УДК 533.951.2 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-97-103

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ В КАНАЛЕ ПЛАЗМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВЫРОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Н.М. Гордеева[1] nmgordeeva@bmstu.ru
А.В. Латышев[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
[2] Московский государственный областной университет, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Сформулирована постановка граничной задачи о колебаниях электронной плазмы в слое проводящей среды. Рассмотрена плазма с произвольной степенью вырождения электронного газа, внешнее электрическое поле перпендикулярно границе среды. Использованы зеркальные граничные условия отражения электронов от границы слоя. При постановке задачи применены кинетическое уравнение Власова — Больцмана с интегралом столкновений типа БГК (Бхатнагар, Гросс и Крук) и уравнение Максвелла для электрического поля. Решающим шагом является сведение граничной задачи к одномерной и односкоростной. Для этого использован метод последовательных приближений, линеаризация уравнений относительно абсолютного распределения электронов Ферми — Дирака и закон сохранения числа частиц. Описанная постановка задачи позволяет получить аналитическое решение для функции распределения и для электрического поля

Ключевые слова

Колебания плазмы, плазма с произвольной степенью вырождения, плазма в слое, структура функции распределения, структура электрического поля

Поступила в редакцию 27.03.2017

Задача о потенциалах в электродинамике с использованием формализма монополей Дирака изучена в работах [1–4]. Равновесные флуктуации температуры молекулярного и фотонного газов в сферической полости исследованы в работе [5]. Задача о квантовании поверхностных возмущений невязкой жидкости в однородном внешнем электрическом поле рассмотрена в работе [6].

Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей, а также задача генерирования продольного тока поперечным электромагнитным полем изучены в работе [7]. Задача о колебаниях плазмы (см., например, [10–12]) для канала была аналитически решена в работе [13] для случая вырожденной плазмы. В настоящей работе результаты, взятые из работы [13], обобщены на случай плазмы с произвольной конечной температурой, т. е. в случае произвольной степени вырождения электронного газа.

Пусть невырожденная плазма Ферми — Дирака занимает слой (канал) $|x|< L,$ заполненный проводящей средой. Будем полагать внешнее поле достаточно слабым, чтобы было применимо линейное приближение. Используем τ-модельное уравнение Власова — Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial r}+e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=\nu\left(f_{eq}-f\right) \tag{1}$$

и уравнение Максвелла для электрического поля

$$\operatorname{div}\,\mathbf{E}=4\pi\rho,\quad \rho=e\int\left(f-f_0\right)d\Omega_F,\;\; d\Omega_F=\frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{2}$$

Здесь f_{eq} — локально-равновесная функция распределения Ферми — Дирака,

$$f_{eq}(x,v,t)=\left\{1+\exp\frac{\mathcal{E}-\mu(x,t)}{kT}\right\}^{-1};$$

f_0 — невозмущенная (абсолютная) функция распределения Ферми — Дирака при $\mu=\text{const}$,

$$f_0(v,\mu)=\left\{1+\exp\frac{\mathcal{E}-\mu}{kT}\right\}^{-1};$$

$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ — импульс электрона; $\mathcal{E}=mv^2/2$ — кинетическая энергия электрона; μ, $\mu(x,t)$ — невозмущенный и возмущенный химические потенциалы; e, m — заряд и масса электрона; ρ — плотность заряда; $\hbar$ — постоянная Планка; ν — эффективная частота рассеяния электронов; s — спин частиц, для электрона $s=1/2$; k — постоянная Больцмана; T — температура плазмы, которая полагается постоянной в этой задаче; $\mathbf{E}(x,t)$, $\mathbf{H}(x,t)$ — электрическое и магнитное поля внутри плазмы.

Внешнее электрическое поле вне плазмы перпендикулярно границе плазмы и меняется по закону $\mathbf{E}_{ext}(t)=E_0e^{-i\omega t}(1,0,0)$. Соответствующее самосогласованное электрическое поле внутри плазмы обозначим через $\mathbf{E}(x,t)=E(x)e^{-i\omega t}(1,0,0)$. При выбранной конфигурации внешнего электрического поля магнитное поле не входит в уравнение, так как $\mathbf{H}=\mathbf{0}$.

Учитывая, что внешнее поле имеет одну x-компоненту, а приведенный химический потенциал $\alpha(x,t)=\dfrac{\mu(x,t)}{kT}$ можно записать как $\alpha(x,t)=\alpha+\delta\alpha(x)e^{-i\omega t}$, где $\alpha=\text{const}$; $\delta\alpha(x,t)=\delta\alpha(x)e^{-i\omega t}$ — возмущение приведенного химического потенциала — малый параметр, а также проведя линеаризацию уравнений (1) и (2) относительно абсолютной функции распределения Ферми — Дирака f_0 и линеаризуя функцию распределения электронов:

$$f(x,P_x,t)=f_0(P,\alpha)+g(P,\alpha)h(x,P_x)e^{-i\omega t}, \tag{3}$$

где $h(x,P_x)$ — новая неизвестная функция, получаем уравнения в виде

$$-i\omega h(x,P_x)+v_TP_x\frac{\partial h}{\partial x}+\nu h(x,P_x)=eE(x)\frac{2P_x}{p_T}+\nu\delta\alpha(x); \tag{4}$$

$$\frac{dE(x)}{dx}=\frac{8\pi e p_T^3}{(2\pi\hbar)^3}\int h(x,P_x)\,g(P,\alpha)\,d^3P. \qquad (5)$$

Величина $\delta\alpha(x)$ определяется из закона сохранения числа частиц:

$$\delta\alpha(x)=\frac{1}{2s_0(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(P_x,\alpha)h(x,P_x)dP_x,$$

где

$$s_0(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{dP}{1+e^{P^2-\alpha}}=\int\limits_0^{\infty} f_0(P,\alpha)dP.$$

Полагая, что $E(x)=E_0e(x)$, преобразуем систему уравнений (4) и (5) к следующему виду:

$$v_TP_x\frac{\partial h}{\partial x}+(\nu-i\omega)\,h(x,P_x)=\frac{2eE_0}{p_T}P_x\,e(x)+\frac{\nu}{2s_0(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0\,(P_x,\alpha)\,h(x,P_x)\,dP_x; \qquad (6)$$

$$E_0\frac{de(x)}{dx}=\frac{8\pi^2 e p_T^3}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(P_x,\alpha)h(x,P_x)dP_x. \qquad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) перейдем к безразмерным величинам и функциям

$$x_1=\frac{x}{\lambda},\ \ \lambda=\tau v_T,\ \ P_x=\mu,\ \ h_1(x_1,\mu)=\frac{\nu p_T}{2eE_0}h(x,\mu),$$

где λ — средняя длина свободного пробега электронов. В результате получаем систему уравнений

$$\mu\frac{\partial h_1}{\partial x_1}+w_0h_1(x_1,\mu)=\mu e(x_1)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\mu',\alpha)\,h_1(x_1,\mu')\,d\mu'; \qquad (8)$$

$$\frac{de(x_1)}{dx_1}=\varkappa^2(\alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\mu',\alpha)h_1(x_1,\mu')d\mu'. \qquad (9)$$

Здесь

$$\varkappa^2(\alpha)=\frac{32\pi^2e^2p_T^3s_0(\alpha)}{(2\pi\hbar)^3m\nu^2}.$$

В (8) и (9) введена новая функция $k(\mu,\alpha)=f_0(\mu,\alpha)/(2s_0(\alpha))$, обладающая свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\mu,\alpha)\,d\mu=1$, кроме того, $w_0=1-i\omega/\nu=1-i\Omega/\varepsilon$, где $\Omega=\omega/\omega_p$; $\varepsilon=\nu/\omega_p$, ω_p — плазменная (ленгмюровская) частота, $\omega_p=\sqrt{4\pi e^2N/m}$. Здесь N — числовая плотность (концентрация) электронов в равновесном состоянии.

Согласно определению числовой плотности,

$$N=\int f_0(P,\alpha)\,d\Omega_F=\frac{2p_T^3}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{d^3P}{1+e^{P^2-\alpha}}=\frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3}s_2(\alpha),$$

где

$$s_2(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{P^2 dP}{1+e^{P^2-\alpha}}=\int\limits_0^\infty P^2 f_0(P,\alpha)\,dP.$$

Следовательно, числовая плотность частиц плазмы и тепловое волновое число $k_T = mv_T/\hbar$ связаны соотношением $N=(s_2(\alpha)/\pi^2)\,k_T^3$, кроме того,

$$\varkappa^2(\alpha)=\frac{\omega_p^2}{\nu^2}\frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)}=\frac{\Omega_p^2}{r(\alpha)}=\frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)}.$$

Здесь

$$r(\alpha)=\frac{s_2(\alpha)}{s_0(\alpha)},\qquad \varepsilon=\frac{\nu}{\omega_p}=\frac{1}{\tau\omega_p}=\frac{1}{\Omega_p},\qquad \Omega_p=\omega_p\tau.$$

С помощью приведенных выражений уравнение (9) запишем в виде

$$\frac{de(x_1)}{dx_1}=\frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\mu',\alpha)\,h_1(x_1,\mu')d\mu'. \qquad (10)$$

В случае зеркального отражения электронов от границы плазмы для функции распределения электронов запишем следующие граничные условия на границе слоя размером $2L$:

$$f(\pm L, v_x, v_y, v_z, t)=f(\pm L, -v_x, v_y, v_z, t),\ \ -\infty < v_x < +\infty.$$

Отсюда для функции $h_1(x_1,\mu)$ получаем зеркальные граничные условия:

$$h_1(l,\mu)=h_1(l,-\mu),\qquad h_1(-l,\mu)=h_1(-l,-\mu),\qquad \mu>0. \qquad (11)$$

Здесь $l=L/\lambda$ — толщина слоя в единицах свободного пробега электронов.

Для электрического поля граничное условие имеет вид

$$e(l)=1,\ \ e(-l)=1. \qquad (12)$$

Таким образом, граничная задача о колебаниях плазмы в слое проводящей среды сформулирована полностью и состоит в нахождении такого решения уравнений (8) и (10), которое удовлетворяет граничным условиям (11) и (12).

Решение этой задачи не может быть приведено здесь полностью вследствие краткости изложения, но результаты представлены ниже.

Структура электрического поля в общем случае:

$$e(x_1)=\frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty}+\frac{2\Lambda_1\eta_0}{\Lambda'(\eta_0)\left(\eta_1^2-\eta_0^2\right)}\frac{\left(w_0x_1/\eta_0\right)}{\left(w_0 l/\eta_0\right)}+\frac{\Lambda_1}{w_0\eta_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta^2 k(\eta,\alpha)}{\Lambda^+(\eta)\Lambda^-(\eta)}\frac{\left(w_0x_1/\eta\right)}{\left(w_0 l/\eta\right)}d\eta. \qquad (13)$$

Функция распределения электронов имеет вид

$$h_1(x_1,\mu)=\frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty}\frac{\mu}{w_0}+\frac{\Lambda_1\eta_0}{w_0\left(\eta_1^2-\eta_0^2\right)\Lambda'(\eta_0)\left(w_0 l/\eta_0\right)}\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{w_0x_1}{\eta_0}\right)\frac{\mu\eta_0-\eta_1^2}{\eta_0-\mu}+\exp\left(\frac{w_0x_1}{\eta_0}\right)\frac{\mu\eta_0+\eta_1^2}{\eta_0+\mu}\right]+$$

$$+\frac{\Lambda_1}{w_0^2\eta_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(-w_0x_1/\eta\right)F_1(\eta,\mu)\,\eta^2k(\eta,\alpha)}{\Lambda^+(\eta)\Lambda^-(\eta)\left(w_0l/\eta\right)}d\eta. \qquad (14)$$

Заключение. Показано, что в случае достаточно слабого внешнего электрического поля, направленного перпендикулярно границе среды, с использованием зеркальных граничных условий решение задачи о колебаниях в канале плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа можно получить в аналитическом виде, представленном формулами (13) и (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиев И.Н., Меликянц Д.Г.* О потенциалах в электродинамике Лондонов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 2. С. 42–50.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-42-50

2. *Алиев И.Н., Копылов И.С.* Использование формализма монополей Дирака в некоторых задачах магнетизма // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 6. С. 25–39. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-25-39

3. *Алиев И.Н., Самедова З.А.* Поведение электрического диполя в пульсирующем поле // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. Т. 20. № 8. С. 59–65.

4. *Алиев И.Н., Меликянц Д.Г.* О теоремах Пойнтинга и Абрагама в электродинамике сверхпроводников Лондонов // Вестник МГОУ. Серия: Физика–математика. 2015. № 4. С. 83–91. DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-83-91

5. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* Равновесные флуктуации температуры молекулярного и фотонного газов в сферической микрополости // Известия высших учебных заведений. Физика. 2012. Т. 55. № 7. С. 9–18.

6. *Юрченко С.О., Алиев И.Н.* О квантовании поверхностных возмущений невязкой жидкости в однородном внешнем электрическом поле // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 3. С. 84–89.

7. *Алиев И.Н., Юрченко С.О.* Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 156–166.

8. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Генерирование продольного тока поперечным электромагнитным полем в классической и квантовой плазме // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 9. С. 778–787. DOI: 10.7868/S0367292115090073

9. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Нелинейный продольный ток в максвелловской плазме, возникающий под действием поперечной электромагнитной волны // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 126–133.

10. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 3. С. 291–318. DOI: 10.3367/UFNr.0093.196711f.0444

11. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы. Т. 2. М.: Наука, 1969. С. 7–25.

12. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о поведении вырожденной электронной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. VII-I. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. М.: Янус-К, 2008. С. 159–177.

13. *Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А.* Точное решение задачи о поведении электронной плазмы в слое металла в переменном электрическом поле // Теор. и матем. физика. 1992. Т. 90. № 2. С. 179–189.

Гордеева Надежда Михайловна — старший преподаватель кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Латышев Анатолий Васильевич (1948–2017) — д-р физ.-мат. наук, профессор, работал в Московском государственном областном университете.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гордеева Н.М., Латышев А.В. Задача о колебаниях в канале плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 97–103. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-97-103

THE PROBLEM OF OSCILLATIONS IN A PLASMA CHANNEL WITH AN ARBITRARY DEGREE OF DEGENERACY OF THE ELECTRON GAS

N.M. Gordeeva[1] nmgordeeva@bmstu.ru
A.V. Latyshev[2]

[1] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**
[2] **Moscow State Regional University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper states the boundary problem of oscillations of electron plasma in a layer of the conducting medium. Within the research we considered plasma with an arbitrary degree of degeneracy of the electron gas, the external electric field being perpendicular to the boundary of the medium. We applied mirror boundary conditions for boundary layer reflection of electrons. When setting the problem, we used the Vlasov — Boltzmann kinetic equation with the BGK collision operator, i. e. Bhatnagar — Gross — Krook operator, and the Maxwell equation for the electric field. Reducing the boundary problem to the one-dimensional and one-velocity problem was crucial. For this purpose, we used the method of successive approximations, as well as linearization of the equations with respect to the absolute distribution of Fermi — Dirac electrons and the law of conservation of the number of particles. The statement of the problem described above makes it possible to obtain an analytical solution for the distribution function and for the electric field

Keywords

Plasma oscillations, plasma with an arbitrary degree of degeneracy, plasma in the layer, distribution function structure, electric field structure

Received 27.03.2017

REFERENCES

[1] Aliev I.N., Melikyants D.G. On potentials in Londons' electrodynamics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 2, pp. 42–50 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-42-50

[2] Aliev I.N., Kopylov I.S. Use of Dirac monopoles formalism in some magnetism problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 6, pp. 25–39 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-25-39

[3] Aliev I.N., Samedova Z.A. The behavior of an electric dipole in a pulsating field. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 2015, vol. 20, no. 8, pp. 59–65 (in Russ.).

[4] Aliev I.N., Melikyants D.G. Poynting and Abraham theorems in the electrodynamics of London superconductors. *Vestnik MGOU. Ser.: Fizika–matematika* [Bulletin MSRU. Series: Physics and Mathematics], 2015, no. 4, pp. 83–91 (in Russ.). DOI: 10.18384/2310-7251-2015-4-83-91

[5] Morozov A.N., Skripkin A.V. Equilibrium temperature fluctuations of molecular and photonic gases in a spherical microcavity. *Russian Physics Journal*, 2012, vol. 55, iss. 7, pp. 736–747. DOI: 10.1007/s11182-012-9875-5

[6] Yurchenko S.O., Aliev I.N. On quantization of surface perturbations of ideal fluid in uniform external electric field. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 3, pp. 84–89 (in Russ.).

[7] Aliev I.N., Yurchenko S.O. Evolution of perturbations of a charged interface between immiscible inviscid fluids in the interelectrode gap. *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, iss. 5, pp. 817–826. DOI: 10.1134/S0015462810050145

[8] Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Generation of longitudinal current by a transverse electromagnetic field in classical and quantum plasmas. *Plasma Physics Reports*, 2015, vol. 41, iss. 9, pp. 715–724. DOI: 10.1134/S1063780X1509007X

[9] Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Nonlinear longitudinal current in the Maxwellian plasma generated under the action of a transverse electromagnetic wave. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, iss. 6, pp. 820–827. DOI: 10.1134/S0015462815060125

[10] Vlasov A.A. The vibrational properties of an electron gas. *Sov. Phys. Usp.*, 1968, no. 10, pp. 721–733. DOI: 10.1070/PU1968v010n06ABEH003709

[11] Landau L.D. O kolebaniyakh elektronnoy plazmy. T. 2 [On oscillations of electron plasma. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1969. Pp. 7–25.

[12] Latyshev A.V., Yushkanov A.A., Fortov V.E., ed. Analiticheskoe reshenie zadachi o povedenii vyrozhdennoy elektronnoy plazmy. Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy. T. VII-I. Matematicheskoe modelirovanie v nizkotemperaturnoy plazme [Analytical solution of the problem on the behavior of degenerate plasma. In: Encyclopedia of low-temperature plasma. Vol. VII-I. Mathematical simulation in low-temperature plasma]. Moscow, Yanus-K, 2008. Pp. 159–177.

[13] Latyshev A.V., Lesskis A.G., Yushkanov A.A. Exact solution to the behavior of the electron plasma in a metal layer in an alternating electric field. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 90, iss. 2, pp. 119–126. DOI: 10.1007/BF01028435

Gordeeva N.M. — Assist. Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Latyshev A.V. (1948–2017) — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor.

Please cite this article in English as:

Gordeeva N.M., Latyshev A.V. The Problem of Oscillations in a Plasma Channel with an Arbitrary Degree of Degeneracy of the Electron Gas. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 97–103 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-97-103