathbb{C}^n$. *Complex Variables*, 1997, vol. 32, no. 4, pp. 373–399.

[5] Sandrine G. Complex tangential characterizations of Hardy — Sobolev spaces of holomorphic functions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1993, vol. 9, no. 2, pp. 201–255.

[6] Rotkevich A.S. External area integral inequality for the Cauchy — Leray — Fantappié integral. Available at: https://arxiv.org/abs/1707.08181 (accessed: 15.09.2017).

[7] Rotkevich A.S. Constructive description of the Besov classes in convex domains in $\mathbb{C}^d$. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 202, iss. 4, pp. 573–600.
DOI: 10.1007/s10958-014-2064-z

[8] Bonami A., Lohoue N. Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations. *Comp. Math.*, 1982, vol. 46, no. 2, pp. 159–226.

[9] Hansson T. On Hardy spaces in complex ellipsoids. *Ann. Inst. Fourier*, 1999, vol. 49, no. 5, pp. 1477–1501. DOI: 10.5802/aif.1727

[10] Shirokov N.A. Uniform polynomial approximations on convex domains in $\mathbb{C}^n$. *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 141, iss. 5, pp. 1564–1572. DOI: 10.1007/s10958-007-0064-y

[11] Hytönen T., Weis L. A $T1$ theorem for integral transformations with operator-valued kernel. *J. Reine Angew. Math.*, 2006, vol. 599, pp. 155–200.

[12] Leray J. Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy. III). *Bull. Soc. Math. Fr.*, 1959, vol. 87, pp. 81–180. DOI: 10.24033/bsmf.1515

**Rotkevich A.S.** — Assoc. Professor of Mathematical Analysis Department, Saint Petersburg University (Universitetskaya naberezhnaya 7/9, St. Petersburg, 199034 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Rotkevich A.S. Luzin Inequality for the Complement of Complex Ellipsoids in $\mathbb{C}^n$. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 1, pp. 26–37 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-26-37