УДК 531.3

В. В. Лапшин

О ПРИНЦИПЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Приведена уточненная формулировка и дано доказательство достаточности условий принципа виртуальных перемещений.

E-mail: vladimir@lapshin.net

Ключевые слова: принцип виртуальных перемещений.

Принцип виртуальных перемещений, сформулированный И. Бернулли в 1717 г. [1], — один из классических результатов теоретической механики — рассматривается в учебниках по теоретической механике [2–9]. Известны обобщения этого принципа на случай неудерживающих [1, 4], неголономных [1, 2, 9–11], нестационарных [11] и неидеальных [1] связей.

Рассмотрим классическую формулировку принципа: *для равновесия механической системы, на которую наложены голономные, удерживающие, стационарные и идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, на любом виртуальном перемещении равнялась нулю и скорости всех точек системы в начальный момент времени равнялись нулю*, т.е.

$$\delta A = \sum_k \bar{F}_k \, \delta \bar{r}_k = 0, \quad \bar{V}_k(t_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

При этом рассматривается механическая система, состоящая из n материальных точек. Уравнения движения системы имеют вид

$$m_k \ddot{\bar{r}}_k = \bar{F}_k + \bar{R}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где m_k — масса k-й точки системы, $\bar{r}_k$ — ее радиус-вектор; $\bar{F}_k$ — активная сила; $\bar{R}_k$ — реакции идеальных связей, приложенные к k-й точке системы.

Необходимость принципа виртуальных перемещений и его доказательство не вызывают сомнений. Отметим, что в изложении курса теоретической механики можно ограничиться формулировкой и доказательством необходимости условий принципа [2].

Доказательство достаточности условий принципа виртуальных перемещений в [3–9] является ошибочным. Более того, и формулировка условий достаточности является не полной.

Приведем контрпример. Рассмотрим (рисунок) движение материальной точки вдоль гладкой горизонтальной направляющей под действием активной силы $F = kx^{1/3}$, где $k = \mathrm{const} > 0$, при начальных

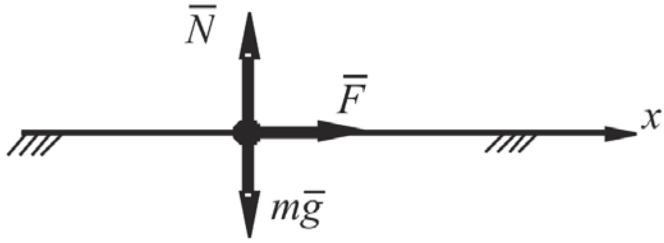

Схема движения материальной точки

условиях $t_0 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V(0) = 0$. В этом случае выполнены условия принципа виртуальных перемещений. Связи являются голономными, удерживающими, стационарными и идеальными. Начальная скорость равна нулю. Активная сила в начальном положении равна нулю, а тогда и ее виртуальная работа $\delta A = F\,\delta x = 0$. В силу принципа виртуальных перемещений система должна оставаться в равновесии в начальном положении.

Используя преобразование $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dx}\dfrac{dx}{dt} = V\dfrac{dV}{dx}$, найдем решение дифференциального уравнения движения при заданных начальных условиях:

$$m\ddot{x} = kx^{1/3} \Rightarrow mV\frac{dV}{dx} = kx^{1/3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V^2 = \frac{3k}{2m}x^{4/3} \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{3k}{2m}x^{2/3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_0^x x^{-2/3}dx = \pm\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t \Rightarrow x^{1/3} = \pm\sqrt{\frac{k}{6m}}\,t \Rightarrow x = \pm\left(\frac{k}{6m}\right)^{3/2} t^3.$$

При заданных начальных условиях уравнение движения имеет три решения: 1) $x(t) = 0$, 2) $x = \left(\dfrac{k}{6m}\right)^{3/2} t^3$, 3) $x = -\left(\dfrac{k}{6m}\right)^{3/2} t^3$. Первому решению соответствует равновесие, а второму и третьему — движение системы.

Этот пример опровергает достаточность условий принципа виртуальных перемещений. Аналогичный пример рассмотрен ранее Я.Л. Геронимусом [10].

Исследуемая механическая система весьма необычна. Заданным начальным условиям соответствуют три различных решения. Объясняется это тем, что не выполнены условия теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения движения. С точки зрения механики при этом не выполнен принцип детерминированности, который является одной из основ теоретической механики и послужил обоснованием формулировки второго закона Ньютона. В учебниках по теоретической механике негласно предполагается, что принцип детерминированности справедлив для всех механический систем. Однако контрпример показывает, что недетерминированные механические системы существуют.

Замечание. В начальный момент времени равны нулю скорость и ускорение точки, а также сила, действующая на точку. Следовательно, равенство нулю силы, действующей на точку, и начальных значений скорости и ускорения не означает, что она будет находиться в равновесии. При этом под равновесием понимается сохранение заданного положения (или равенство нулю скорости) в течение некоторого отрезка времени.

В конрпримере сила является потенциальной. Потенциальная энергия $\Pi = -\dfrac{3}{4}kx^{4/3}$ имеет в начальном положении изолированный максимум. Аналогичное уравнение движения можно получить для скольжения материальной точки по гладкой горке, расположенной в вертикальной плоскости. Положение на вершине этой горки (максимум потенциальной энергии) при этом не является положением равновесия.

Если выполнены условия теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений движения, то механическая система является детерминированной. Обратное утверждение не верно. Например, если в контрпримере поменять знак силы, то дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = -kx^{1/3}$ не удовлетворяет в начальном положении условиям теоремы существования и единственности решения, но имеет при этом единственное решение $x \equiv 0$, т.е. система является детерминированной. Отметим, что подобные дифференциальные уравнения движения возникают в модели удара Герца (контактной задаче) [12].

Остановимся на ошибках в известных доказательствах достаточности условий принципа виртуальных перемещений.

В учебниках П. Аппеля [3], Е.Н. Березкина [4], К.С. Колесникова [5], Н.Н. Никитина [6] и др. доказательство проводится от противного. Пусть выполнены условия (1) и начинают двигаться некоторые материальные точки системы. Начальные скорости равны нулю, и эти материальные точки начинают двигаться в направлении действующей на них силы. Тогда на действительном перемещении для этих точек элементарная работа активной силы и силы реакции связей $(\bar{F}_k + \bar{R}_k)d\bar{r}_k > 0$. Следовательно, $dA = \sum\limits_k \bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum\limits_k \bar{R}_k d\bar{r}_k > 0$. Для стационарных связей действительное перемещение является одним из виртуальных. На этом виртуальном перемещении сумма работ сил реакции связей равна нулю в силу идеальности связей и сумма работ активных сил $\delta A = \sum\limits_k \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = dA > 0$, что противоречит условию принципа.

Ошибка авторов заключается в неверной трактовке действительного перемещения системы. Действительное перемещение — это дифференциал радиус-вектора точки, и оно равно нулю ($d\bar{r}_k = \bar{V}_k dt = 0$) для всех точек системы, так как движение начинается из положения с нулевыми скоростями. Тогда $dA = 0$.

В учебнике С.М. Тарга [7] доказательство проводится на основе теоремы об изменении кинетической энергии. Пусть выполнены условия (1) и механическая система начинает двигаться, тогда сумма элементарных работ $dA = \sum\limits_k \bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum\limits_k \bar{R}_k d\bar{r}_k = dT$, а изменение кинетической энергии dT будет положительным, так как в исходном положении система была неподвижна. Тогда $dA > 0$ и далее доказательство С.М. Тарга повторяет предыдущее.

Ошибка автора в сущности совпадает с ошибкой предыдущего доказательства и связана с неверной трактовкой дифференциала кинетической энергии. На самом деле $dT = \sum\limits_k m_k V_k dV_k = 0$ в силу того, что $\bar{V}_k(t_0) = 0$.

На эти ошибки в доказательстве достаточности условий принципа виртуальных перемещений ранее указывалось в статье Г.Д. Блюмина [11].

В учебниках Н.В. Бутенина с соавторами [8], Ю.Ф. Голубева [9] и статье Г.Д. Блюмина [11] приведено более удачное доказательство, которое исправляет указанные ошибки. Авторами показано, что существует виртуальное перемещение системы

$$\delta \bar{r}_k = \varepsilon \bar{a}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где $\bar{a}_k$ — ускорение k-й точки системы, ε — положительная бесконечно малая величина. Доказательство принципа проводится от противного. Пусть условия (1) выполнены и система начала двигаться. Тогда на этом виртуальном перемещении в силу идеальности связей и уравнений движения (2)

$$\delta A = \sum_k \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = \sum_k \left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right) \delta \bar{r}_k = \\ = \varepsilon \sum_k \left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right) \bar{a}_k = \varepsilon \sum_k \frac{\left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right)^2}{m_k} > 0,$$

что противоречит условиям (1).

Неточность авторов заключается в том, что система может начать двигаться из состояния покоя, так что при этом ускорения всех точек будут равняться нулю, т.е. в силу уравнений движения и силы будут равняться нулю: $\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0$. Именно такой случай рассмотрен в контрпримере (см. замечание).

На самом деле незначительная модификация этого доказательства показывает, что если выполнены условия (1) принципа виртуальных перемещений, то в начальный момент времени имеет место равенство нулю сил, приложенных к каждой точке системы: $\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0$ [10]. Однако этого не достаточно для равновесия системы.

Действительно, на виртуальном перемещении (3)

$$\delta A = \sum_k \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = \sum_k \left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right) \delta \bar{r}_k = \varepsilon \sum_k \left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right) \bar{a}_k = \\ = \varepsilon \sum_k \frac{\left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right)^2}{m_k} = \varepsilon \sum_k m_k \bar{a}_k^2 = 0,$$

следовательно, $\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0$, $\bar{a}_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Уточнение формулировки достаточности условий принципа виртуальных заключается в том, что механическая система должна быть детерминированной.

Лемма. Если в начальный момент времени скорости и ускорения всех точек механической системы раны нулю и система является детерминированной при данных начальных условиях, то система находится в равновесии.

Доказательство. В силу уравнений движения (2) сила, действующая на k-ю точку системы, равна нулю: $\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0$. Тогда уравнения движения (2) имеют решение $\bar{r}_k(t) \equiv \bar{r}_k(t_0) = \bar{r}_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, которому соответствует равновесие системы. В силу детерминированности системы это решение является единственным.

Теорема (достаточность принципа виртуальных перемещений). *Рассмотрим механическую систему, на которую наложены голономные, удерживающие, стационарные и идеальные связи. Если*

1) *сумма виртуальных работ активных сил равна нулю* $(\delta A = \sum_k \bar{F}_k \, \delta \bar{r}_k = 0)$,

2) *начальные скорости всех точек системы равны нулю* $(\bar{V}_k(t_0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots n)$,

3) *система является детерминированной в окрестности начального состояния* $(\bar{r}_k(t_0) = \bar{r}_k^0, \quad \bar{V}_k(t_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n)$,

то система находится в равновесии.

Доказательство. Проведем от противного. Если система начинает двигаться, то в силу леммы ускорение хотя бы одной точки отлично от нуля, а тогда справедливо доказательство, приведенное в [8, 9, 11].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00712 и гранта Президента РФ № НШ-4748.2012.8 для ведущих научных школ РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавриленко В. А. О содержании и формулировке принципа возможных перемещений в статике. Труды Ленинградского текстильного института им. С.М. Кирова. – 1954. – № 5. – С. 42–54.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. – ГИФМЛ. – М., 1961. – 824 с.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1. – М.: Физматгиз, 1960. – 515 с.
4. Березкин Е. Н. Курс теоретической механики. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1974. – 646 с.
5. Курс теоретической механики / Под ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.
6. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.
7. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1995. – 416 с.
8. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1971. – 462 с.
9. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. – М.: Изд-во Московского ун-та, 2000. – 719 с.
10. Геронимус Я. Л. О принципе виртуальных перемещений // Бюллетень Ясского политехнического института. – 1963. – № 3–4. – С. 251–261.
11. Блюмин Г. Д. О принципе виртуальных перемещений // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 22–28.
12. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования. – 1997. – 336 с.

Статья поступила в редакцию 13.10.2010

Владимир Владимирович Лапшин родился в 1954 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1975 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 110 научных работ в области механики и управления движением шагающих аппаратов, робототехники.

V.V. Lapshin (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1975. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 110 publications in the field of mechanics and motion control of walking machines, robotics.