УДК 517.57 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-36-45

О Lip^m- И C^m-ОТРАЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ КАРАТЕОДОРИ В $\mathbb{R}^2$

П.В. Парамонов petr.paramonov@list.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Получен ряд точных необходимых и достаточных условий Lip^m- и C^m-непрерывности операторов гармонического отражения функций относительно границ простых областей Каратеодори в $\mathbb{R}^2$. Приведем упрощенную формулировку основного результата. Для произвольной вещественной функции f, гармонической в жордановой области $D\subset\mathbb{R}^2$ и непрерывной в ее замыкании $\overline{D}$, пусть $R(f)$ — решение задачи Дирихле в области $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ с граничной функцией $f|_{\partial\Omega}$, где $\partial\Omega$ — граница области Ω. Функцию $R(f)$ назовем гармоническим отражением функции f относительно границы $\partial D=\partial\Omega$ области D, а оператор $R: f\to R(f)$ — оператором гармонического отражения. Пусть теперь D — область с кусочно гладкой границей, и $\pi\alpha\in(0,\pi]$ — минимальный внутренний угол области D (т. е. $\pi\alpha$ — минимум величин всех внутренних углов V_a, $a\in\partial D$, образованных двумя разными лучами с вершиной a, касательными к ∂D). Примем $m_\alpha=1/(2-\alpha)$. Тогда при всех (m,m') с условиями $0<m'\le m<m_\alpha$ или $0<m'<m_\alpha\le m\le 1$ оператор R является (m,m')-непрерывным, и это не так при $m_\alpha<m'\le m\le 1$. Условие (m,m')-непрерывности означает, что для любой функции $f\in Lip^m(\overline{D})$, гармонической в D, выполнено $R(f)\in Lip^{m'}(\overline{\Omega})$. Кроме того, $Lip^{m'}(\overline{\Omega})$-норма функции $R(f)$ должна оцениваться (с точностью до мультипликативной постоянной) через $Lip^m(\overline{D})$-норму функции f

Ключевые слова

Область Каратеодори, оператор Пуассона, гармоническая мера, оператор гармонического отражения, пространство Липшица — Гельдера

Поступила в редакцию 25.12.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.3843.2017/4.6)

Введение. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей ∂D и замыканием $\overline{D}$. Далее предполагается, что множество $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ также является областью в $\mathbb{R}^2$, причем $\partial D=\partial\Omega$. Такие (непустые) области D называют *простыми областями Каратеодори* (ПОК-областями). Они односвязны и, следовательно, являются регулярными для задачи Дирихле (для гармонических функций на плоскости) [1]. Обозначим через $H(G)$ — пространство всех вещественных функций, гармонических на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, через $C(X)$ — пространство всех вещественных *непрерывных и ограниченных* функций на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^2$ со стандартной нормой $\| h \|_X = \sup\{| h(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in X\}$, и пусть $C_H(X) = C(X) \cap H(X^\circ)$, где E° — внутренность множества $E \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть $f \in C_H(\overline{D})$, а g — решение задачи Дирихле в Ω с граничной функцией $f|_{\partial\Omega}$. Функцию $g \in C_H(\overline{\Omega})$ назовем *гармоническим отражением* функции f относительно границы ∂D области D, а оператор $R = R_D : f \mapsto g$ — *оператором гармонического отражения* $\left(R : C_H(\overline{D}) \to C_H(\overline{\Omega})\right)$.

Интересен следующий вопрос: при каких условиях на ПОК-область D оператор R_D сохраняет свойства «гладкости» функций? Ограничимся гладкостями в смысле условий Липшица — Гельдера порядков не выше единицы. Напомним, что при $m \in (0,1]$ для замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}^2$ (содержащего не менее двух точек) пространство Липшица — Гельдера порядка m определяется как

$$Lip^m(X) = \left\{ h \in C(X) : \| h \|'_{Xm} = \sup \frac{| h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y}) |}{| \mathbf{x} - \mathbf{y} |^m} < +\infty \right\},$$

где $\sup$ берется по всем парам точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из X с условием $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Норма функции h в пространстве $Lip^m(X)$ задается так: $\| h \|_{Xm} = \max\left\{\| h \|'_{Xm}, \| h \|_X\right\}$.

Итак, основная рассматриваемая задача состоит в следующем.

Задача 1. *Для заданных m и m' из $(0,1]$ найти (наиболее точные) достаточные условия на ПОК-область D, гарантирующие непрерывность оператора R_D из пространства $Lip^m(\overline{D}) \cap H(D)$ в $Lip^{m'}(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega)$.*

При выполнении последнего свойства будем утверждать, что оператор R_D является (m, m')-*непрерывным*. Обсудим только «естественные» случаи $m = m'$ и $m > m'$.

Насколько известно автору настоящей работы, ранее эта задача не исследовалась, за исключением случая $m = 1$ [2].

Основные результаты. Начнем с простого примера, когда $D = B(\mathbf{a}, r)$ — открытый круг с центром $\mathbf{a}$ и радиусом $r > 0$. Здесь, согласно введенным выше обозначениям, $g(\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{a} + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) r^2 / | \mathbf{x} - \mathbf{a} |^2\right)$, $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, откуда элементарно находим, что оператор R_D является (m, m')-непрерывным при $0 < m' \le m \le 1$.

Для формулировки первого результата напомним определение областей Ляпунова — Дини. Функция $\omega(\cdot) \in C([0, +\infty))$ с условиями $\omega(0) = 0$, $\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\omega(t)$ (нестрого) возрастает и $\omega(t)/t$ убывает на $(0, +\infty)$, причем

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < +\infty$$

называется функцией *класса Дини*.

Ограниченная область G в $\mathbb{R}^2$ с C^1-гладкой границей называется областью *Ляпунова — Дини* ((Л–Д)-областью), если существует функция класса Дини $\omega(\cdot)$ такая, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на ∂G имеем $|\mathbf{n_x}-\mathbf{n_y}|\le\omega(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$, где $\mathbf{n_x}$ — *внутренняя* (по отношению к G) единичная нормаль к ∂G в точке $\mathbf{x}\in\partial G$.

В работе [2] (см. теорему 1 и пример 4.1) получен следующий результат (справедливый для всех $\mathbb{R}^N$, $N\ge 2$ натурально).

Теорема 1. *Для всякой жордановой (Л–Д)-области D в $\mathbb{R}^2$ оператор R_D является* (1, 1)*-непрерывным. Однако существуют жордановы области D с C^1-гладкой границей, для которых это не так.*

Далее будет установлено, что для любой жордановой области D с C^1-гладкой границей оператор R_D является (m, m')-непрерывным при $0<m'\le m<1$ и $0<m'<m=1$.

С поставленной выше задачей тесно связана задача о $(m,\ m')$*-непрерывности оператора Пуассона*, состоящая в следующем. Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$, а $P=P_D$ — оператор Пуассона, ставящий в соответствие произвольной непрерывной вещественной функции φ на ∂D решение задачи Дирихле f в $\overline{D}$ с граничными данными φ на ∂D.

Задача 2. *При заданных $0<m'\le m\le 1$, каковы (наиболее точные) достаточные условия на D, при которых оператор P_D является непрерывным из пространства $Lip^m(\partial D)$ в $Lip^{m'}(\overline{D})\cap H(D)$?*

Замечание 1. *Введем в пространстве $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, комплексную переменную $z=x_1+ix_2$, отождествляя $\mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}_z$. Если в условиях задачи 2 некоторая точка $a=a_1+ia_2\in D$, то отображение $w=1/(z-a)$ трансформирует задачу 2 в аналогичную задачу в области $D_*=\{w\in\mathbb{C}: z=a+1/w\in D\}$, поскольку отображение $f(z)\mapsto f_*(w)=f(a+1/w)$ является изоморфизмом пространств $Lip^m(\overline{D})\cap H(D)$ и $Lip^m(\overline{D_*})\cap H(D_*)$ (здесь полезно учитывать, что $\nabla f_*(\mathbf{x})=O\left(1/|\mathbf{x}|^2\right)$ при $|\mathbf{x}|\to+\infty$).*

Замечание 2. *Отметим, что в условиях теоремы 1 операторы Пуассона P_D и P_Ω не являются* (1, 1)*-непрерывными. Для $D=B(0,1)$ (при $\varphi(z)=|z-1|$) последнее легко проверяется с помощью стандартной формулы Пуассона. Для произвольных жордановых (Л–Д)-областей D достаточно применить какое-либо конформное отображение $k: D\to B(0,1)$ и воспользоваться результатом Келлога — Варшавского (см. [3, 4, theorem 3.5]), согласно которому отображение k продолжается до C^1-диффеоморфизма $\overline{D}$ и $\overline{B(0,1)}$.*

Для всех других случаев в задаче 1 такого эффекта обнаружить не удалось. Далее всюду установим (m, m')-непрерывность оператора R_D с помощью (m, m')-непрерывности оператора P_Ω. В связи с этим потребуются два результата Е. Джонстона [5] (см. теоремы 1 и 5 и следствия 3 и 7) о (m, m')-непрерывности оператора P.

Теорема Д1. *Пусть D — произвольная ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$. Тогда при всех (m,m') с условиями $0<m'\le m<1/2$ или $0<m'<1/2\le m\le 1$*

или $1/2 = m' < m \le 1$ *оператор* P_D *является* (m, m')*-непрерывным. Существуют жордановы области* D, *для которых оператор* P_D *не является* (1/2, 1/2)*-непрерывным.*

Для формулировки второго результата напомним одно определение. Для заданных $\alpha \in (0,1]$ и $r > 0$ пусть

$$S(\alpha, r) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \le \frac{\pi\alpha}{2},\ 0 < |z| \le r \right\} \cup \{0\}$$

— замкнутый сектор. При $a \in \mathbb{C}$ и $\beta \in (-\pi, \pi]$ примем $S(\alpha, r, a, \beta) = a + e^{i\beta} S(\alpha, r)$.

Будем утверждать, что ограниченная односвязная область $D \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет (внешнему) *условию сектора* с параметрами (α, r), если для всякой точки $a \in \partial D$ найдется $\beta = \beta(a) \in (-\pi, \pi]$ такое, что $S(\alpha, r, a, \beta) \cap D = \varnothing$.

Теорема Д2. *Пусть* D *— ограниченная односвязная область в* $\mathbb{R}^2$, *удовлетворяющая (внешнему) условию сектора с параметрами* (α, r), *и пусть* $m_\alpha = 1/(2-\alpha)$. *Тогда при всех* (m, m') *с условиями* $0 < m' \le m < m_\alpha$ *или* $0 < m' < m_\alpha \le m \le 1$ *или* $m_\alpha = m' < m \le 1$ *оператор* P_D *является* (m, m')*-непрерывным. Существуют жордановы области* D *указанного типа, для которых оператор* P_D *не является* (m_α, m_α)*-непрерывным.*

Следует отметить, что эти два результата существенно опираются на следующую очень полезную в настоящем контексте классическую теорему Берлинга [6] (см. также работы [7, гл. 8, § 4] и [8, гл. 2, § 4] об определении и свойствах *гармонической меры*).

Теорема Б. *Пусть* D *— ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$, E *— борелевское подмножество в* ∂D *и* $z \in D$. *Пусть* $d(z, E)$ *— расстояние от точки* z *до множества* E, *а* $\mu(z, E, D)$ *— гармоническая мера множества* E *относительно точки* z *и области* D. *Тогда справедлива оценка*

$$\mu(z, E, D) \le \frac{4}{\pi} \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{d(z, \partial D)}{d(z, E)}} \le \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{d(z, \partial D)}{d(z, E)}}.$$

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* D *— ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$. *Найдется* $m_D \in [1/2, 1]$ *со следующими свойствами: оператор Пуассона* P_D *является* (m, m')*-непрерывным при всех* $m \in (0, m_D)$ *и это не так при всех* $m \in (m_D, 1]$. *Кроме того, оператор* P_D *является* (m, m')*-непрерывным при* $0 < m' < m < m_D$ *и при* $0 < m' < m_D \le m \le 1$.

◄ Поскольку при всех $0 < m' < m \le 1$ тождественный оператор $T : f \mapsto f$ из пространства $Lip^m(F)$ в $Lip^{m'}(F)$, очевидно, непрерывен, нетрудно видеть, что остается установить следующее утверждение. Пусть в условиях теоремы 2 оператор P_D является (m, m')-непрерывным при некотором $m \in [1/2, 1]$, тогда оператор P_D (m', m')-непрерывен при любом $m' \in (0, m)$. Докажем это. Необходимо установить, что если существует такая постоянная $A = A(D, m) \in (0, +\infty)$, что из условия $|\varphi(z) - \varphi(z')| \le |z - z'|^m$ при всех $z, z' \in \partial D$ следует условие

$$|f(z)-f(z')|\le A\,|z-z'|^m,\ \ \forall z,z'\in\overline{D}, \tag{1}$$

где $f=P_D\varphi$, то найдется такая постоянная $A'=A'(D,m')\in(0,+\infty)$, что из условия $|\varphi(z)-\varphi(z')|\le|z-z'|^{m'}$ при всех $z,z'\in\partial D$ следует условие

$$|f(z)-f(z')|\le A'\,|z-z'|^{m'},\ \forall z,z'\in\overline{D}. \tag{2}$$

Из принципа максимума для гармонических функций вытекает (см. [5, неравенство (4)]), что для доказательства неравенства (2) достаточно установить его для случая $z'\in\partial D$, $z\in D$. Без ограничения общности примем $z'=0\in\partial D$, и фиксируем $z\in D$, $|z|=\delta<\operatorname{diam}(D)$. Используем обозначения, введенные в формулировке теоремы Б. Для неотрицательных целых n с условием $n\delta<\operatorname{diam}(D)$ (их совокупность обозначим через N) определим

$$E_0=\left\{a\in\partial D:|a|\le\delta\right\};$$
$$E_n=\left\{a\in\partial D:n\delta<|a|\le(n+1)\,\delta\right\},\ n\in N\setminus\{0\},$$

и пусть $\mu_n=\mu(z,E_n,D)$. Согласно определению гармонической меры и из (1) при $\varphi(w)=\varphi_m(w)=|w|^m$ ($w\in\partial D$) и $f_m=P_D\varphi_m$, имеем $\sum\limits_{n\in N}n^m\delta^m\mu_n\le|f_m(z)|\le$ $\le A\delta^m$. Отсюда для *любой* функции $\varphi\in C(\partial D)$ с условием $|\varphi(w)|\le|w|^{m'}$ и $f=P_D\varphi$ получаем

$$|f(z)|\le\sum_{n\in N}((n+1)\,\delta)^{m'}\mu_n\le\delta^{m'-m}\sum_{n\in N}(n^m+1)\,\delta^m\mu_n\le(A+1)\,\delta^{m'},$$

поскольку $\sum\limits_{n\in N}\mu_n=1$. Неравенство (2) и теорема 2 доказаны. ►

Следствие 1. *В условиях теоремы Д2 имеем* $m_D\ge m_\alpha$.

Замечание 3. *Доказательство теоремы 2 без изменений переносится и на другие размерности, необходимо только следующим образом слегка изменить формулировку.*

Пусть D — ограниченная регулярная область в $\mathbb{R}^N$, $N\in\{3,4,\ldots\}$. Найдется $m_D\in[0,1]$ со следующими свойствами: либо $m_D=0$, либо оператор Пуассона P_D является (m,m')-непрерывным при всех $m\in(0,m_D)$ и это не так при всех $m\in(m_D,1]$; кроме того, оператор P_D является (m,m')-непрерывным при $0<m'<m<m_D$ и при $0<m'<m_D\le m\le 1$.

Замечание 4. *В условиях задачи 1 из замечания 1 естественно определяется параметр* m_Ω, *для которого справедлива теорема 2 для области* Ω *(следует взять область* D_1 *— образ при отображении* $1/z$ *области* $\Omega\cup\{\infty\}$, *тогда* $(D_1)_*=\Omega$ *при* $a=0$*).*

Следствие 2. *В условиях задачи 1 оператор* R_D *является* (m,m')*-непрерывным при* $0<m'\le m<m_\Omega$ *и при* $0<m'<m_\Omega\le m\le 1$.

Теперь приведем несколько утверждений об отсутствии (m,m')-непрерывности у оператора R_D.

Следствие 3. *В условиях задачи 1 при* $m_\Omega < m_D$ *оператор* R_D *не является* (m, m)*-непрерывным при* $m_\Omega < m < m_D$.

◄ Действительно, по теореме 2 найдется $\varphi \in Lip^m(\partial D) = Lip^m(\partial\Omega)$, которая продолжается до функции класса $Lip^m(\overline{D}) \cap H(D)$, но не продолжается до функции класса $Lip^m(\overline{\Omega}) \cap H(\Omega)$. ►

Напомним, что обозначение $S(\alpha, r, a, \beta)$ для сектора и параметр $m_\alpha = 1/(2-\alpha)$ введены выше перед формулировкой теоремы Д2 и в самой теореме.

Теорема 3. *В условиях задачи 1 пусть для некоторой точки* $a \in \partial D$ *найдутся* $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (-\pi, \pi]$ *и* $r > 0$ *такие, что* $D \cap B(a,r) \subset S(\alpha, r, a, \beta)$. *Тогда оператор* R_D *не является* (m, m')*-непрерывным при* $m_\alpha < m' \le m \le 1$.

◄ Без ограничения общности можно предположить, что $a = 0$ и $\beta = \pi$. Примем $f(z) = \log|3z/r - 1|$, так что $f \in H(D) \cap Lip^1(\overline{D}))$. Докажем, что гармоническое отражение g функции f относительно ∂D не принадлежит $Lip^{m'}(\overline{\Omega})$ при всех $m_\alpha < m' \le 1$. Поскольку $g(0) = f(0) = 0$, то достаточно установить, что найдется такое $A > 0$, что при всех $\delta \in (0, r/3)$ имеем $g(\delta) \ge A\delta^{m_\alpha}$. Рассмотрим область $\Omega_r = \Omega_{\alpha r} = B(0,r) \setminus S(\alpha, r, 0, \pi) \subset \Omega$ и функцию $h(z) = \mu(z, E_r, \Omega_r)$, где $E_r = \{z \in \partial\Omega_r : |z| = r\}$. Ясно, что найдется $A_1 > 0$ с условием $g(z) \ge A_1 h(z)$ на $\partial\Omega_r$, а, следовательно, по принципу максимума и для всех $z \in \Omega_r$. Таким образом, остается доказать, что найдется $A_2 > 0$ с условием $h(\delta) \ge A_2\delta^{m_\alpha}$ при всех $\delta \in (0, r/3)$. Последнее выполняется элементарно с помощью композиции конформного отображения $w_1 = z^{m_\alpha} = \exp(m_\alpha \log(z))$ (ветвь у функции $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ берется в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси, т. е. при $-\pi < \arg(z) < \pi$) области Ω_r на полукруг $G_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| < r^{m_\alpha} := r_1, \operatorname{Re}(w_1) > 0\}$ и дробно-линейного отображения $w = -(w_1 - ir_1)/(w_1 + ir_1)$ полукруга G_1 на первый квадрант G. Останется учесть, что $\mu(w, E, G) = 2\arg(w)/\pi$ для $E = \{w \in \partial G : \operatorname{Re}(w) = 0\}$. Теорема 3 доказана. ►

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 оператор* P_Ω *не является* (m, m')*-непрерывным при* $m_\alpha < m' \le m \le 1$, *в частности* $m_\Omega \le m_\alpha$.

Из теоремы Д2, следствия 1 и теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть* D *— жорданова область в* $\mathbb{R}^2$ *с кусочно гладкой границей, и пусть* $\pi\alpha \in (0, \pi]$ *— величина минимального внешнего (соответственно, внутреннего) угла области* D, *т. е.* $\pi\alpha$ *— минимум величин всех внешних (соответственно, внутренних) углов* V_a, $a \in \partial D$, *образованных двумя разными лучами с вершиной* a, *касательными к* ∂D. *Тогда* $m_D = m_\alpha = 1/(2-\alpha)$. *(Соответственно, тогда* $m_\Omega = m_\alpha = 1/(2-\alpha)$ *и при всех* (m, m') *с условиями* $0 < m' \le m < m_\alpha$ *или* $0 < m' < m_\alpha \le m \le 1$ *оператор* R_D *является* (m, m')*-непрерывным, и это не так при* $m_\alpha < m' \le m \le 1$.)

Что происходит для других соотношений параметров m и m' и других областей автору пока не ясно. Особый интерес представляют следующие два вопроса.

Задача 3. *При каких условиях на односвязную (или жорданову кусочно гладкую) область D оператор P_D является (m_D, m_D)-непрерывным? Существуют ли такие области при $m_D = 1$?*

Задача 4. *Существуют ли такие $m \in (0,1)$ и жордановы области $D \subset \mathbb{C}$, для которых оператор P_Ω не является (m, m')-непрерывным, а оператор R_D является (m, m)-непрерывным?*

Отметим, что замечание 2 отвечает на последний вопрос положительно при $m = 1$.

О C^m-отражении гармонических функций. В теории приближений гармоническими функциями на компактах X в $\mathbb{R}^N$ в нормах пространств $Lip^m(X)$, $0 < m < 1$, естественно возникают пространства $C^m(X)$, где $C^m(X)$ — замыкание в $Lip^m(X)$ подпространства $C^\infty(\mathbb{R}^2)|_X$ (или, то же самое, подпространства $Lip^s(X)$, $s \in (m,1]$), см., например, [9]. Для *замкнутого* множества $X \subset \mathbb{R}^N$ и функции $f \in Lip^m(X)$, $m \in (0,1)$, определим *m-модуль непрерывности* функции f на X:

$$\omega_X^m(f, \delta) = \sup \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^m}, \ \delta \in (0, +\infty],$$

где указанный $\sup$ берется по всем $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ из X с условием $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta$. Нетрудно установить, что для *компактов* X имеем

$$C^m(X) = \left\{ f \in Lip^m(X) : \lim_{\delta \to 0} \omega_X^m(f, \delta) = 0 \right\}.$$

Для *неограниченных замкнутых* X последнее равенство примем за определение.

В условиях задачи 1 или задачи 2 можно дать определение (m, m')-непрерывности операторов R_D или P_D в контексте пространств C^m и $C^{m'}$ (вместо соответствующих Lip^m и $Lip^{m'}$); назовем эти свойства *$C(m, m')$-непрерывностью* операторов R_D или P_D. Непосредственно из приведенных определений и доказательства теоремы 2 вытекают следующие два факта. Во-первых, если оператор R_D (соответственно, P_D) является $C(m, m')$-непрерывным, то он является и (m, m')-непрерывным при $0 < m' \le m < 1$; для проверки этого факта вместо функций $\varphi_m(w) = |w|^m$ в доказательстве теоремы 2 достаточно рассмотреть функции $\varphi_{m+t}(w) = |w|^{m+t}$, $t \in (0, 1-m)$, и t устремить к нулю. Во-вторых, если оператор R_D (соответственно, P_D) является (m, m')-непрерывным, то он является и $C(s, s')$-непрерывным при выполнении условий $0 < s < m$, $0 < s' < m'$, $s' \le s$.

Следовательно, для всех $0 < m' \le m < 1$ (при тех же m_D *и* m_Ω) справедливы аналоги теорем 2 и 3 и их следствий в контекстах $C(m, m')$-непрерывности.

Заключение. Отметим, что для более высоких размерностей аналогичных геометрико-метрических результатов (кроме теорем 1 и 2) получить пока не удается, хотя определенные результаты типа теорем Д1 и Д2 имеются (см. [10, theorem 4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lebesgue H.* Sur le probléme de Dirichlet // Rend. Circ. Mat. di Palermo. 1907. Vol. 29. P. 371–402.

2. *Парамонов П.В.* О C^1-продолжении и C^1-отражении субгармонических функций с областей Ляпунова — Дини на $\mathbb{R}^N$ // Математический сборник. 2008. Т. 199. № 12. С. 79–116.

3. *Warschawski S.E.* On the differentiability at the boundary in conformal mapping // Amer. Math. Soc. Proceedings. 1961. Vol. 12. P. 614–620.

4. *Pommerenke C.* Boundary behavior of conformal maps. Berlin: Springer, 1992. 300 p.

5. *Johnston E.H.* The boundary modulus of continuity of harmonic functions // Pacific J. Math. 1980. Vol. 90. No. 1. P. 87–98.

6. *Beurling A.* Études sur un Probléme de Majoration. Upsala: Almquist and Wiksell, 1933. 109 p.

7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Рипол Классик, 2013. 638 с.

8. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.

9. *Парамонов П.В.* C^m-приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Математический сборник. 1993. Т. 184. № 2. С. 105–128.

10. *Hinkkanen A.* Modulus of continuity of harmonic functions // Journal D'Analyse Mathématique. 1988. Vol. 51. P. 1–29. DOI: 10.1007/BF02791117.pdf

Парамонов Петр Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Парамонов П.В. О Lip^m- и C^m-отражении гармонических функций относительно границ областей Каратеодори в $\mathbb{R}^2$ // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 4. С. 36–45. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-36-45

ON Lip^m- AND C^m-REFLECTION OF HARMONIC FUNCTIONS WITH RESPECT TO BOUNDARIES OF CARATHÉODORY DOMAINS IN $\mathbb{R}^2$

P.V. Paramonov petr.paramonov@list.ru

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Abstract

In this paper a number of sharp necessary and sufficient conditions for Lip^m- and C^m-continuity of operators of harmonic reflection of functions over boundaries of simple Carathéodory domains in $\mathbb{R}^2$ are obtained. Let us state the main result of this paper in a simplified form. For an arbitrary real function f that is harmonic in a Jordan domain $D \subset \mathbb{R}^2$ and continuous in its closure $\overline{D}$, let $R(f)$ be the

Keywords

Carathéodory domain, Poisson operator, harmonic measure, harmonic reflection operator, Lipschitz — Hölder space

solution of the Dirichlet problem in the domain $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ with the boundary function $f|_{\partial\Omega}$, where $\partial\Omega$ is the boundary of Ω. The function $R(f)$ is said to be a harmonic reflection of the function f with respect to the boundary $\partial D = \partial\Omega$ of the domain D, and the operator $R: f \to R(f)$ is said to be a harmonic reflection operator. Let now D has a piecewise smooth boundary, and suppose $\pi\alpha \in (0, \pi]$ to be the value of the minimal inner angle of the domain D (it means that $\pi\alpha$ is the minimal value among all inner angles V_a, $a \in \partial D$, formed by couples of distinct rays tangent to ∂D with vertexes at a). Let $m_\alpha = 1/(2-\alpha)$. Then for all (m, m') such that $0 < m' \le m < m_\alpha$ or $0 < m' < m_\alpha \le m \le 1$ the operator R is (m, m')-continuous, and it is not the case for $m_\alpha < m' \le m \le 1$. The $(m,\ m')$-continuity property means that for any function $f \in Lip^m(\overline{D})$ harmonic in D we have $R(f) \in Lip^{m'}(\overline{\Omega})$. Moreover, the $Lip^{m'}(\overline{\Omega})$-norm of $R(f)$ has to be estimated (up to certain multiplicative constant) by the $Lip^m(\overline{D})$-norm of f

Received 25.12.2017

The work was carried out with the state financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.3843.2017/4.6)

REFERENCES

[1] Lebesgue H. Sur le probléme de Dirichlet. *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, 1907, vol. 29, pp. 371–402.

[2] Paramonov P.V. C^1-extension and C^1-reflection of subharmonic functions from Lyapunov — Dini domains into $\mathbb{R}^N$. *Sb. Math.*, 2008, vol. 199, no. 12, pp. 1809–1846.

DOI: 10.1070/SM2008v199n12ABEH003982

[3] Warschawski S.E. On the differentiability at the boundary in conformal mapping. *Amer. Math. Soc. Proceedings*, 1961, vol. 12, pp. 614–620.

[4] Pommerenke C. Boundary behavior of conformal maps. Berlin, Springer-Verlag, 1992. 300 p.

[5] Johnston E.H. The boundary modulus of continuity of harmonic functions. *Pacific J. Math.*, 1980, vol. 90, no. 1, pp. 87–98.

[6] Beurling A. Études sur un Probléme de Majoration. Upsala, Almquist and Wiksell. 1933. 109 p.

[7] Goluzin G.M. Geometricheskaya teoriya funkcii kompleksnogo peremennogo [Geometric theory of functions of a complex variable]. Moscow, Ripol Klassik Publ., 2013. 628 p.

[8] Landkof N.S. Osnovy sovremennoy teorii potenciala [Fundamentals of modern theory of potential]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 515 p.

[9] Paramonov P.V. C^m-approximations by harmonic polynomials on compact sets in $\mathbb{R}^N$. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1994, vol. 78, no. 1, pp. 231–251.
DOI: 10.1070/SM1994v078n01ABEH003467

[10] Hinkkanen A. Modulus of continuity of harmonic functions. *Journal D'Analyse Mathématique*, 1988, vol. 51, pp. 1–29. DOI: 10.1007/BF02791117.pdf

Paramonov P.V. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Theory of Functions and Functional Analysis, Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University (Leninskie Gory 1, Moscow, 119991 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Paramonov P.V. On Lip^m- and C^m-Reflection of Harmonic Functions with Respect to Boundaries of Carathéodory Domains in $\mathbb{R}^2$. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 4, pp. 36–45 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-36-45