

ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ**В.Ф. Формалев**

formalev38@yandex.ru

С.А. Колесник

sergey@oviont.com

И.А. Селин

i.selin@bk.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация**Аннотация**

Исследовано локально-неравновесное тепловое состояние в условиях волнового теплопереноса в окрестности пространственно-временных границ анизотропного полупространства под действием точечного источника теплоты, зависящего от времени, на основе нового аналитического решения. Локальное неравновесие вызывается отставанием по времени теплового потока от градиента температуры на время релаксации, отчетливо наблюдаемого в окрестности границ при малых временах, соизмеримых со временем релаксации. Показано начальное формирование нестационарного температурного поля, которое как по количественным, так и по качественным характеристикам существенно отличается от случаев отсутствия времени релаксации. В частности, на границах подвижных фронтов температурное поле претерпевает разрывы непрерывности первого рода, характерные для волнового теплопереноса. Амплитуды этих разрывов со временем стремятся к нулю, однако в любом случае вторые производные температурного профиля по пространственным переменным не являются непрерывными. Проанализированы новые численные результаты. Работа актуальна применительно к быстропротекающим процессам релятивистской механики

Ключевые слова

Волновой теплоперенос, время релаксации, локально-неравновесное состояние, теплоперенос в анизотропном полупространстве

Поступила в редакцию 28.12.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 16-19-10340)

Введение. При высоких скоростях нагрева (сотни градусов в секунду) в окрестности пространственно-временных границ (границы тела, начальное значение времени) возникает неравновесное состояние, а именно тепловой поток отстает от градиента температур, т. е. тепловой поток не пропорционален градиенту температур (не выполняется классический закон Фурье, в соответствии с которым возникает парадокс бесконечной скорости распространения теплового потока) [1]. Такое отставание характеризует конечную скорость распространения теплового потока, т. е. волновое распространение теплоты с возникновением

фронтов разрыва температурного поля, теплового потока и второй производной распределения температур по пространственным переменным. Для учета волновых процессов теплопроводности (локального неравновесия) используется закон Каттанео — Вернотта — Лыкова [2–4], в соответствии с которым к градиентному слагаемому добавляется слагаемое, пропорциональное скорости изменения теплового потока с коэффициентом пропорциональности, равным времени релаксации. Применение этого закона приводит к волновому уравнению теплопроводности.

Процесс термоупругости с двумя параметрами релаксации — по теплопроводности и упругости — моделируется в работе [5]. Локально-неравновесный перенос потенциала характерен для всех потенциальных векторных полей, описываемых градиентными законами: теплопроводности, упругости, течения вязкой жидкости, гравитации и т. п. Это подтверждают работы [6, 7]. В нелинейных средах возникают тепловые ударные волны с увеличивающейся амплитудой разрывов первого рода температурного распределения [8].

В анизотропных средах волновой теплоперенос описывается волновым уравнением теплопроводности, содержащим смешанные производные. Для таких процессов тепловые потоки в разных направлениях имеют различные скорости. Моделирование теплопереноса в анизотропных средах на основе новых аналитических решений рассмотрено в работах [9–13].

В настоящей работе исследован волновой теплоперенос в анизотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии на основе нового аналитического решения. Ранее математическое моделирование волнового теплопереноса рассмотрено в работе [14].

Постановка задачи. Для анизотропного полупространства (рис. 1) рассмотрим следующую задачу о волновом теплопереносе по определению функции $T(x, y, z, t)$:

$$\tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \left[\lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{xy} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{yx} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right],$$

$$\{x, y\} \in (-\infty, \infty), \quad z \in (0, \infty), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$-\lambda_{zz} \frac{\partial T(x, y, 0, t)}{\partial z} = \left[q(t) + \tau_p \frac{\partial q(t)}{\partial t} \right] \delta(x-0) \delta(y-0), \quad \{x, y\} \in (-\infty, \infty),$$

$$z = 0, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0, \quad \{x, y\} \in (-\infty, \infty), \quad z \geq 0, \quad t = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad \{x, y\} \in (-\infty, \infty), \quad z \in (0, \infty), \quad t = 0; \quad (4)$$

$$\left\{ T(x, y, z, t), \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x}, \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y}, \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right\} = 0, \\ x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow \infty, t \geq 0; \quad (5)$$

$$q(t) = q_0 e^{rt}. \quad (6)$$

Здесь $T(x, y, z, t)$ — температура; τ_p — время релаксации; x, y, z — декартовы координаты; $T_0 = \text{const}$ — начальная температура; $q(t)$ — плотность теплового потока; r — постоянная; $\delta(x-0), \delta(y-0)$ — дельта-функции Дирака; $\lambda_{xx}, \lambda_{xy}, \lambda_{yx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz}$ — компоненты тензора теплопроводности, вычисляемые с помощью главных компонент $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta$ тензора теплопроводности:

$$\lambda_{xx} = \lambda_\xi \cos^2 \varphi + \lambda_\eta \sin^2 \varphi; \\ \lambda_{xy} = \lambda_{yx} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \cos \varphi \sin \varphi; \quad (7) \\ \lambda_{yy} = \lambda_\xi \sin^2 \varphi + \lambda_\eta \cos^2 \varphi, \quad \lambda_{zz} = \lambda_\zeta,$$

где φ — угол между декартовыми осями Ox, Oy и главными осями $O\xi, O\eta$.

Следовательно, анизотропия учитывается в плоскостях, параллельных плоскости $z = 0$.

Если ввести обозначение

$$T(x, y, z, t) = T_1(x, y, z, t) + T_0, \quad (8)$$

то система уравнений (1)–(6) будет сформулирована относительно функции $T_1(x, y, z, t)$, но относительно однородного начального условия $T_1(x, y, z, 0) = 0$. Если функцию $T_1(x, y, z, t)$ переобозначить функцией $T(x, y, z, t)$, то система (1)–(6) сохранится, кроме начального условия (3), которое теперь будет иметь вид

$$T(x, y, z, 0) = 0, \quad \{x, y\} \in (-\infty, \infty), \quad z \geq 0, \quad t = 0. \quad (9)$$

После решения исходной задачи с однородным начальным условием (9) к итоговому решению необходимо добавить начальную температуру T_0 .

Метод решения. Заменой (поворотом декартовой системы координат вокруг оси Oz на угол φ):

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi; \quad x = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\ \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi; \quad y = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi; \quad (10) \\ \zeta = z; \quad z = \zeta$$

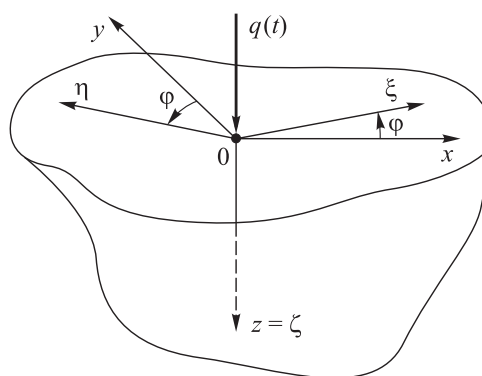


Рис. 1. Системы координат в анизотропном полупространстве

соотношения (1)–(5) приводятся к главным осям. Тем самым компоненты тензора теплопроводности при смешанных производных в уравнении (1) становятся равными нулю и уравнение (1) описывает теплоперенос в ортотропном полупространстве с ненулевыми диагональными компонентами λ_ξ , λ_η , λ_ζ тензора теплопроводности:

$$\tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \left(\lambda_\xi \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \lambda_\eta \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \lambda_\zeta \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \right), \quad \{\xi, \eta\} \in (-\infty, \infty),$$

$$\zeta \in (0, \infty), \quad t > 0; \tag{11}$$

$$-\lambda_\zeta \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \left[q(t) + \tau_p \frac{\partial q(t)}{\partial t} \right] \delta(\xi - 0) \delta(\eta - 0), \quad \{\xi, \eta\} \in (-\infty, \infty),$$

$$\zeta = 0, \quad t > 0; \tag{12}$$

$$T(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0, \quad \{\xi, \eta\} \in (-\infty, \infty), \quad \zeta \in (0, \infty), \quad t = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial T(\xi, \eta, \zeta, 0)}{\partial t} = 0, \quad \{\xi, \eta\} \in (-\infty, \infty), \quad \zeta \in (0, \infty), \quad t = 0; \tag{14}$$

$$\left\{ T(\xi, \eta, \zeta, t), \frac{\partial T}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial \eta}, \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right\} = 0, \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad \eta \rightarrow \pm\infty,$$

$$\zeta \rightarrow \infty, \quad t > 0. \tag{15}$$

Далее заменой переменных

$$\xi_1 = \xi \sqrt{L/\lambda_\xi}; \quad \eta_1 = \eta \sqrt{L/\lambda_\eta}; \quad \zeta_1 = \zeta \sqrt{L/\lambda_\zeta}, \tag{16}$$

где L — произвольное значение теплопроводности, например, $L = 1$ Вт/(м·К), задача (11)–(15) приводится к задаче волнового теплопереноса в изотропном полупространстве:

$$\tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta_1^2} \right), \quad \{\xi_1, \eta_1\} \in (-\infty, \infty),$$

$$\zeta_1 \in (0, \infty), \quad t > 0; \tag{17}$$

$$-\sqrt{L\lambda_\zeta} \frac{\partial T}{\partial \zeta_1} = \left[q(t) + \tau_p \frac{\partial q(t)}{\partial t} \right] \delta(\xi_1 \sqrt{\lambda_\xi/L} - 0) \delta(\eta_1 \sqrt{\lambda_\eta/L} - 0),$$

$$\{\xi_1, \eta_1\} \in (-\infty, \infty), \quad \zeta_1 = 0, \quad t > 0; \tag{18}$$

$$T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, 0) = 0, \quad \{\xi_1, \eta_1\} \in (-\infty, \infty), \quad \zeta_1 \in [0, \infty), \quad t = 0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, 0)}{\partial t} = 0, \quad \{\xi_1, \eta_1\} \in (-\infty, \infty), \quad \zeta_1 \in [0, \infty), \quad t = 0; \tag{20}$$

$$\left\{ T(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t), \frac{\partial T}{\partial \xi_1}, \frac{\partial T}{\partial \eta_1}, \frac{\partial T}{\partial \zeta_1} \right\} = 0, \quad \xi_1 \rightarrow \pm\infty, \quad \eta_1 \rightarrow \pm\infty, \\ \zeta_1 \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (21)$$

где $a = L/(c\rho)$.

Поскольку окрестность начального времени и линейные размеры области нагрева очень малы (доли наносекунд и нанометров), так как для твердых тел $\tau_p \sim 10^{-12} \dots 10^{-14}$ с, в задаче (17)–(21) необходимо перейти к безразмерным величинам

$$t_1 = t/\tau_p; \quad x_1 = \sqrt{\xi_1^2/(a\tau_p)}; \quad x_2 = \sqrt{\eta_1^2/(a\tau_p)}; \quad x_3 = \sqrt{\zeta_1^2/(a\tau_p)}. \quad (22)$$

В результате получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \frac{\partial T}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}, \quad \{x_1, x_2\} \in (0, \infty), \quad x_3 \in (0, \infty), \quad t_1 > 0; \quad (23)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x_3} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\lambda_\zeta c\rho}} \left[q(t_1) + \frac{\partial q(t_1)}{\partial t_1} \right] \delta \left(\sqrt{\frac{\tau_p \lambda_\xi}{c\rho}} - 0 \right) \delta \left(\sqrt{\frac{\tau_p \lambda_\eta}{c\rho}} - 0 \right), \\ \{x_1, x_2\} \in (-\infty, \infty), \quad x_3 = 0, \quad t_1 > 0; \quad (24)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \{x_1, x_2\} \in (-\infty, \infty), \quad x_3 \in (0, \infty), \quad t_1 = 0; \quad (25)$$

$$\frac{\partial T(x_1, x_2, x_3, 0)}{\partial t} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \in (-\infty, \infty), \quad x_3 \in (0, \infty), \quad t_1 = 0; \quad (26)$$

$$\left\{ T(x_1, x_2, x_3, t), \frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3} \right\} = 0, \quad x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad x_2 \rightarrow \pm\infty, \\ x_3 \rightarrow \infty, \quad t_1 > 0. \quad (27)$$

Для решения задачи (23)–(27) используем двойные преобразования Фурье по переменным x_1 , x_2 и Лапласа по времени t_1 :

$$T_{\omega, s, p}(x_3) = \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty T(x_1, x_2, x_3, t_1) \exp(-\omega x_1) \exp(-s x_2) dx_1 dx_2 \right] \exp(-p t_1) dt_1. \quad (28)$$

Приходим к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 T_{\omega, s, p}(x_3)}{dx_3^2} - (p^2 + p + \omega^2 + s^2) T_{\omega, s, p}(x_3) = 0, \quad x_3 \in (0, \infty); \quad (29)$$

$$-\frac{dT_{\omega, s, p}(x_3)}{dx_3} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\lambda_\zeta c\rho}} \frac{q_0(1 + \tau_p r)}{p - r}, \quad x_3 = 0; \quad (30)$$

$$T_{\omega,s,p}(x_3) = 0, \quad x_3 \rightarrow \infty, \quad (31)$$

где q_0, r — постоянные для плотности $q(t_1)$ теплового потока в зависимости (6).

Решением задачи (29)–(31) с учетом равенства нулю постоянной при экспоненте с положительным показателем является функция

$$T_{\omega,s,p}(x_3) = \frac{q_0(1 + \tau_p r) \sqrt{\tau_p / (\lambda_\zeta c \rho)}}{(p-r) \sqrt{p^2 + p + \omega^2 + s^2}} \exp\left(-x_3 \sqrt{p^2 + p + \omega^2 + s^2}\right). \quad (32)$$

Для обратного преобразования Лапласа функции (32) используем табличное преобразование [3]:

$$\frac{\exp\left(-k \sqrt{p^2 + b^2}\right)}{\sqrt{p^2 + b^2}} \doteq J_0\left(b \sqrt{t_1^2 - k^2}\right) \Psi(t_1 - k), \quad (33)$$

где $\Psi(t_1 - k)$ — функция Хевисайда ($\Psi(t_1 - \tau) = 1$ при $t_1 > k$ и $\Psi(t_1 - k) = 0$ при $t_1 < k$); $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, и формулу Меллина

$$\begin{aligned} T_{\omega,s}(x_3, t_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{Q \exp\left[-x_3 \sqrt{(p+0,5)^2 - 0,25 + (\omega^2 + s^2)}\right]}{(p-r) \sqrt{(p+0,5)^2 - 0,25 + (\omega^2 + s^2)}} \exp(pt_1) dp = \\ &= \frac{Q}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{1}{p_1 - (r+0,5)} \frac{\exp\left(-x_3 \sqrt{p_1 + (\omega^2 + s^2 - 0,25)}\right)}{\sqrt{p_1^2 + (\omega^2 + s^2 - 0,25)}} \exp(p_1 - 0,5)t_1 dp_1 = \\ &= Q \exp(-0,5t_1) \left[\exp(r+0,5)t_1 J_0\left(\sqrt{\omega^2 + s^2 - 0,25} \sqrt{t_1^2 - x_3^2}\right) \right] \Psi(t_1 - x_3) = \\ &= Q \exp(-t_1/2) \int_0^{t_1} \exp(r+0,5)(t_1 - \tau) J_0\left(\sqrt{\omega^2 + s^2 - 0,25} \sqrt{\tau^2 - x_3^2}\right) \Psi(\tau - x_3) d\tau = \\ &= Q \exp(rt_1) \int_0^{t_1} \exp[-(r+0,5)\tau] J_0\left(\sqrt{\omega^2 + s^2 - 0,25} \sqrt{\tau^2 - x_3^2}\right) \Psi(\tau - x_3) d\tau. \quad (34) \end{aligned}$$

Здесь $Q = q_0(1 + r\tau_p) \sqrt{\tau_p / (\lambda_\zeta c \rho)}$; $p_1 = p + 0,5$; $\sigma_1 = \sigma + 0,5$.

Обратное преобразование Фурье выражения (34) имеет вид

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, t_1) &= Q \exp(rt_1) \int_0^{t_1} \exp[-(r+0,5)\tau] \frac{1}{4\pi^2} \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x_1) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx_2) J_0\left(\sqrt{\omega^2 + s^2 - 0,25}\right) \sqrt{\tau^2 - x_3^2} ds \right] \Psi(\tau - x_3) d\tau. \quad (35) \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов в выражении (35) по параметрам преобразования Фурье ω и s для малых значений аргумента $\sqrt{\omega^2 + s^2 - 0,25\sqrt{\tau^2 - x_3^2}}$ функции Бесселя $J_0\left(\sqrt{\omega^2 + s^2 - 0,25\sqrt{\tau^2 - x_3^2}}\right)$ отметим, что при $x < 1$ функция $J_0(x) = 1 - x^2/4 + O(x^4/64) = e^{-x^2/4} + O(x^4/64)$.

Используя эту аппроксимацию, формулы Эйлера $\exp(i\omega x_1) = \cos(\omega x_1) + i \sin(\omega x_1)$, $\exp(isx_2) = \cos(sx_2) + i \sin(sx_2)$, четность подынтегральных функций относительно переменных ω и s , из (35) получаем

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, t_1) &= Q \exp(rt_1) \int_0^{t_1} \exp\left[-(r+0,5)\tau + \frac{1}{16}(\tau^2 - x_3^2)\right] \frac{4}{4\pi^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \cos(\omega x_1) \exp\left[-\frac{\omega^2}{4}(\tau^2 - x_3^2)\right] d\omega \int_0^\infty \cos(sx_2) \exp\left[-\frac{s^2}{4}(\tau^2 - x_3^2)\right] ds \times \\ &\times \psi(\tau - x_3) d\tau = Q \exp(rt_1) \int_0^{t_1} \exp\left[-(r+0,5)\tau + \frac{1}{16}(\tau^2 - x_3^2)\right] \frac{1}{\pi^2} \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau^2 - x_3^2}/2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4(\tau^2 - x_3^2)/4}\right) \right] \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau^2 - x_3^2}/2} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4(\tau^2 - x_3^2)/4}\right) \right] \times \\ &\times \psi(\tau - x_3) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, t_1) &= \frac{Q}{\pi} \exp(rt_1) \int_0^{t_1} \exp\left[-(r+0,5)\tau + \frac{\tau^2 - x_3^2}{16}\right] \times \\ &\times \frac{1}{\tau^2 - x_3^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{\tau^2 - x_3^2}\right) \psi(\tau - x_3) d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

В выражении (36) интеграл вследствие нулевого нижнего предела является несобственным. Однако прогрев при волновом теплопереносе не может начаться при времени, меньшем времени релаксации τ_p . Поэтому нижний предел в интеграле выражения (36) принимается равным τ_p и выражение (36) преобразуется к виду (при $t = \tau_p$, $t_1 = 1$):

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, t_1) &= \frac{Q}{\pi} \exp(rt_1) \int_1^{t_1} \exp\left[-(r+0,5)\tau + \frac{\tau^2 - x_3^2}{16}\right] \frac{1}{\tau^2 - x_3^2} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{\tau^2 - x_3^2}\right) \psi(\tau - x_3) d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

где $Q = q_0(1 + r\tau_p)\sqrt{\tau_p/(\lambda_\zeta c\rho)}$.

В выражении (37) независимые безразмерные переменные x_1, x_2, x_3, t_1 определяются через размерные:

$$\begin{aligned}x_1 &= (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sqrt{c\rho / (\tau_p \lambda_\xi)}; \\x_2 &= (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) \sqrt{c\rho / (\tau_p \lambda_\eta)}; \\x_3 &= z \sqrt{c\rho / (\tau_p \lambda_\zeta)}; \quad t_1 = t / \tau_p.\end{aligned}\quad (38)$$

Аналогичное аналитическое решение можно получить для больших значений аргументов $x (x > 1)$ функции $J_0(x)$, используя асимптотическое приближение

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

однако интересны малые значения аргументов x .

Анализ результатов. С помощью формулы (37) получены распределения температуры в анизотропном полупространстве в окрестностях нулевого момента времени (доли наносекунд) и оси Oz (доли нанометров). Поскольку время и линейные размеры малы, зависимости построены в относительных величинах x_1, x_2, x_3, t_1 (38). Температурные поля, превышающие начальное значение температуры $T_0 = 300$ К, приведены на рис. 2, 3. Поскольку в пространственные независимые переменные x_1, x_2, x_3 входят компоненты главного тензора теплопроводности $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta$ (38), они представляются в безразмерном виде:

$$X_1 = x_1 \sqrt{\lambda_\xi / \lambda_\zeta}; \quad X_2 = x_2 \sqrt{\lambda_\eta / \lambda_\zeta}; \quad X_3 = x_3 \cdot 1, \quad (39)$$

т. е. зависят только от λ_ζ .

Входные данные принимали следующие значения: $\lambda_\xi = 0,2$ Вт/(м·К); $\lambda_\eta = 0,02$ Вт/(м·К); $\lambda_\zeta = 0,1$ Вт/(м·К); $c\rho = 10^6$ Дж/(м³·К); $q_0 = 10^5$ Вт/м²; $r = 2,1$ с⁻¹; $\tau_3 = 1 \cdot 10^{-12}$ с; $\varphi = 0$.

Распределения температуры в плоскости $X_3 = 0$ вдоль осей OX_1 и OX_2 приведены на рис. 2, а, б. Поскольку значения температуры изменяются от нуля, шкала температуры по оси ординат разрывается, а по осям абсцисс сохраняется. В соответствии с этим подробно показано распределение температуры в диапазоне 0...5 К и 5...300 К.

Вдоль оси OX_1 температура возрастает значительно быстрее, чем вдоль оси OX_2 , поскольку теплопроводность вдоль оси OX_1 в 10 раз больше теплопроводности вдоль оси OX_2 . Значения температуры в точке $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ на рис. 2, а, б одинаковы. При этом производные $\frac{\partial T(0,0,0,t)}{\partial X_1}$ и $\frac{\partial T(0,0,0,t)}{\partial X_2}$ равны нулю (достаточно выражение (38) продифференцировать по X_1 и X_2 , подставить значение $X_1 = X_2 = X_3 = 0$), т. е. на зависимостях видны пиковые значения, а на самом деле вершины температурных профилей скруглены.

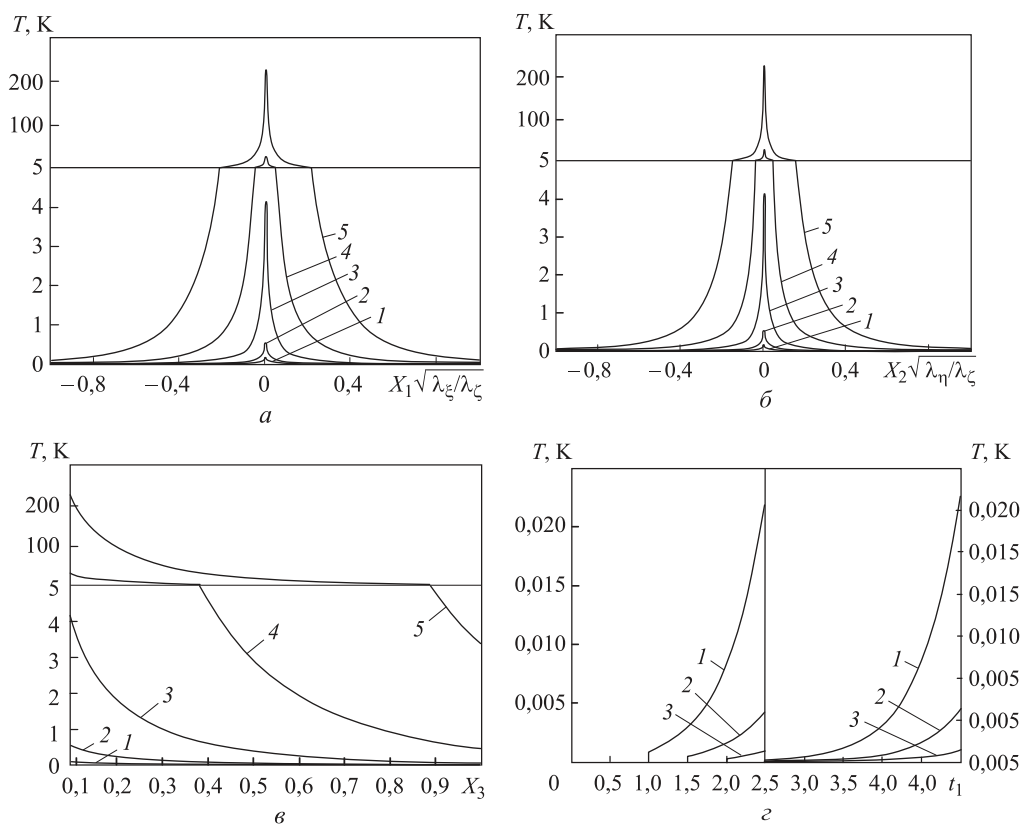


Рис. 2. Распределения температуры:

a, б, в — вдоль безразмерных осей OX_1 при $X_3 = X_1 = X_2 = 0$ (*a*), OX_2 при $X_3 = X_2 = 0$ (*б*) и OX_3 при $X_1 = X_2 = 0$ (*в*) (1 — $t_1 = 1$; 2 — $t_1 = 2$; 3 — $t_1 = 3$; 4 — $t_1 = 4$; 5 — $t_1 = 5$); *з* — по безразмерному времени t_1 при $X_1 = X_2 = 0$ (1 — $X_3 = 1$; 2 — $X_3 = 1,5$; 3 — $X_3 = 2$)

Распределение температуры вдоль оси OX_3 при $X_1 = X_2 = 0$ для различных значений относительного времени t_1 приведены на рис. 2, *в*. Зависимости также показаны в двух масштабах по оси температуры, первый — 0...5 К, второй — 5...300 К. При фиксированном времени t_1 температура вдоль оси OX_3 стремится к нулю. Однако из формулы (37) следует, что t_1 должно быть больше X_3 . Таким образом, при $t_1 = X_3$ должен быть фронт разрыва первого рода тепловой волны. Это четко прослеживается на зависимости температуры от времени при параметрическом изменении координаты X_3 (рис. 2, *з*). Здесь явно видны разрывы температурного профиля. На зависимостях, приведенных на рис. 2, *в*, они не видны ввиду большого масштаба по оси температуры в окрестности $X_3 = 0$.

Изотермы в сечении $X_1 = 0, 1$, т. е. близко к поверхности $X_3 = 0$, к которой подводится тепловой поток, приведены на рис. 3, *а*. Поскольку угол φ ориентации главных осей равен нулю, изотермы в виде эллипсов имеют оси, которые являются главными осями тензора теплопроводности. Сечения температурного распределения плоскостью $X_1 = 0$ или $X_2 = 0$ являются изотермами, внешне

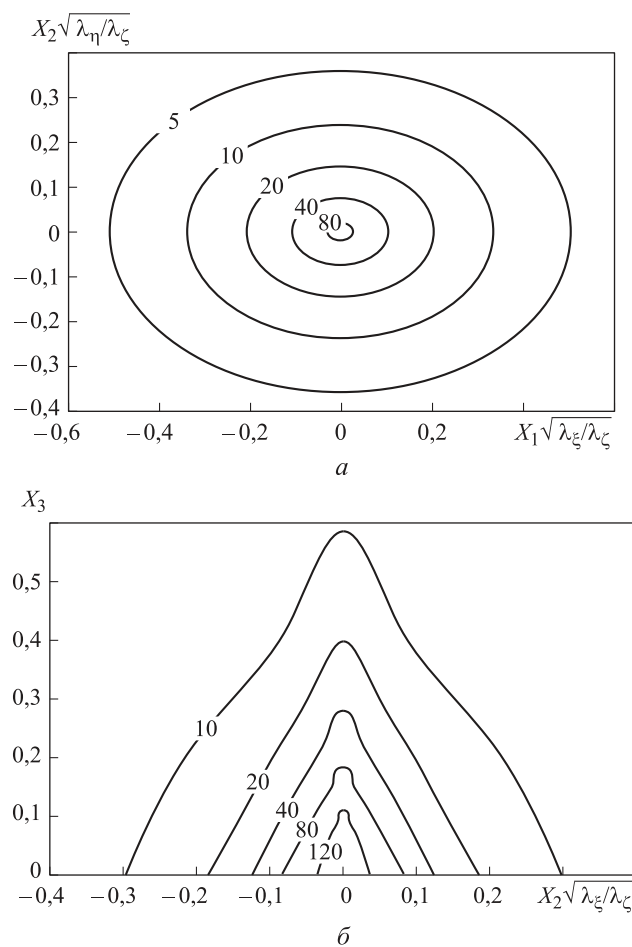


Рис. 3. Изотермы в плоскостях $X_3 = 0,1$ (а) и $X_2 = 0$ (б) при $t_1 = 5$

похожими на невыпуклые параболы. Такие изотермы, полученные сечением пространственного профиля плоскостью $X_2 = 0$, приведены на рис. 3, б. Следовательно, совокупность изотерм показывает, что пространственное распределение температуры в глубине тела имеет вид невыпуклых эллиптических параболоидов. При этом точки изотермы (см. рис. 3, б) под точкой приложения теплового потока имеют большую скорость движения в направлении оси OX_3 , чем точки на периферии изотерм. Отсюда наличие точек перегиба на изотермах в сечении $X_2 = 0$ (или в сечении $X_1 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // УФН. 1991. Т. 161. № 3. С. 5–29. DOI: 10.3367/UFNr.0161.199103b.0005
2. *Шашков А.Г., Бубнов А.В., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 296 с.
3. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 480 с.

4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
5. Карташов Э.М. Математическое моделирование теплопроводности с двухфазным запаздыванием // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 2. С. 338–347.
6. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 2. С. 301–310.
7. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 2. С. 393–408.
8. Формалев В.Ф. О тепловых ударных волнах в нелинейных твердых средах // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 6. С. 799–803.
9. Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 310 с.
10. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. № 2. С. 73–79.
11. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 3. С. 39–49.
12. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Нестационарный теплоперенос в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54. № 6. С. 876–882. DOI: 10.7868/S0040364416060247
13. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование сопряженного теплообмена на границах анизотропных тел // Теплофизика высоких температур. 2002. Т. 40. № 6. С. 993–998.
14. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.

Формалев Владимир Федорович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4).

Колесник Сергей Александрович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4).

Селин Илья Александрович — канд. физ.-мат. наук, инженер Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. Локально-неравновесный теплоперенос в анизотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 5. С. 99–111. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-99-111

LOCAL NON-EQUILIBRIUM HEAT TRANSFER IN AN ANISOTROPIC HALF-SPACE AFFECTED BY A NON-STEADY STATE POINT HEAT SOURCE

V.F. Formalev

S.A. Kolesnik

I.A. Selin

formalev38@yandex.ru

dergey@oviont.com

i.selin@bk.ru

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Abstract

The study applies a new analytical solution to investigating a local thermal non-equilibrium occurring when wave heat transfer takes place in the vicinity of spacetime boundaries of an anisotropic half-space affected by a time-dependent point heat source. The time delay between the heat flow and the temperature gradient, which is equal to the relaxation time, causes the local non-equilibrium. It may be clearly observed in the vicinity of the boundaries when the time is short and thus comparable to the relaxation time. We show how the non-steady-state temperature field initially forms; considerably differing from that in the cases when there is no relaxation time, both quantitatively and qualitatively. Specifically, at the boundaries of moving fronts the temperature field undergoes discontinuities of the first kind, characteristic of the wave heat transfer. These discontinuity magnitudes tend towards zero over time; however, the second derivatives of the temperature profile with respect to spacelike variables are not continuous anyway. We analyse new numerical results. The paper is pertinent in the field of fast processes of relativistic mechanics

Keywords

Wave heat transfer, relaxation time, local non-equilibrium, heat transfer in an anisotropic half-space

Received 28.12.2017

© BMSTU, 2018

The study was supported by a Russian Science Foundation (grant no. 16-19-10340)

REFERENCES

- [1] Sobolev S.L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium. *Sov. Phys. Usp.*, 1991, vol. 34, no. 3, pp. 217–229. DOI: 10.1070/PU1991v034n03ABEH002348
- [2] Shashkov A.G., Bubnov A.V., Yanovskiy S.Yu. *Volnovye yavleniya teploprovodnosti* [Wave phenomena of thermal conductivity]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 296 p.
- [3] Lykov A.V. *Teplomassoobmen* [Heat-mass exchange]. Moscow, Energiya Publ., 1978. 480 p.
- [4] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskoe modelirovanie termomekhaniki* [Mathematical simulation of thermo-dynamics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 168 p.
- [5] Kartashov E.M. Mathematical models of heat conduction with a two-phase lag. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, iss. 2, pp. 346–356. DOI: 10.1007/s10891-016-1385-9
- [6] Kudinov V.A., Kudinov I.V. Studying heat conduction taking into account the finite rate of heat propagation. *High Temperature*, 2013, vol. 51, iss. 2, pp. 268–276. DOI: 10.1134/S0018151X1204013X

- [7] Kudinov V.A., Kudinov I.V. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, iss. 2, pp. 406–422. DOI: 10.1007/s10891-015-1206-6
- [8] Formalev V.F. Thermal shock waves in nonlinear solid media. *High Temperature*, 2012, vol. 50, iss. 6, pp. 744–748. DOI: 10.1134/S0018151X12050033
- [9] Formalev V.F. Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach [Heat conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods of problems solving]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 310 p.
- [10] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of an anisotropic half-space with movable boundary being under influence of external heat flux. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2015, vol. 7, no. 2, pp. 73–79 (in Russ.).
- [11] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of the anisotropic half-space, which mobile boundary contains the film coating. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of RAS. Power Engineering], 2015, no. 3, pp. 39–49 (in Russ.).
- [12] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Nonstationary heat transfer in anisotropic half-space under the conditions of heat exchange with the environment having a specified temperature. *High Temperature*, 2016, vol. 54, iss. 6, pp. 824–830. DOI: 10.1134/S0018151X16060249
- [13] Formalev V.F., Kolesnik S.A. An analytical study into conjugate heat transfer on the boundaries of anisotropic bodies. *High Temperature*, 2002, vol. 40, iss. 6, pp. 926–932. DOI: 10.1023/A:1021445804770
- [14] Formalev V.F. Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennyye metody, teplovyye volny, obratnyye zadachi [Heat transfer in anisotropic bodies. Numerical methods, heat waves, reverse problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2015. 280 p.

Formalev V.F. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Kolesnik S.A. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Selin I.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Engineer, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Formalev V.F., Kolesnik S.A., Selin I.A. Local Non-Equilibrium Heat Transfer in an Anisotropic Half-Space Affected by a Non-Steady State Point Heat Source. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 5, pp. 99–111. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-99-111