УДК 531.36

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

Т. В. Муратова

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва (e-mail: tamura@bk.ru)

Исследована устойчивость нестационарных механических систем, находящихся под действием сил различной природы, включая циркулярные силы.

Ключевые слова: гироскопические силы, циркулярные силы, стабилизация, матрица Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

A PROBLEM ON STABILITY OF NONSTATIONARY SYSTEMS OF GENERAL TYPE

T. V. Muratova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow,
(e-mail: tamura@bk.ru)

The stability of nonstationary mechanical systems exposed to action of forces of different nature, including circular forces, is investigated.

Keywords: gyroscopic forces, circular forces, stabilization, Lyapunov matrix, asymptotic stability.

Объектом исследования является нестационарная механическая система общего вида, находящаяся под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и циркулярных сил, описываемая уравнением

$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + hG(t)\dot{x} - K(t)x + F(t)x = 0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $B^{\text{т}}(t) = B(t)$, $G^{\text{т}}(t) = -G(t)$, $K^{\text{т}}(t) = K(t)$, $F^{\text{т}}(t) = -F(t)$. Матрица $F(t)$ характеризует циркулярные силы, матрицы $B(t), G(t)$, $K(t), F(t)$ — матрицы Ляпунова, $h > 0$ постоянный скалярный параметр. Пусть для квадратичной формы $x^{\text{т}}K(t)x$ выполнен обобщенный критерий Сильвестра, т.е. существует постоянная $k > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$x^{\text{т}}K(t)x \geq kx^{\text{т}}x. \tag{2}$$

Кроме того, диссипативные силы обладают полной диссипацией и $\det G(t) \neq 0$, точнее существует постоянная $g > 0$ такая, что $|\det G(t)| \geq g$.

Для исследования устойчивости равновесия

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0 \tag{3}$$

системы (1) рассмотрим функцию

$$V = (\dot{x} - h^{-1}Cx)^{\text{т}}(\dot{x} - h^{-1}Cx) + x^{\text{т}}(G^{\text{т}}K^{-1}G - h^{-2}C^{\text{т}}C)x, \quad (4)$$

где $C = GK^{-1} - (K + F)G^{-1}$.

Для сокращения записи в выражении (4) далее опустим зависимость матриц от переменной t. Поскольку матрицы, входящие в систему (1), являются матрицами Ляпунова, то таковой является и матрица C. Существуют постоянные $g_0 > 0$, $c_0 > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$x^{\text{т}}G^{\text{т}}K^{-1}Gx \geq g_0x^{\text{т}}x, \;\; x^{\text{т}}C^{\text{т}}Cx \leq c_0x^{\text{т}}x, \quad (5)$$

откуда следует, что $x^{\text{т}}(G^{\text{т}}K^{-1}G - h^{-2}C^{\text{т}}C)x \geq x^{\text{т}}(g_0 - h^{-2}c_0)x$.

Тогда условием положительной определенности функции (4) является неравенство

$$h > \sqrt{\frac{c_0}{g_0}}. \quad (6)$$

Производная по времени $\dot{V}$, вычисленная в силу системы (1) и взятая с обратным знаком, может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} -\dot{V} = \dot{x}^{\text{т}}\left[2B + h^{-1}(C + C^{\text{т}})\right]\dot{x} + \\ + x^{\text{т}}\left[h^{-1}S - (\dot{G}^{\text{т}}K^{-1}G + G^{\text{т}}\dot{K}^{-1}G + G^{\text{т}}K^{-1}\dot{G})\right]x - \\ - 2h^{-1}x^{\text{т}}(CB - \dot{C})\dot{x}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $S = G^{\text{т}}K^{-1}F + F^{\text{т}}K^{-1}G$.

Предположим, что для квадратичной формы $x^{\text{т}}Sx$ выполнен обобщенный критерий Сильвестра, т.е. существует постоянная $\mu > 0$, такая, что выполнено неравенство $x^{\text{т}}Sx \geq \mu x^{\text{т}}x$. Тогда существует постоянная $\rho \geq 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\dot{x}^{\text{т}}(C + C^{E})\dot{x} \geq -\rho\dot{x}^{\text{т}}\dot{x}. \quad (8)$$

Из формулы (7) следует, что для положительной определенности функции -$\dot{V}$ необходимо, чтобы квадратичная форма

$$x^{\text{т}}\left[h^{-1}S - (\dot{G}^{\text{т}}K^{-1}G + G^{\text{т}}\dot{K}^{-1}G + G^{\text{т}}K^{-1}\dot{G})\right]x$$

удовлетворяла обобщенному критерию Сильвестра. Поскольку матрицы G, K являются матрицами Ляпунова, то $G, \dot{G}, \dot{K}^{-1}$ ограничены, т.е. $\sup\|G\| < \infty$, $\sup\left\|\dot{G}\right\| < \infty$, $\sup\left\|\dot{K}^{-1}\right\| < \infty$ при $t \geq t_0$. Отсюда следует, что существует постоянная $g \geq 0$ такая, что

$$x^{\text{т}}(\dot{G}^{\text{т}}K^{-1}G + G^{\text{т}}K^{-1}G + G^{\text{т}}K^{-1}\dot{G})x \leq gx^{\text{т}}x. \quad (9)$$

Принимая во внимание неравенства (7)–(9), получаем

$$-\dot{V} \geq (2b - h^{-1}p)\dot{x}^{\text{т}}\dot{x} + (h^{-1}\mu - g)x^{\text{т}}x - 2h^{-1}x^{\text{т}}(CB - \dot{C})\dot{x}, \qquad (10)$$

где $b > 0$; $\dot{x}^{\text{т}}B\dot{x} \geq b\dot{x}^{\text{т}}\dot{x}$.

Для отрицательной определенности $\dot{V}$ необходимо, чтобы были выполнены неравенства

$$2b - h^{-1}p > 0, \quad h^{-1}\mu - g > 0. \qquad (11)$$

Предполагая, что неравенства (11) выполнены, правую часть неравенства (10) записываем в виде

$$(2b - h^{-1}p)\dot{x}^{\text{т}}\dot{x} + (h^{-1}\mu - g)x^{\text{т}}x - 2h^{-1}x^{\text{т}}(CB - \dot{C})\dot{x} =$$

$$= \left(M^{1/2}\dot{x} + \frac{1}{2}M^{-1/2}Q^{\text{т}}x\right)^{\text{т}} \left(M^{1/2}\dot{x} + \frac{1}{2}M^{-1/2}Q^{\text{т}}x\right)^{\text{т}} +$$

$$+x^{\text{т}}\{(h^{-1}\mu - g)E\} - \frac{h^2(CB - \dot{C})(BC^{\text{т}} - \dot{C}^{\text{т}})}{2b - h^{-1}p}, \qquad (12)$$

где $M = (2b - h^{-1}p)E$, $Q = -2h^{-1}(CB - \dot{C})$, E — единичная матрица. Так как C и B являются матрицами Ляпунова, то существует постоянная $q > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$x^{\text{т}}(CB - \dot{C})(BC^{\text{т}} - \dot{C}^{\text{т}})x \leq qx^{\text{т}}x. \qquad (13)$$

Из неравенства (10) с учетом (12), а также неравенства (13) условие отрицательной определенности функции $\dot{V}$ приводится к виду

$$f(h) \equiv (2b - h^{-1}p)(h^{-1}\mu - g) - h^{-2}q > 0. \qquad (14)$$

Отметим, что из выполнения первого неравенства (11) и неравенства (14) следует второе неравенство (11). При выполнении неравенств (6) и (14) невозмущенное движение (3) асимптотически устойчиво. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Пусть в системе* (1) *матрицы* $B(t)$, $G(t)$, $K(t)$ *и* $F(t)$ *являются матрицами Ляпунова и выполнены следующие условия*:
1) *матрица* $S(t) = G^m(t)K^{-1}(t)F(t) + F^m(t)K^{-1}(t)G$ *удовлетворяет обобщенному критерию Сильвестра;*
2) *параметр* $h > 0$ *принадлежит интервалу* $h_1 < h < h_2$, *если* $h_1 > \sqrt{\dfrac{C_0}{g_0}}$, *где* h_1 *и* h_2 ($h_2 > h_1$) — *корни уравнения* $f(h) = 0$. *Тогда невозмущенное движение* (3) *асимптотически устойчиво.*

Отметим важное обстоятельство. Зависимость элементов матрицы $G(t)$ от времени приводит к ограничению сверху на параметр h, что качественно отличает суждение об устойчивости исходной нестационарной системы (1) от соответствующего для стационарной [1, 2]. Полученные результаты существенно обобщают положения работы [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agafonov S. A. On the stability of nonconservative systems with estimation of the attraction domain // J. of Dynamical and Control Systems. – 2000. – Vol. 6, no. 4. – P. 503–510.
2. Агафонов С. А. Об устойчивости и стабилизации движения неконсервативных механических систем // ПММ. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 41–46.

Статья поступила в редакцию 24.06.2011