

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУДАРА В УПРУГОМ ТЕЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ НЕЛОКАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

И.Ю. Савельева

inga.savelyeva@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Важным этапом в создании и использовании новых структурно-чувствительных материалов является построение математических моделей, позволяющих описать их поведение в широком диапазоне изменения внешних воздействий. В настоящее время существует несколько подходов к теоретическому моделированию материалов со сложной внутренней структурой. На основе методов обобщенной термомеханики получены определяющие соотношения математической модели, описывающие распределения температуры и динамических напряжений при тепловом ударе на поверхности упругого тела с учетом пространственной нелокальности. Для описания процесса нестационарной теплопроводности использована модель среды с внутренними параметрами состояния. Предложенная модель позволяет учесть эффекты пространственной нелокальности и временной нелокальности, которые имеют место в структурно-чувствительных материалах, и могут быть использованы в дальнейшем при исследовании температурных полей и напряжений, возникающих в элементах конструкций при разнообразных внешних воздействиях. На основе метода конечных элементов в форме Галеркина предложен алгоритм построения численных решений. Представлены расчеты для полей температуры и напряжений для задачи в одномерной постановке, проанализировано влияние параметров, отвечающих за нелокальные эффекты, на решения

Ключевые слова

Термоудар, математическая модель, нелокальное деформирование, теплопроводность, динамические напряжения

Поступила 13.01.20

Принята 28.02.20

© Автор(ы), 2020

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект РФФИ № 18-38-20108)

Введение. Широкое использование новых структурно-чувствительных конструкционных и функциональных материалов требует разработки новых математических моделей, которые могли бы учесть не только раз-

личные высокоинтенсивные внешние воздействия, но и влияние внутренней микро- и наноструктуры на протекающие процессы, а также особенности получения таких материалов. В настоящее время существуют три основных подхода к теоретическому моделированию поведения материалов со сложной внутренней структурой:

1) квантово-механические подходы, методы молекулярной динамики и модели Монте-Карло [1, 2];

2) подходы обобщенной механики сплошной среды, включающие в себя теории эффективных свойств [3–6], смесевые модели [7], модели, основанные на процедурах осреднения [8], микрополярные среды типа Косера [2];

3) гибридный молекулярно-механический подход, сочетающий методы молекулярной динамики и макромасштабные модели [4, 9].

Методы обобщенной механики дают возможность получить в качестве определяющих соотношений интегро-дифференциальные уравнения, для решения которых применимы известные численные методы. Основная сложность заключается в установлении связи между характеристиками микро- (нано-) уровня и макроуровня.

Математическая модель нелокальной термоупругости, определяющие соотношения которой получены с использованием эффективных переменных для температуры и тензора малой деформации, предложена в [10]. Отличие используемой ниже математической модели заключается в том, что пространственная нелокальность учтена посредством интегральных слагаемых, которые добавлены в определяющие соотношения для вектора плотности теплового потока и обобщенный закон Гука. Такая модификация связана с перераспределением энергии при взаимодействии структурных элементов среды.

На основе полученных определяющих соотношений исследованы поля температуры и динамических напряжений, возникающих в упругом теле при термоударе на поверхности. Отметим, что температурные напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут вызывать появление трещин и разрушение конструкций [11, 12].

Определяющие соотношения. Рассмотрим упругое тело, на границах которого заданы внешние нагрузки. Для получения уравнений термоупругости и теплопроводности примем, что внешняя нагрузка действует по нормали к граничной поверхности, отличной от нуля является только деформация в направлении этой нормали, а температура и напряжения зависят только от времени и координаты x_1 , направленной по нормали вглубь тела.

В прямоугольной ортогональной системе координат закон сохранения количества движения в проекции на ось Ox_1 может быть записан в виде [13]

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho \dot{u}_1, \quad (1)$$

а уравнение теплопроводности — в виде

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} T_0 \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial q_1}{\partial x_1}. \quad (2)$$

Здесь σ_{11} — отличная от нуля компонента тензора напряжений; ρ — плотность; c_ε — удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации; T — абсолютная температура; λ, μ — константы Ламе; $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения; $T_0 = \text{const}$ — температура естественного состояния; q_1 — проекция вектора плотности теплового потока на ось Ox_1 ; u_1 — проекция вектора перемещения на ось Ox_1 .

Модель нелокальной упругости, предложенная А.К. Эрингеном [3], основана на том, что дальнедействующие силы, которые отвечают за нелокальное поведение материала в данной точке пространства \mathbf{x} , адекватно описываются с использованием функции расстояния $\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, убывающей с ростом $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Функцию $\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ называют функцией влияния. С учетом изложенного выше определяющее соотношение для компоненты σ_{11} тензора напряжения и проекции q_1 вектора плотности теплового потока запишем следующим образом:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_2 \int_V \varphi(|x'_1 - x_1|) \frac{\partial u_1}{\partial x'_1} dx'_1 \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} (T - T_0); \quad (3)$$

$$q_1 = -p_1 \lambda^{(T)} \frac{\partial T(x_1, t)}{\partial x_1} - p_2 \lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x'_1 - x_1|) \frac{\partial T(x'_1, t)}{\partial x'_1} dx'_1. \quad (4)$$

Здесь $\lambda^{(T)}$ — коэффициент теплопроводности среды (далее будем полагать, что коэффициент теплопроводности не зависит от температуры); $\varphi(|x'_1 - x_1|)$ — одномерная функция влияния; $p_1, p_2 \in [0, 1]$ — доли влияния локальных и нелокальных эффектов, $p_1 + p_2 = 1$.

Уравнения (1) и (2) с учетом соотношений (3) и (4) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} p_1 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + p_2 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_V \varphi(|x'_1 - x_1|) \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x'_1} dx'_1 \right) = \\ = \rho \ddot{\sigma}_{11} + \rho (3\lambda + 2\mu) \alpha^{(T)} \ddot{T}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left(\rho c_{\varepsilon} + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2}{\lambda + 2\mu} (\alpha^{(T)})^2 T_0 \right) \dot{T} = p_1 \lambda^{(T)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + p_2 \lambda^{(T)} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_V \varphi(|x'_1 - x_1|) \frac{\partial T}{\partial x'_1} dx'_1 \right) - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^{(T)} T_0 \dot{\sigma}_{11}. \quad (6)$$

Краевые условия для уравнений (5), (6), соответствующие высокоинтенсивному импульсному нагреву, запишем как

$$\begin{aligned} t = 0 \quad T(x_1, 0) = T_0, \quad \dot{T}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{11}(x_1, 0) = 0, \quad \dot{\sigma}_{11}(x_1, 0) = 0; \\ x_1 = 0 \quad -p_1 \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_1} - p_2 \lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x'_1 - x_1|) \frac{\partial T}{\partial x'_1} dx' = Q_0(t), \quad \sigma_{11}(0, t) = 0, \\ Q_0(t) = AMt^m \exp(-mt/t_0), \quad m \geq 1, \quad t_0 > 0; \\ x_1 = L \quad p_1 \lambda^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_1} + p_2 \lambda^{(T)} \int_V \varphi(|x'_1 - x_1|) \frac{\partial T}{\partial x'_1} dx' = 0, \quad \sigma_{11}(L, t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (5), (6) и краевые условия (7) можно представить в безразмерном виде

$$p_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + p_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_V \bar{\varphi}(|z' - z|) \frac{\partial \sigma}{\partial z'} dz' \right) = R^2 (\ddot{\sigma} + \ddot{\theta}); \quad (8)$$

$$(1 + \delta) \dot{\theta} + \delta \dot{\sigma} = p_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + p_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_V \bar{\varphi}(|z' - z|) \frac{\partial \theta}{\partial z'} dz' \right); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{t} = 0 \quad \theta(z, 0) = 0, \quad \dot{\theta}(z, 0) = 0, \quad \sigma(z, 0) = 0, \quad \dot{\sigma}(z, 0) = 0; \\ z = 0 \quad -p_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} - p_2 \int_V \bar{\varphi}(|z' - z|) \frac{\partial \theta}{\partial z'} dz' = q_0(\bar{t}), \quad \sigma(0, \bar{t}) = 0, \\ q_0(\bar{t}) = M\bar{t}^m \exp(-m\bar{t}), \quad m \geq 1; \\ z = \bar{L} \quad p_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} + p_2 \int_V \bar{\varphi}(|z' - z|) \frac{\partial \theta}{\partial z'} dz' = 0, \quad \sigma(\bar{L}, \bar{t}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом использованы следующие безразмерные параметры и переменные [10]:

$$\begin{aligned} z = x_1 / \sqrt{at_0}, \quad \bar{t} = t/t_0, \quad \theta = (T - T_0)/T^*, \quad a = \lambda^{(T)} / (\rho c), \\ T^* = At_0^m \sqrt{at_0} / \lambda^{(T)}; \quad q_0(\bar{t}) = M\bar{t}^m \exp(-m\bar{t}), \end{aligned}$$

$$M = m^m / (m-1)!, \quad R^2 = a\rho / (\lambda + 2\mu) / t_0;$$

$$\sigma = \sigma_{11} / ((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)}T^*), \quad \delta = ((3\lambda + 2\mu)\alpha^{(T)})^2 T_0 / (\rho c_\varepsilon (\lambda + 2\mu)).$$

Параметр δ характеризует эффект связанности поля деформации и температурного поля, для металлов он принадлежит диапазону 0,01–0,03 и обычно мало влияет на термическое возмущение и распределение температурных напряжений. Однако для новых материалов, обладающих большим параметром связанности, такое допущение будет ошибочным [12, 14].

Если рассмотреть адиабатический процесс, то из уравнения (9) следует, что изменение температуры в результате изменения напряжения пропорционально величине $\delta/(1+\delta)$. Таким образом, если значение δ невелико, то изменением температуры вследствие деформирования можно пренебречь. В данной работе примем $\delta = 0$.

Численное моделирование. Применив к уравнениям (8), (9) и крайевым условиям (10) конечно-элементную процедуру в форме метода Галеркина [15], получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$[C]\{\dot{T}\} + (p_1 [K^{(l)}] + p_2 [K^{(nl)}])\{T\} = \{F^{(1)}\};$$

$$R^2 [C]\{\ddot{\sigma}\} + (p_1 [K^{(l)}] + p_2 [K^{(nl)}])\{\sigma\} = -R^2 \{F^{(2)}\},$$

где $[C]$ — матрица теплоемкости; $[K^{(l)}]$, $[K^{(nl)}]$ — матрицы, характеризующие локальные и нелокальные свойства теплопроводности исследуемого тела; $\{T\}$, $\{\dot{T}\}$ — векторы неизвестных узловых значений температуры и скорости ее изменения; $\{F^{(1)}\}$, $\{F^{(2)}\}$ — векторы тепловых нагрузок. Компоненты этих матриц и векторов определяются следующими соотношениями:

$$F_p^{(1)} = q_0(t)\delta_{p1}, \quad C_{pq} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} N_p(z_1)N_q(z_1)dz_1;$$

$$K_{pq}^{(l)} = p_1 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{\partial N_p(z_1)}{\partial z_1} \frac{\partial N_q(z_1)}{\partial z_1} dz_1, \quad F_p^{(2)} = C_{pq} \{\ddot{\theta}\}_q; \quad (11)$$

$$K_{pq}^{(nl)} = p_2 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \left(\int_V \bar{\varphi}(|z'_1 - z_1|) \frac{dN_q(z'_1)}{dz'_1} dz'_1 \right) \frac{dN_p(z_1)}{dz_1} dz_1,$$

где E — число конечных элементов; $V^{(e)}$ — объем конечного элемента; N_p , N_q — зависящие от координаты z_1 одномерные функции формы;

p, q — номера узлов сетки, $p, q = 1, \dots, n$. Для вычисления компонент матриц $[C^{(nl)}], [K^{(nl)}]$ по формулам из (11) необходимо задать вид функции влияния. Выберем функцию $\varphi(|z'_1 - z_1|)$ следующим образом [2, 8]:

$$\varphi(|z'_1 - z_1|) = \frac{1}{2\bar{a}} \exp\left(-\frac{|z'_1 - z_1|}{\bar{a}}\right),$$

где \bar{a} — безразмерная величина пространственного влияния.

Распределения безразмерной температуры $\theta(z)$ по глубине тела при различных долях p_1 учета локальных эффектов приведены на рис. 1, а. С уменьшением значения p_1 (т. е. с увеличением вклада интегрального слагаемого в уравнении (9)) увеличивается различие значений температуры в пограничных слоях тела. Распределение безразмерной температуры $\theta(z)$ в зависимости от радиуса \bar{a} учета нелокальных эффектов показано на рис. 1, б.

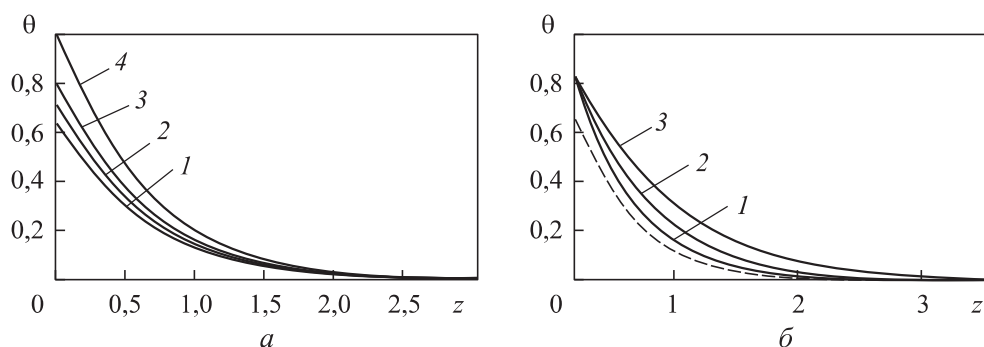


Рис. 1. Распределение температуры на момент времени $\bar{t} = 1, m = 5$:

$a - \bar{a} = 0,2$ (1 — $p_1 = 1,0$; 2 — $p_1 = 0,75$; 3 — $p_1 = 0,5$; 4 — $p_1 = 0,25$);
 $b - \bar{a} = 0,2$ (1), 0,4 (2) и 0,8 (3) при $p_1 = 0,5$ (сплошные) и $p_1 = 1,0$ (штриховая)

Аналогичная ситуация наблюдается и для распределения напряжений. Зависимости $\sigma(z)$ при различных долях p_1 учета локальных эффектов приведены на рис. 2, а. Влияние радиуса \bar{a} учета нелокальных эффектов на распределения напряжений показано на рис. 2, б. Как и в случае с полем температуры, увеличение значения \bar{a} приводит к увеличению глубины проникания напряжений.

Зависимости $\sigma(z)$ при различных значениях параметра R , обратно пропорционального скорости распространения упругих возмущений, приведены на рис. 3. При достаточно малых значениях R вклад нелокальных эффектов несущественен.

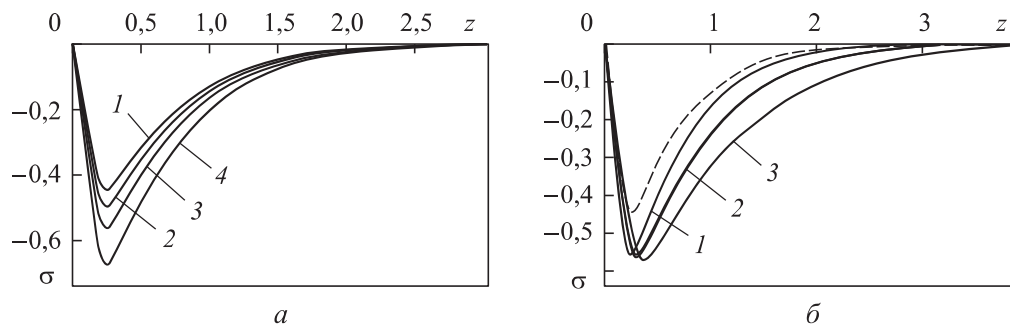


Рис. 2. Распределение напряжений на момент времени $\bar{t} = 1$, $m = 5$, $R = 3$:
 а — $\bar{a} = 0,2$ (1 — $p_1 = 1,0$; 2 — $p_1 = 0,75$; 3 — $p_1 = 0,5$; 4 — $p_1 = 0,25$); б — $\bar{a} = 0,2$ (1),
 0,4 (2) и 0,8 (3) при $p_1 = 0,5$ (сплошные) и $p_1 = 1,0$ (штриховая)

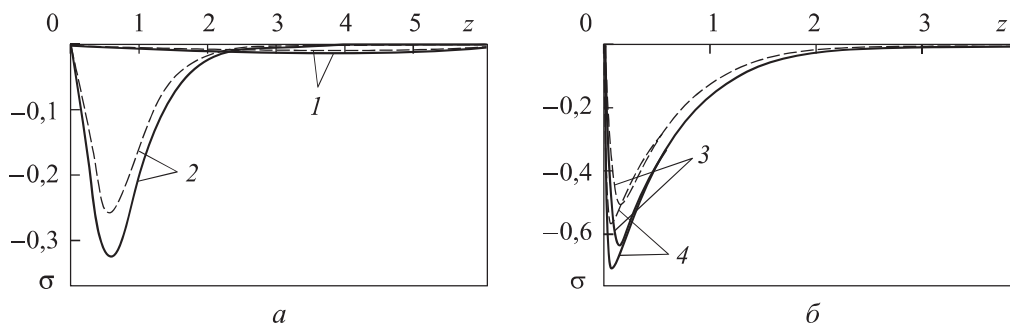


Рис. 3. Распределение напряжений на момент времени $\bar{t} = 1$, $m = 5$, $\bar{a} = 0,2$
 для $R = 0,1$ (1), 1,0 (2), 5,0 (3) и 10 (4) при $p_1 = 0,5$ (сплошные)
 и $p_1 = 1,0$ (штриховые)

Заключение. Полученные определяющие соотношения для определения полей температуры и напряжений при тепловом ударе на поверхности тела дают возможность моделировать термомеханические процессы в деформируемом твердом теле при различных допущениях относительно структуры материала.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gopalakrishnan S., Narendar S. Wave propagation in nanostructures. *Nonlocal Continuum Mechanics Formulations. NanoScience and Technology*. Cham, Springer, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-01032-8>
- [2] Ибрагимов И.М., Ковшов А.Н., Назаров Ю.Ф. Основы компьютерного моделирования наносистем. СПб., Лань, 2010.
- [3] Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York, Springer, 2002.

- [4] Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М., ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- [5] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of the linear thermal expansion coefficient of composites with disperse anisotropic inclusions by the self-consistency method. *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, iss. 2, pp. 143–154. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9567-2>
- [6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными пластинчатыми включениями. *Композиты и наноструктуры*, 2015, т. 7, № 1, с. 1–13.
- [7] Руцицкий Я.Я. Элементы теории смеси. Киев, Наукова думка, 1991.
- [8] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах: математические задачи механики композиционных материалов. М., Наука, 1984.
- [9] Karlicic D., Murmu T., Adhikari S., et al. Nonlocal structural mechanics. Wiley, 2016.
- [10] Savelieva I.Yu. Influence of medium nonlocality on distribution of temperature and stresses in elastic body under pulsed heating. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, iss. 3, pp. 277–283. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654418070063>
- [11] Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. М., Машиностроение, 2005.
- [12] Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связные и динамические задачи термоупругости. М., Машиностроение, 1984.
- [13] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
- [14] Zweben C.H., Beaumont P. Comprehensive composite materials II. Elsevier, 2017.
- [15] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann, 2000.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Савельева И.Ю. Численное моделирование термоудара в упругом теле с учетом эффектов нелокальности среды. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 3 (90), с. 20–29.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-3-20-29>

**NUMERICAL SIMULATION OF A THERMAL SHOCK
IN AN ELASTIC BODY CONSIDERING NON-LOCALITY EFFECTS
IN THE MEDIUM**

I.Yu. Savelyeva

inga.savelyeva@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Creating mathematical simulations that allow material behaviour to be described for a wide range of variable external effects is an important stage of developing and utilising new structurally sensitive materials. At present, there exist several approaches to analytical simulation of materials featuring a complex internal structure. We used methods of generalized thermomechanics to derive constitutive equations for a mathematical model describing the temperature and dynamic stress distributions for the case of a thermal shock on the surface of an elastic body, taking spatial non-locality into account. We employed a medium model featuring internal state parameters to describe the process of non-steady-state thermal conductivity. The model proposed makes it possible to account for the spatial and temporal non-locality effects found in structurally sensitive materials; this may be used in further investigations of temperature fields and stresses occurring in structural elements as a result of various external effects. We propose an algorithm for developing numerical solutions based on a Galerkin finite element method. The paper presents temperature field and stress computations for a one-dimensional problem and analyses the effect the non-locality parameters have on these solutions

Keywords

Thermal shock, mathematical simulation, non-local deformation, thermal conductivity, dynamic stress

Received 13.01.2020

Accepted 28.02.2020

© Author(s), 2020

The study was supported by RFBR (RFBR project no. 18-38-20108)

REFERENCES

- [1] Gopalakrishnan S., Narendar S. Wave propagation in nanostructures. *Nonlocal Continuum Mechanics Formulations. NanoScience and Technology*. Cham, Springer, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-01032-8>
- [2] Ibragimov I.M., Kovshov A.N., Nazarov Yu.F. *Osnovy komp'yuternogo modelirovaniya nanosistem [Fundamentals of nanosystem computer simulation]*. St. Petersburg, Lan Publ., 2010.

- [3] Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York, Springer, 2002.
- [4] Krivtsov A.M. Deformirovanie i razrushenie tverdykh tel s mikrostrukturoy [Deformation and fracture of solids with microstructure]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007.
- [5] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of the linear thermal expansion coefficient of composites with disperse anisotropic inclusions by the self-consistency method. *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, iss. 2, pp. 143–154.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9567-2>
- [6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Thermal conductivity of the textured composite with anisotropic lamellar inclusions. *Kompozity i nanostruktury* [Composites and Nanostructures], 2015, vol. 7, no. 1, pp. 1–13 (in Russ.).
- [7] Rushchitskiy Ya.Ya. Elementy teorii smesi [Elements of mixture theory]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1991.
- [8] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh: matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov [Averaging of processes in batch media: mathematical problems of composite materials mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1984.
- [9] Karlicic D., Murmu T., Adhikari S., et al. Nonlocal structural mechanics. Wiley, 2016.
- [10] Savelyeva I.Yu. Influence of medium nonlocality on distribution of temperature and stresses in elastic body under pulsed heating. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, iss. 3, pp. 277–283. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654418070063>
- [11] Zarubin V.S., Stankevich I.V. Raschet teplonapryazhennykh konstruksiy [Calculation of heat-stressed structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005.
- [12] Griбанov V.F., Panichkin N.G. Svyaznye i dinamicheskie zadachi termouprugosti [Connected and dynamic problems of thermoelasticity]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984.
- [13] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of continuous medium mechanics and electrodynamics]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.
- [14] Zweben C.H., Beaumont P. Comprehensive composite materials II. Elsevier, 2017.
- [15] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann, 2000.

Savelyeva I.Yu. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Savelyeva I.Yu. Numerical simulation of a thermal shock in an elastic body considering non-locality effects in the medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 3 (90), pp. 20–29 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-3-20-29>