УДК 517.538.5+517.956.2

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ НА ПЛОСКИХ КОМПАКТАХ РЕШЕНИЯМИ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

К. Ю. Федоровский

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва (e-mail: afky@yandex.ru)

Получены новые достаточные условия равномерной приближаемости функций на плоских компактах решениями однородных эллиптических уравнений с постоянными комплексными коэффициентами. Полученные условия приближаемости носят метрический и топологический характер.

Ключевые слова: однородный эллиптический оператор, равномерная аппроксимация, локализационный оператор Витушкина.

ON UNIFORM APPROXIMATION OF FUNCTIONS ON PLANAR COMPACTS BY SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS ELLIPTIC EQUATIONS

K. Yu. Fedorovskii

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, (e-mail: afky@yandex.ru)

The new sufficient conditions of the uniform-approximation ability of functions on planar compacts by solutions of homogeneous elliptic equations with constant complex-valued coefficients are derived. The obtained conditions are of the metric and topologic nature.

Keywords: homogeneous elliptic operator, uniform approximation, Vitushkin's localization operator.

В настоящей работе изучаются условия равномерной приближаемости функций решениями (полиномиальными и мероморфными с локализованными особенностями) однородных эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^2$.

Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть n — натуральное число, а $L(x_1, x_2)$ — однородный многочлен от двух вещественных переменных x_1 и x_2 степени n с комплексными коэффициентами, т.е.

$$L(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k,s\in\{0,\dots,n\}\\ k+s=n}} c_{k,s} x_1^k x_2^s,$$

где $c_{k,s} \in \mathbb{C}$. Предположим, что L удовлетворяет *условию эллиптичности*, которое состоит в том, что $L(x_1, x_2) = 0$ только при $x_1 = x_2 = 0$, и определим дифференциальный оператор L следующим образом:

$$L := L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right). \tag{1}$$

В этом случае L — *однородный эллиптический дифференциальный оператор в* $\mathbb{R}^2$ *порядка* n *с постоянными комплексными коэффициентами*. Для упрощения обозначений однородный многочлен $L(x_1, x_2)$ и соответствующий дифференциальный оператор L традиционно обозначаются одним и тем же символом. Это допустимо, так как не приводит к неоднозначности.

Всюду в дальнейшем через z обозначается как комплексное число $x_1 + ix_2$, так и точка (x_1, x_2) плоскости $\mathbb{R}^2$.

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $\mathcal{O}_L(E)$ совокупность всех комплекснозначных функций f, каждая из которых определена и удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению

$$Lf = 0 \tag{2}$$

на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E. Функции класса $\mathcal{O}_L(E)$ будем называть *L-аналитическими* на множестве E.

Классическими примерами операторов рассматриваемого вида являются стандартные операторы Коши–Римана $\bar\partial := \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + {}$ ${} + i\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big)$ и Лапласа Δ, а также их степени $\bar\partial^n$ и Δ^n, $n \in \mathbb{N}$. При этом L-аналитические функции — это обычные голоморфные и гармонические функции, а также полианалитические и полигармонические функции соответственно.

Обозначим через $\mathcal{P}_L$ совокупность всех многочленов от переменных x_1 и x_2 с комплексными коэффициентами, являющихся решениями уравнения (2). Такие многочлены называются *L-аналитическими многочленами*

Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных на X комплекснозначных функций с равномерной нормой и определим пространства $P_L(X)$ и $R_L(X)$ как замыкания в $C(X)$ подпространств $\{p_{|X} : \ p \in \mathcal{P}_L\}$ и $\{g_{|X} : g \in \mathcal{O}_L(X)\}$ соответственно. При этом $P_L(X)$ и $R_L(X)$ — это в точности пространства функций, допускающих равномерную на X аппроксимацию L-аналитическими многочленами и L-аналитическими функциями с особенностями вне X соответственно. Отметим, что в последнем случае в качестве приближающих функций достаточно рассматривать только конечные линейные комбинации функций вида $\Phi_L(z-a)$, $a \notin X$, где Φ_L — фундаментальное решение для оператора L. Другими словами, $R_L(X)$ — это пространство функций, допускающих равномерную на X аппроксимацию мероморфными L-аналитическими функциями с полюсами, лежащими вне X. Определим также пространство $A_L(X) := C(X) \cap \mathcal{O}_L(X^\circ)$, где через E° обозначается внутренность множества $E \subset \mathbb{R}^2$.

Так как равномерный предел последовательности L-аналитических в некоторой области функций снова является L-аналитической (в той же области) функцией, то $P_L(X) \subset A_L(X)$ и $R_L(X) \subset A_L(X)$ для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^2$. Таким образом, условие L-аналитичности данной функции $f \in C(X)$ на внутренности X° компакта X является естественным необходимым условием равномерной приближаемости этой функции на X как L-аналитическими многочленами, так и L-аналитическими мероморфными функциями с особенностями вне X.

Естественно, возникают задачи описания компактов $X \subset \mathbb{R}^2$, для которых выполняются равенства $P_L(X) = A_L(X)$ и $R_L(X) = A_L(X)$ соответственно. Эти задачи являются непосредственными и естественными обобщениями классических задач об аппроксимации функций многочленами и рациональными функциями комплексного переменного, восходящих к Вейерштрассу и Рунге.

Пусть $B(a, r)$ — открытый круг с центром в точке $a \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $r > 0$. Если $B = B(a, r)$, то $qB = B(a, qr)$, $q > 0$.

Определение. Скажем, что компакт $X \subset \mathbb{R}^2$ обладает свойством *достаточности дополнения*, если существует число $\ell = \ell(X) \geq 1$ такое, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ и для любой точки $a \in \mathbb{R}^2$ с условием $B(a, \delta) \cap \partial X \neq \varnothing$ существует гладкая жорданова дуга $\gamma \subset B(a, \ell\delta)$ такая, что $\operatorname{diam}\gamma = \delta$, $\gamma \cap X = \varnothing$, а расстояние между концевыми точками γ равно δ.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$, для которого выполняется условие достаточности дополнения. Тогда $A_L(X) = R_L(X)$.*

Приведем ряд достаточных условий метрического и топологического характера, при выполнении которых для компакта X в $\mathbb{R}^2$ выполняется условие достаточности дополнения. Для $z \in \mathbb{R}^2$ и $r > 0$ определим величину $d(z, r, X)$ как верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $B(z, r) \setminus X$ и введем величину

$$\theta(X) := \inf\left\{\frac{d(z, r, X)}{r} : \ z \in \partial X, \ r > 0\right\}.$$

Кроме того, обозначим через $\hat{X}$ объединение компакта X и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

Напомним, что компакты X, обладающие свойством $\partial X = \partial \hat{X}$, называются *компактами Каратеодори*. Они естественно возникают во многих задачах теории приближений.

Теорема 2. *Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^2$.*

(1). *Если выполняется одно из следующих условий*:
(i) $\theta(X) > 0$;
(ii) *нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ положительна*;
(iii) *каждая граничная точка компакта X является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$*;
(iv) $\partial X = \partial \hat{X}$ (*т.е. X — компакт Каратеодори*),
то для компакта X выполняется условие достаточности дополнения и, следовательно, $A_L(X) = R_L(X)$.

(2) *Если множество $\mathbb{R}^2 \setminus X$ связно, то $A_L(X) = P_L(X)$.*

Замечание 1. Так как компакты, имеющие связное дополнение, удовлетворяют условию достаточности дополнения, то утверждение (2) теоремы 2 получается из теоремы 1 с использованием классического метода Рунге (в случае аппроксимации решениями общих эллиптических уравнений этот метод подробно описан, например, в [1, §3.10]).

Отметим также, что если выполнено условие (i) теоремы 2, то свойство достаточности дополнения выполняется для компакта X при $\ell = 2/\theta(X)$. Условия (ii), (iii) и (iv) теоремы 2 гарантируют выполнение условия достаточности дополнения для X при $\ell = 2$. При этом условия (ii)–(iv) теоремы 2 проверяются намного проще, чем условие достаточности дополнения в теореме 1 или чем условие (i).

Таким образом, необходимо доказательство только теоремы 1.

Все результаты теорем 1 и 2 являются новыми для операторов L, фундаментальное решение которых не является локально ограниченным. Для операторов L, имеющих локально ограниченное фундаментальное решение, равенство $A_L(X) = R_L(X)$ выполнено для любого компакта X в силу [2, теорема 1]. Для операторов L порядка 2 утверждения теорем 1 и 2 были получены ранее в [3, теорема 1.1 и предложение 3.1].

Отметим также, что утверждения теоремы 1 и первой части теоремы 2 в голоморфном (при $L = \bar{\partial}$) и гармоническом (при $L = \Delta$) случаях непосредственно вытекают из критерия А.Г. Витушкина равномерной приближаемости функций рациональными дробями [4, гл. V] и критериев М.В. Келдыша [5] и Ж. Дени [6] равномерной приближаемости гармоническими функциями.

Утверждение второй части теоремы 2 при $L = \bar{\partial}$ вытекает из теоремы С.Н. Мергеляна [7], которая утверждает, что $P_{\bar{\partial}}(X) = A_{\bar{\partial}}(X)$, если и только если множество $\mathbb{R}^2 \setminus X$ связно. При $L = \Delta$ соответствующее утверждение является следствием критерия Дж. Уолша и А. Лебега [8; 9, теорема 3.3; 10, §1], согласно которому равенство $P_\Delta(X) = A_\Delta(X)$ имеет место, если и только если компакт X является компактом Каратеодори.

Таким образом, критерии Мергеляна и Уолша–Лебега равномерной приближаемости функций многочленами комплексного переменного и гармоническими многочленами формулируются в терминах топологических свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация.

В работе [3] отмечено, что если $\mathrm{ord}L = 2$, то найдется такой эллипс или такая окружность X_L, что $P_L(X) = C(X_L)$. Таким образом, условие связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus X$ не является необходимым для выполнения равенства $P_L(X) = A_L(X)$ при $\mathrm{ord}L = 2$. Более того, если оператор L имеет порядок 2 и обладает локально ограниченным фундаментальным решением, то найдутся такие эллипс Y_L и точка a, лежащая в ограниченной эллипсом Y_L области, что $P_L(Y_L \cup \{a\}) = C_L(Y_L \cup \{a\})$. Таким образом, условие, состоящее в том, что X является компактом Каратеодори, также не будет необходимым для выполнения равенства $P_L(X) = A_L(X)$ для указанных операторов L.

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, а $L = \bar{\partial}^n$. В этом случае $P_L(X) = P_{\bar{\partial}^n}(X)$ — это в точности пространство функций, допускающих равномерное на X приближение полианалитическими многочленами порядка n, т.е. многочленами вида $\overline{z}^{n-1}p_{n-1}(z)+\cdots+\overline{z}p_1(z)+ + p_0(z)$, где $p_{n-1}, \ldots, p_0$ — многочлены комплексного переменного. В задаче о совпадении пространств $P_{\bar{\partial}^n}(X)$ и $A_{\bar{\partial}^n}(X)$ возникают условия на компакт X, имеющие аналитическую (а не топологическую) природу. Эта задача и характер возникающих в ней условий приближаемости подробно обсуждаются, например, в работах [11, 12].

Доказательства. Перед тем как приступать к доказательству теоремы 1, приведем ряд необходимых свойств оператора L и L-аналитических функций. Кроме того, определим локализационный оператор Витушкина для L и установим необходимые свойства этого оператора.

Всюду в дальнейшем через $A, A_0, A_1, \ldots$ обозначены положительные постоянные, значения которых могут быть различными в разных соотношениях, а через $q, q_0, q_1, \ldots$ — постоянные, значения которых фиксируются до конца изложения.

Введем следующие обозначения. Пару $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, где $\mathbb{Z}_+= = \{0, 1, 2, \ldots\}$, будем называть 2-индексом. Для 2-индекса α и для

$z \in \mathbb{R}^2$ положим $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!$ и $z^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Введем также дифференциальные операторы

$$\partial_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 := \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial^\alpha = \partial^{(\alpha_1, \alpha_2)} := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}.$$

Пусть Y — некоторое подмножество $\mathbb{R}^2$, а f — заданная на Y комплекснозначная функция. Положим $\|f\|_Y := \sup_{z \in Y} |f(z)|$. При $Y = \mathbb{R}^2$ индекс Y опускается. Для функции f класса C^m и для $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leq m$, положим

$$\|\nabla^s f\|_Y := \max_{0 \leq t \leq s} \|\partial^{(s-t,t)} f\|_Y.$$

Пусть далее $\omega_Y(f, \delta) := \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| : \ z_1, z_2 \in Y, \ |z_1 - z_2| \leq \delta\}$ — модуль непрерывности f на Y, причем при $Y = \mathbb{R}^2$ индекс Y опускается. Если f — функция класса C^m, а $s \in \{0, \ldots, m\}$ то

$$\omega_Y(\nabla^s f, \delta) := \max_{0 \leq t \leq s} \omega_Y(\partial^{(s-t,t)} f, \delta).$$

Обозначим через $\mathrm{Supp} T$ — носитель распределения T, через $\langle T | \varphi \rangle$ — действие распределения T на функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, а через $T_1 * T_2$ — свертку распределений T_1 и T_2.

Известно [13, теорема 7.1.20], что оператор L имеет фундаментальное решение $\varPhi$ вида

$$\varPhi(z) = E(z) - P(z) \log |z|,$$

где $E(\cdot)$ — вещественно-аналитическая в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ функция, однородная степени $n-2$, а $P(\cdot)$ — однородный многочлен (от переменных x_1 и x_2) степени $n-2$ (если $n < 2$, то $P \equiv 0$). Кроме того, при $z \neq 0$ и при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ имеет место очевидная оценка

$$\left|\partial^\alpha \varPhi(z)\right| \leq A\alpha! |z|^{n-2-|\alpha|} (\log |z| + 1). \tag{3}$$

Наряду с фундаментальным решением $\varPhi$ потребуется фундаментальное решение $\varPhi_\delta$, определяемое при $\delta > 0$ следующим образом:

$$\varPhi_\delta(z) = E(z) - P(z) \log \frac{|z|}{\delta}.$$

При этом $\varPhi(z) - \varPhi_\delta(z) = P(z) \log(1/\delta)$ — однородный многочлен степени $n-2$. Кроме того, при $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ с условием $|\alpha| > n-2$

$$\partial^\alpha \varPhi_\delta(z) = \partial^\alpha \varPhi(z),$$

а при $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$ с условием $|\alpha| \leq n-2$ и при $|z| \leq \delta$ выполняются оценки

$$|\partial^\alpha \varPhi_\delta(z)| \leq A\delta^{n-2-|\alpha|}. \tag{4}$$

Напомним, что L-аналитические функции допускают разложения в ряды типа Лорана. Путь $\varPhi$ — любое фундаментальное решение для оператора L. Возьмем распределение T с носителем в круге $B = B(a, r)$ и определим функцию $f = \varPhi * T$. Тогда существует $q_0 = q_0(L) \geq 1$ такая, что функция f разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \varPhi(z - a), \tag{5}$$

сходящийся в смысле $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus q_0 B)$ [14; 15, §7, п. 2]. Коэффициенты $c_\alpha = c_\alpha(f, a)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^2_+$, в разложении (5) вычисляются по формулам

$$c_\alpha = c_\alpha(f, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \big\langle T(w) | (w - a)^\alpha \big\rangle. \tag{6}$$

Предположим, что фундаментальное решение $\varPhi$ для оператора L выбрано так, что

$$\max_{|z|=1} \big\{ |E(z)|, |P(z)| \big\} \leq A,$$

а фундаментальное решение $\varPhi_\delta$ при $\delta > 0$ построено по этому $\varPhi$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Определим *локализационный оператор Витушкина* для L [4, 14] $V_\varphi : C_0^\infty(\mathbb{R}^2)' \to C_0^\infty(\mathbb{R}^2)'$ по формуле

$$V_\varphi f = \varPhi * (\varphi L f).$$

Отметим, что $V_\varphi f = V_{\varphi,\delta} f + P_1$, где $V_{\varphi,\delta} f = \varPhi_\delta * (\varphi L f)$ — локализационный оператор, построенный по фундаментальному решению $\varPhi_\delta$, а $P_1 = \log(1/\delta) P * (\varphi L f)$ — многочлен степени не выше $n - 2$. Так как $L P_1 = 0$, то P_1 — L-аналитический многочлен.

Установим необходимые в дальнейшем свойства оператора $V_{\varphi,\delta}$. Следующая лемма является непосредственным аналогом [3, предложение 2.5].

Лемма 1. *Пусть* $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{Supp} f \subset B = B(0, R/2)$, $R \geq 2$. *Тогда для любой точки* $a \in B$, *для любого* $\delta \in (0, 1)$ *и для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(B(a, \delta))$ *функция* $F := V_{\varphi,\delta} f$ *обладает следующими свойствами*:

(1) $F \in C_{loc}(\mathbb{R}^2)$, *причем* $LF = 0$ *на множестве* $\mathbb{R}^2 \setminus \big(\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} \varphi\big)$.

(2) *Для любого* $\lambda \geq 1$ *имеет место неравенство*

$$\|F\|_{B(a, \lambda\delta)} \leq A k(\lambda) \delta^n \omega(\delta) \|\nabla^n \varphi\|, \tag{7}$$

где $k(\lambda) = (\lambda + 1)^{n-2} \ln(\lambda + 1)$, *а* $\omega(t) = \omega_{\overline{B(a,\delta)}}(f, t)$.

(3) *Для любого 2-индекса* α *справедлива оценка*

$$|c_\alpha(F, a)| \leq A \delta^{|\alpha|+2} \omega(\delta) \|\nabla^n \varphi\| / \alpha!. \tag{8}$$

Доказательство. Доказательство проведем для случая $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Общий случай получается регуляризацией. Утверждение (1) доказывается стандартно (см., например, доказательство предложения 2.5 в работе [3]).

Отметим, что
$$\|\nabla^\ell \varphi\| \le A\delta^{m-\ell}\|\nabla^m \varphi\|, \tag{9}$$
при $\ell = 0, 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$.

Из определения функции F следует (все производные в угловых скобках $\langle\cdot|\cdot\rangle$ берутся по переменному w), что
$$F(z) = \langle \Phi_\delta(w-z)|\varphi(w)Lf_a(w)\rangle,$$
где $f_a(w) = f(w) - f(a)$. Отсюда получаем, что выражение
$$(-1)^n F(z) - \varphi(z)f_a(z) = \langle L(\varphi(w)\Phi_\delta(w-z))|f_a(w)\rangle - \varphi(z)f_a(z)$$
представляет собой сумму выражений вида $k\langle\partial^\sigma\Phi_\delta(w-z)|\partial^\tau\varphi(w)f_a(w)\rangle$, где k — постоянный коэффициент, а 2-индексы σ и τ таковы, что $|\sigma| \le n-1$ и $|\sigma| + |\tau| = n$.

Пусть $z \in B(a, \lambda\delta)$. Тогда $|\varphi(z)f_a(z)| \le \omega(\delta)\|\varphi\| \le A\delta^n\|\nabla^n\varphi\|\omega(\delta)$, а величина $|k\langle\partial^\sigma\Phi_\delta(w-z)|\partial^\tau\varphi(w)f_a(w)\rangle|$ допускает следующую оценку (используются (3), (4) и (9) и учитывается вид фундаментального решения Φ_δ, а также тот факт, что функции E и P однородные степени $n-2$):
$$|\langle\partial^\tau\varphi(w)\partial^\sigma\Phi_\delta(w-z)|f_a(w)\rangle| \le$$
$$\le \|\nabla^{|\tau|}\varphi\|\omega(\delta)\delta^{n-|\sigma|}\max_{z\in B(0,\lambda)}\int\limits_{B(0,1)}|\partial^\alpha\Phi_\delta(w-z)|\,d\overline{w}\wedge dw \le Ak(\lambda)\delta^n\|\nabla^n\varphi\|\omega(\delta).$$
Таким образом, оценка (7) установлена.

Оценка (8) проверяется намного проще. Пусть α — произвольный 2-индекс. Тогда из неравенства
$$\left|\int\limits_{B(a,\delta)}\partial^\tau\varphi(w)\partial^\sigma(w-a)^\alpha\,d\overline{w}\wedge dw\right| \le A\delta^2\|\nabla^{|\tau|}\varphi\|\delta^{|\alpha|-|\sigma|} \le A\delta^{|\alpha|+2}\|\nabla^n\varphi\|,$$
справедливого для любых 2-индексов σ и τ таких, что $|\sigma| + |\tau| = n$ и $|\sigma| \le |\alpha|$, вытекает, что
$$\alpha!|c_\alpha(F,a)| = |\langle\varphi(w)Lf_a(w)|(w-a)^\alpha\rangle| \le A\delta^{|\alpha|+2}\omega(\delta)\|\nabla^n\varphi\|. \quad \Box$$

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности предположим, что f имеет компактный носитель. Пусть $f \in C_0(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{O}_L(X^\circ)$. До конца доказательства положим $\omega(\delta) := \omega(f, \delta)$, $\delta > 0$. Выберем число $R > 2$ так, что $\operatorname{Supp} f \cup X \subset B(0, R/2)$.

Для произвольного $\delta \in (0, 1)$ рассмотрим стандартное δ-разбиение единицы, т.е. для каждого 2-индекса $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ положим $a_j := j\delta = (j_1\delta, j_2\delta)$ и выберем функции $\varphi_j \in C_0^\infty(B(a_j, \delta))$ так, что $0 \le \varphi_j \le 1$, $\|\nabla^k\varphi_j\| \le A\delta^{-k}$ при $k = 0, \ldots, n$ и $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^2_+}\varphi_j \equiv 1$.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+^2$ рассмотрим функцию $f_j := \Phi_\delta * (\varphi_j Lf)$. В силу леммы 1 имеют место следующие свойства функций f_j. Во-первых, $f_j \in C_{loc}(\mathbb{R}^2)$, каждая из функций f_j является L-аналитической на X° (там же, где и функция f) и вне круга $B(a_j, \delta)$. Кроме того, для функций f_j выполняются следующие оценки:

$$\|f_j\|_{B(a_j, q\delta)} \leq A\omega(\delta), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \tag{10}$$

где значение $q \geq 1$ будет выбрано позднее, и

$$|c_\alpha(f_j, a_j)| \leq A\delta^{|\alpha|+2-n}\omega(\delta)/\alpha!, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2. \tag{11}$$

Далее (например, [16, лемма 1])

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^2} f_j(z),$$

причем соответствующая сумма конечна, так как $f_j \equiv 0$ при $\mathrm{Supp}(\varphi_j) \cap$ $\cap \mathrm{Supp}(Lf) = \varnothing$ (в частности, если $B(0, R) \cap B(a_j, \delta) = \varnothing$). Таким образом, исходная функция f представлена в виде суммы функций f_j с особенностями, локализованными в кругах $B(a_j, \delta)$, и для требуемого приближения функции f достаточно приблизить каждую из функций f_j с надлежащей точностью. Отметим также, что если $B(a_j, \delta) \subset X^\circ$, то $f_j \equiv 0$, а если $B(a_j, \delta) \cap X = \varnothing$, то f_j является L-аналитической функцией в окрестности X. Таким образом, нам необходимо приблизить только функции f_j для 2-индексов j, принадлежащих множеству $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{Z}_+^2 : \ B(a_j, \delta) \cap \partial X \neq \varnothing\}$.

Перейдем к построению соответствующих аппроксимант. Так как для компакта X выполнено условие достаточности дополнения, то найдется гладкая жорданова дуга $\gamma_j \subset B(a_j, \ell\delta)$, обладающая следующими свойствами: $\operatorname{diam} \gamma_j = \delta$, $\gamma_j \cap X = \varnothing$, а концевые точки этой дуги находятся на расстоянии δ друг от друга. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что δ настолько мало, что $B(a_j, \ell\delta) \subset B(0, R)$.

Для каждого $j \in \mathcal{J}$ построим компакт K_j такой, что $\gamma_j \subset K_j^\circ$, $K_j \subset B(a_j, \ell\delta)$ и $K_j \cap X = \varnothing$, и функцию g_j такую, что $Lg_j = 0$ вне K_j и имеют место следующие оценки:

$$\|g_j\|_{B(a_j, q\delta) \setminus K_j} \leq A\omega(\delta), \tag{12}$$

$$|c_\alpha(g_j, a_j)| \leq A\delta^{|\alpha|+2-n}\omega(\delta)/\alpha!, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \tag{13}$$

где $c_\alpha(g_j, a_j)$ — коэффициенты разложения (5) функции g_j относительно фундаментального решения Φ_δ. Кроме того, функция g_j должна быть выбрана так, чтобы

$$c_\alpha(f_j, a_j) = c_\alpha(g_j, a_j), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \ |\alpha| \leq n. \tag{14}$$

Для построения требуемых функций g_j воспользуемся одной специальной модификацией леммы 3.1 работы [3]. Пусть Γ — гладкая жорданова кривая диаметра δ в круге $B(0,2\delta)$, $\delta>0$. Тогда найдется функция g_Γ такая, что $\Delta g_\Gamma=0$ вне Γ (т.е. g_Γ — гармоническая функция вне Γ) и выполнены следующие оценки

$$\|g_\Gamma\|_{B(0,2R)\setminus\Gamma}\le A(|\ln\delta|+\ln R),$$
$$\|\partial^\alpha g_\Gamma\|_{\mathbb{R}^2\setminus\Gamma}\le A\delta^{-|\alpha|},\quad \text{при}\quad |\alpha|\le n+2.$$

Кроме того, при $|z|>2q_1\delta$, $q_1\ge1$, справедливо разложение

$$g_\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\ln|z|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{1,k}}{z^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{2,k}}{\overline{z}^k},$$

а коэффициенты $d_{1,k}$ и $d_{2,k}$ при $k\in\mathbb{N}$ таковы, что

$$|d_{1,k}|\le A\delta^k,\quad |d_{2,k}|\le A\delta^k.$$

Для построения функции g_Γ необходимо повторить процесс построения, описанный в доказательстве [3, лемма 3.1] для случая $L=\Delta$ с тем изменением, что вместо функций h_s, $s=1,2$, использованных в цитированном доказательстве, надо рассмотреть функции

$$h_s(z)=C_s\big(z^{n+2}(z-b_s)^{n+2}\sqrt{z(z-b_s)}-P_s(z)\big),\quad s=1,2,$$

где сохранены обозначения из [3, доказательство леммы 3.1], выбрана ветвь корня, голоморфная вне Γ_s и эквивалентная z при $z\to\infty$, а константы C_s и полиномы P_s подобраны при $s=1,2$ так, чтобы $\lim_{z\to\infty}zh_s(z)=1$.

Пусть теперь a_j^* — начальная точка дуги γ_j и пусть $\gamma_j^*:=\gamma_j-a_j^*=\{\zeta-a_j^*:\ \zeta\in\gamma_j\}$. Найдутся $q_2\ge1$ и $r_j>0$ такие, что $\gamma_j+\overline{B(0,r_j)}\subset B(a_j^*,q_2\delta)\setminus X$. Пусть функция $\rho\in C_0^\infty(B(0,1))$ такова, что $\int\rho(z)\,d\overline{z}\wedge dz=1$ и пусть $\rho_j(z):=\rho\big(zr_j^{-1}\big)r_j^{-2}$.

Определим функцию $\tilde g_j:=\Delta g_{\gamma_j^*}*\rho_j$ и функцию $\psi_j:=k_j\Phi_\delta*\tilde g_j$, где константа k_j будет выбрана позднее.

Так как $L\psi_j=k_j\tilde g_j$ и так как $K_j:=\operatorname{Supp}\tilde g_j\subset\gamma_j+B(0,r_j)$, то функция ψ_j будет L-аналитической в окрестности компакта X. При этом

$$\|\partial^\alpha\psi_j\|_{B(a_j,q\delta)\setminus K_j}\le A\delta^{n-2-|\alpha|}$$

при $|\alpha|\le n$, а при $|z-a_j^*|>2q_3\delta$, $q_3\ge1$, справедливо разложение

$$\psi_j(z)=\Phi_\delta(z-a_j^*)+\sum_{|\alpha|\ge1}\mu_{\alpha,j}\partial^\alpha\Phi_\delta(z-a_j^*),\tag{15}$$

где коэффициенты μ_α таковы, что

$$|\mu_{\alpha,j}|\le A\delta^{|\alpha|}/\alpha!.\tag{16}$$

Константа k_j в определении функции ψ_j выбирается так, чтобы коэффициент при $\Phi_\delta(z-a_j^*)$ в разложении (15) был равен 1. Положим также $\mu_{(0,0)}=1$. Определим наконец $q:=\max\{q_0,q_2,q_3\}$.

Функции g_j, $j \in \mathcal{J}$, мы будем искать в следующем виде:
$$g_j(z) := \sum_{|\alpha| \le n} \beta_{\alpha,j} \partial^\alpha \psi_j(z). \tag{17}$$
Коэффициенты $\beta_{\alpha,j}$ при $0 \le |\alpha| \le n$, однозначно определяются исходя из условий (14), которые в рассматриваемом случае имеют вид
$$c_\alpha(f_j, a_j^*) = \sum_{\tau_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\tau_2=0}^{\alpha_2} \beta_{\tau,j} \mu_{\alpha-\tau,j}, \tag{18}$$
где τ и $\alpha - \tau$ — это 2-индексы (τ_1, τ_2) и $(\alpha_1 - \tau_1, \alpha_2 - \tau_2)$ соответственно, представляющие собой невырожденную треугольную систему линейных уравнений. Отметим, что при $0 \le |\alpha| \le n$ коэффициенты $\beta_{\alpha,j}$ допускают оценку
$$|\beta_{\alpha,j}| \le A\delta^{|\alpha|+2-n} \omega(\delta). \tag{19}$$

Из (17) и (19) вытекают оценки (12) и (13) с заменой a_j на a_j^*. А оценка (13) для коэффициентов $c_\alpha(g_j, a_j)$ выводится из соответствующей оценки для коэффициентов $c_\alpha(g_j, a_j^*)$ аналогично тому, как это было сделано при доказательстве [3, теорема 3.2].

Итак, функции g_j, удовлетворяющие всем требуемым свойствам, построены. Для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что имеет место неравенство
$$\Bigl\| \sum_{j \in \mathcal{J}} (f_j - g_j) \Bigr\|_X \le A \ln R \, \omega(\delta), \tag{20}$$
правая часть которого стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Из равенств (14) и оценок (11) и (13) следует, что при всех z с условием $|z - a_j| > q\delta$ имеет место оценка
$$|f_j(z) - g_j(z)| \le \frac{A \ln R \, \delta^3 \omega(\delta)}{|z - a_j|^3}. \tag{21}$$
При $|z - a_j| < q\delta$, $z \notin K_j$, из (10) и (12) следует оценка
$$|f_j(z) - g_j(z)| \le A\omega(\delta). \tag{22}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $z \in X$. Для того чтобы доказать (20), воспользуемся известным методом “послойного” суммирования [4, § 4, лемма 1; 17, доказательство предложения 2.2]. Обозначим через $[t]$ целую часть числа t. Используя оценки (21) и (22), получаем неравенства
$$\Bigl| \sum_{j \in \mathcal{J}} \bigl(f_j(z) - g_j(z) \bigr) \Bigr| \le$$
$$\le \sum_{\substack{j \in \mathcal{J}, \\ |z-a_j|<q\delta}} \bigl| f_j(z) - g_j(z) \bigr| + \sum_{m=[q]}^{\infty} \sum_{\substack{j \in \mathcal{J}, \\ m\delta \le |z-a_j| < (m+1)\delta}} \bigl| f_j(z) - g_j(z) \bigr| \le$$

$$\leq \omega(\delta)\left(A_1 + A_2\delta^3 \ln R \sum_{m=[q]}^{\infty} \frac{A_0 m}{(m\delta)^3}\right) \leq$$

$$\leq \omega(\delta) \ln R\left(A_3 + A_4 \sum_{m=[q]}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) \leq A\omega(\delta) \ln R,$$

где учтено, что число N_m индексов j с условием $m\delta \leq |z - a_j| < (m + 1)\delta$ таково, что $N_m \leq A_0 m$.

Таким образом, оценка (20) установлена. Отметим, что в качестве функции, приближающей функцию f требуемым образом, можно взять функцию $\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j + \sum_{j \notin \mathcal{J}} f_j$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00434-а и 10-01-00837-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н а р а с и м х а н Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. – М.: Мир, 1971.
2. М а з а л о в М. Я. Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 1. – С. 15–46.
3. П а р а м о н о в П. В., Ф е д о р о в с к и й К. Ю. О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Математический сборник. – 1999. – Т. 190, № 2. – С. 123–144.
4. В и т у ш к и н А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22, № 6. – С. 141–199.
5. К е л д ы ш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // Успехи математических наук. – 1941. – Т. 8. – С. 171–231.
6. D e n y J. Systèmes totaux de fonctions harmoniques // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1949. – V. 1. – P. 103–113.
7. М е р г е л я н С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, № 2. – С. 31–122.
8. W a l s h J. L. The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1929. – V. 35. – P. 499–544.
9. Г а м е л и н Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973.
10. П а р а м о н о в П. В. C^m-приближения грамоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Математический сборник. – 1993. – Т. 184, № 2. – С. 105–128.
11. F e d o r o v s k i y K. Y u. Nevanlinna domains in problems of polyanalytic polynomial approximation // Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathemtics. – Basel: Birkhäuser Verlag, 2009. – P. 131–142.
12. F e d o r o v s k i y K. Y u. Uniform approximation problems // Uzbek Mathematical Journal. – 2009. – No. 1. – P. 33–44.
13. Х е р м а н д е р Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986.

14. V e r d e r a J. C^m-approximation by solution of elliptic equations and Calderon–Zygmund operators // Duke Math. J. – 1987. – V. 55, № 1. – P. 157–187.
15. Т а р х а н о в Н. Н. Ряд Лорана для решений эллиптических систем. – Новосибирск: Наука, 1991.
16. P a r a m o n o v P. V., V e r d e r a J. Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space // Math. Scand. – 1994. – V. 74. – P. 249–259.
17. F e d o r o v s k i y K. Y u. C^m-approximation by polyanalytic polynomials on compact subsets of the complex plane // Complex Anal. Oper. Theory. – 2011. – V. 5, № 3. – P. 671–681.

Статья поступила в редакцию 23.04.2012