УДК 539.374

К. И. Романов

ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Показано, что выделенные в работе автора [1] *операторы, дающие однородные функции, позволяют разрешить неявные функциональные уравнения. Определены переходные функции с приложениями к механике грунтов.*

E-mail: romanovki@mail.ru

Ключевые слова: ползучесть, функциональные уравнения, механика грунтов.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение состояния теории ползучести

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \Omega(t)\sigma^n, \tag{1}$$

где ε — деформация; σ — напряжение; E и n — постоянные; $\Omega(t)$ — функция времени.

На рис. 1 показаны различные варианты использования уравнения (1). Перевод (рис. 1, *а*) заданной программы $\sigma(t)$ в $\varepsilon(t)$ осуществляется самим функциональным уравнением. Второй вариант (рис. 1, *б*) в реальном масштабе времени затруднен даже с использованием однородных функций, поскольку последние заданы в операторной переменной $\omega = \beta\Omega$, где β — безразмерная постоянная известной структуры [1]. В частности, β включает в себя начальные условия.

Однако, обращение (рис. 1, *в*) уравнения (1) возможно в переменной ω с помощью интегральных уравнений. Производная уравнения (1) имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\Omega}{dt}\sigma^n + \Omega\frac{d\sigma^n}{dt}, \tag{2}$$

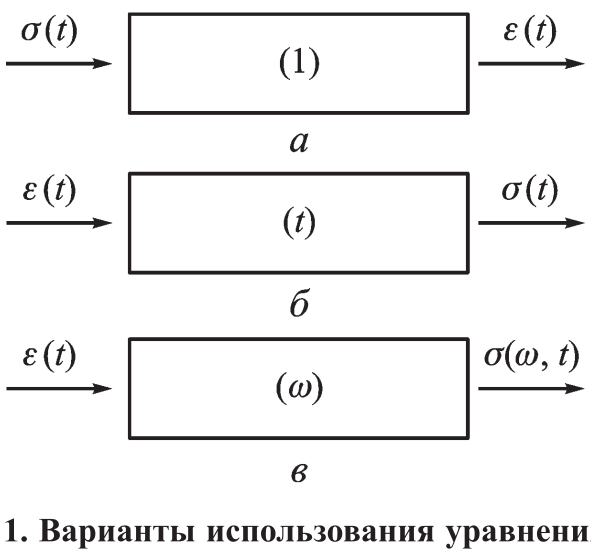

Рис. 1. Варианты использования уравнения (1)

где $d\Omega/dt = B$; $\Omega(0) = 0$.

Проинтегрируем уравнение (2) с учетом начального условия: при $t = 0 \;\; \varepsilon(0) = \sigma(0)/E$. Тогда

$$\varepsilon - \varepsilon(0) = \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma(0)}{E} + \int_0^\Omega \sigma^n d\Omega + \int_0^\sigma \Omega d\sigma^n.$$

Начальное условие приводит к нелинейному интегральному уравнению

$$\sigma = E\varepsilon - E\int \sigma^n d\Omega - E\int \Omega d\sigma^n \tag{3}$$

и к его частным случаям: в статической теории ползучести

$$\sigma = E\varepsilon - E\int \sigma^n d\Omega \tag{4}$$

и в динамической теории ползучести

$$\sigma = E\varepsilon - E\int \Omega d\sigma^n \tag{5}$$

Подставив в уравнения (3)–(5) однородные функции, в результате интегрирования получим в правой части явные функции времени, решающие поставленную задачу (см. рис. 1, *в*).

Отметим, что формально уравнение (1) можно представить в обращенной форме

$$\sigma = E\varepsilon - E\Omega\sigma^n.$$

Преимуществом неявных функционалов (3)–(5) является свобода выбора однородных функций. Можно, например, в (3) подставить два разных оператора — один убывающий, другой возрастающий. Относительно параметра β можно сделать вывод, что он является переменным по пространственной координате. Источником такой неоднородности помимо начальных условий оказываются, например, остаточные напряжения [2], в частности вторичные [3]. В механике грунтов [4] постоянная β может быть принята $\beta = \Omega_*$, определяемой экспериментально для разных элементов конструкций.

В случае задач, связанных с фундаментами зданий, уравнения (3)–(5) переносятся на свойства основания с помощью алгоритмов теории управления [5] путем замены σ на реакцию основания, ε — на прогиб, а E — на коэффициент пропорциональности c [6].

В полученных интегральных уравнениях выделим два функционала

$$Y = \int \sigma^n d\Omega$$

и

$$\Phi = \int \Omega d\sigma^n.$$

Определим их как передаточные функции теории ползучести. Для решения уравнений (3)–(5) существует ряд методов [7, 8]. В настоящей работе предлагается приближенный способ решения нелинейных интегральных уравнений, связанный с нахождением передаточных функций в классе однородных операторов.

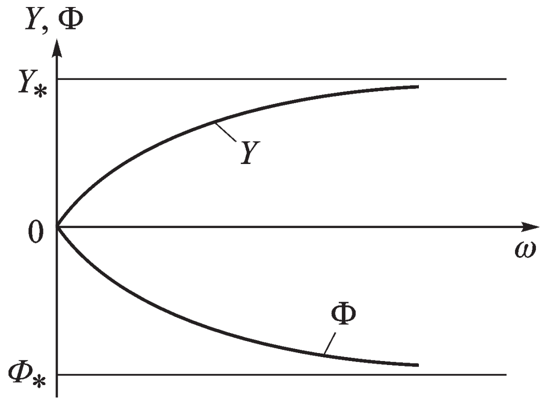

Рис. 2. Функции операторной переменной

Релаксационный оператор. Полагаем $(n > 1)$

$$\sigma = \sigma(0)\Delta, \quad \Delta = (1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Тогда Y и Φ оказываются явными функциями операторной переменной:

$$Y = \frac{(n-1)\,\sigma(0)^n}{\beta}\left[1 - (1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}\right];$$

$$\Phi = \frac{n\sigma(0)^n}{\beta}\left[(1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}(1+\omega)^{-\frac{n}{n-1}} - \frac{n-1}{n}\right].$$

На рис. 2 изображен примерный вид этих функций с учетом соотношения

$$Y_* = -\Phi_* = \frac{(n-1)\,\sigma(0)^n}{\beta}.$$

С релаксационным оператором уравнения (3)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{n-1}{\beta}\sigma(0)^n\left[1 - (1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}\right] + \\ + \frac{n\sigma(0)^n}{\beta}\left[(1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}(1+\omega)^{-\frac{n}{n-1}} - \frac{n-1}{n}\right]$$

решают поставленную задачу в операторной переменной

$$\sigma = E\varepsilon - \frac{E\sigma(0)^n\Delta^n}{\beta}\omega = E\varepsilon - E\sigma(0)^n\Omega\,(1+\omega)^{-\frac{n}{n-1}}.$$

Балка на реономном основании. Рассмотрим изгиб балки (рис. 3) равномерно распределенной по длине l нагрузкой q. Реакцию основания примем в виде

$$q_G = cy - c\,[cy(0)]^n\,\Omega\,(1+\omega)^{-\frac{n}{n-1}},$$

где y — прогиб.

С использованием решения [9] для материала балки имеем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 y(0)}{\partial z^2} - \tilde{\Omega}\frac{M^m}{J_{mx}^m},$$

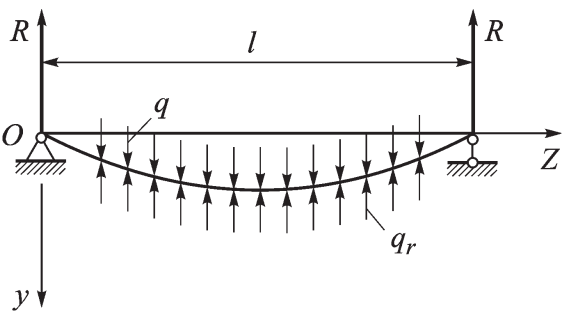

Рис. 3. Схема изгиба балки

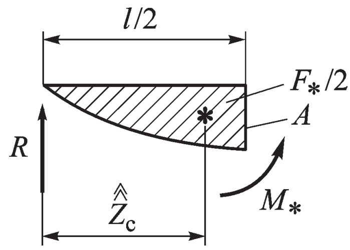

Рис. 4. Силовые факторы в точке коллокации

где $\partial^2 y/\partial z^2 = \chi$ — кривизна изогнутой оси в деформированном состоянии; $\partial^2 y(0)/\partial z^2 = \chi(0)$; z — координата; $\tilde{\Omega}, m$ — параметры материала; J_{mx} — обобщенный момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси x.

Нагрузка, действующая на балку,

$$p = q - q_G = q - cy + c\left[cy(0)\right]^n \Omega\left(1+\omega\right)^{-\frac{n}{n-1}}$$

определяет реакции в опорах:

$$2R = \int_0^l pdz = ql - cF_* + c^{n+1}\Omega F_n^*(0),$$

$$F_* = \int\limits_0^l ydz, \quad F_n^*(0) = \int\limits_0^l \left(1+\omega\right)^{-\frac{n}{n-1}}\left[y(0)\right]^n dz,$$

где F^* — ометаемая площадь в деформированном состоянии; $F_n^*(0)$ — обобщенная ометаемая площадь в начальном состоянии, соответствующем упругому нагружению.

Следовательно,

$$R = \frac{ql}{2} - \frac{cF_*}{2} + \frac{1}{2}c^{n+1}\Omega F_n^*(0)$$

и (рис. 4) в точке коллокации

$$M_* = R\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\int\limits_0^{l/2} pdz + \int\limits_0^{l/2} pz\,dz.$$

Поэтому

$$M_* = \frac{ql^2}{8} - \frac{c\hat{\hat{z}}_c F_*}{2} + \frac{l^2}{8}c^{n+1}\Omega F_n^*(0)$$

и

$$\chi_* = \chi_*(0) - \frac{\tilde{\Omega}}{J_{mx}^m}\left[\frac{ql^2}{8} - \frac{c\hat{\hat{z}}_c F_*}{2} + \frac{l^2}{8}c^{n+1}\Omega F_n^*(0)\right]^m.$$

Явно входящее время соответствует хронотопии. Отметим, что Ω может быть постоянной или, вообще, $\Omega = 0$ в случае упругого основания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р о м а н о в К. И. Однородные функции операторной переменной // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2010. – № 1. – С. 37–44.
2. О с т а т о ч н ы е напряжения в металлах и металлических конструкциях / Сб. статей под ред. В. Осгуда. – М.: Изд-во иностр.лит-ры, 1957. – 395 с.
3. Р о м а н о в К. И. Вторичные пластические деформации в стержневых системах: Методические указания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1995. – 30 с.
4. Ш у к л е Л. Реологические проблемы механики грунтов. – М.: Стройиздат. – 1976. – 485 с.
5. Р а с ч е т ы и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Расчетно-экспериментальный метод прогнозирования индивидуальных деформационных свойств элементов конструкций в условиях ползучести при нестационарном нагружении. Методические рекомендации. – Куйбышев: КПТИ. – 1984. – 22 с.
6. Ф е о д о с ь е в В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1985. – 512 с.
7. З а б р е й к о П. П., К о ш е л е в А. И., К р а с н о с е л ь с к и й М. А. и др. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
8. Б а д а л о в Ф. Б. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. – Ташкент: ФАН, 1980. – 224 с.
9. М а л и н и н Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

Статья поступила в редакцию 30.03.2010

Константин Игоревич Романов — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

K.I. Romanov — D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University.