

ТЕРМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ПРИ ТЕПЛОВОМ УДАРЕ МАССИВНОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Э.М. Карташов¹

kartashov@mitht.ru

Е.В. Ненахов²

newnew94@mail.ru

¹ РТУ МИРЭА, Москва, Российская Федерация

² МАИ, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены математические модели теплового удара в терминах динамической термоупругости и их приложения к конкретным случаям при интенсивном нагреве границы твердого тела. Предложено уравнение совместности в напряжениях для динамических задач, обобщающее известное соотношение Бельтрами — Митчелла для квазистатических случаев. Это соотношение удобно использовать при рассмотрении многочисленных частных случаев в теории теплового удара в декартовых координатах как для ограниченных тел канонической формы (бесконечная пластина), так и для частично ограниченных (пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью). В последнем случае получаемые аналитические решения динамических задач термоупругости приводят к наглядным и удобным для физического анализа функциональным конструкциям, описывающим кинетику термических напряжений. Для цилиндрической и сферической систем координат предложено уравнение «совместности» в перемещениях, удобное для исследования проблемы теплового удара в телах при радиальном потоке теплоты и в условиях центральной симметрии. Выделен класс задач, в которых учет геометрических размеров конструкции, исследуемой на термомеханическую реакцию в условиях интенсивного нагрева, касается главным образом приповерхностных слоев. Согласно результатам экспериментов, именно эти слои поглощают основное количество теплоты в течение времени, близкого к началу нагрева, что соответствует времени микросекундной длительно-

Ключевые слова

Тепловой удар, динамическая термоупругость, волновой характер, напряжения, ускорения

сти действия инерционных эффектов. Исследована термическая реакция массивного тела с внутренней цилиндрической полостью в рамках динамической термоупругости при различных режимах интенсивного нагрева поверхности полости. Проведены численные эксперименты и описан волновой характер термических напряжений с соответствующими квазистатическими значениями, установлена роль инерционных эффектов в математических моделях теории теплового удара

Поступила 02.03.2020

Принята 02.07.2020

© Автор(ы), 2020

Введение. Проблема термического удара — одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классических феноменологий Фурье [1–4] и Максвелла — Каттанео — Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах [5–7]; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных) [8, 9]; сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти [10]; установлена связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния среды и скоростью их изменения во времени [11]. Интенсификация тепловых воздействий на элементы конструкций, создание новых технологических процессов, основанных на использовании высокоинтенсивных импульсных потоков энергии, стимулирует разработку соответствующих модельных представлений для описания термической реакции конструкционных материалов, применяемых на практике. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, приведена в [12–14].

Можно выделить широкий класс задач [15–17], в которых сочетание теплофизических свойств материалов, геометрических размеров конструкций и интересующая исследователя тепловая реакция тела касается тонкого поверхностного слоя, называемого термическим. Даже в условиях высоких скоростей поверхностного нагрева или охлаждения с удалением от граничной поверхности в глубь тела температуры затухают, и это затухание с увеличением глубины происходит так интенсивно, что температурное состояние твердого тела оказывается существенным лишь

в термическом слое, в котором как раз и сосредоточено основное количество теплоты, поглощенной за время, близкое к началу нагрева. Поскольку толщина поверхностного слоя мала по сравнению с размерами тела, в этих случаях твердое тело можно моделировать полуограниченной областью, например упругим полупространством $z \geq 0$. Последнее позволяет получать более наглядные и удобные с позиции практического использования аналитические решения задач нестационарной теплопроводности и термомеханики. В тех случаях, когда необходимо учесть влияние кривизны поверхности твердого тела на температуру в термическом слое, решается нестационарная задача теплопроводности для пространства с внутренней цилиндрической полостью или пространства с внутренней сферической полостью. С одной стороны, специфика такого рода задач заключается в относительной простоте исходных математических моделей. С другой, она связана с вычислительными трудностями реализации принятой схемы получения искомого результата и очевидной значимостью применения определенных соотношений в многочисленных практических случаях [15].

В работе изучена термическая реакция на нагрев массивного тела с внутренней цилиндрической полостью — важный результат для многих приложений, в частности при изучении температурного режима в стволе нефтяной скважины и зоны оттаивания окружающих многолетнемерзлых пород для диагностики состояния скважин и выбора оптимального режима их эксплуатации; при расчете периодически изменяющихся значений температуры (и соответствующих термических напряжений) в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории волноводов при исследовании влияния изменения поперечного сечения цилиндрического проводника на температурную волну в окружающем пространстве; при изучении распространения теплоты от проложенных в земле кабелей и труб; при изучении режима охлаждения шахт и т. д. Несмотря на практическую значимость, область указанной формы с радиальным потоком теплоты в теплофизике при формировании температурных полей начали изучать сравнительно недавно [15, 18, 19], а в термомеханике в рамках соответствующей задачи термоупругости этот вопрос до конца еще не изучен.

Определяющие соотношения динамической термоупругости.

Пусть D — конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нор-

маль к S ; $T(M, t)$ — распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 — начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ik}(M, t)$, $\varepsilon_{ik}(M, t)$, $U_i(M, t)$ ($i, k = x, y, z$) — компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях), а именно уравнениям движения, геометрическим и физическим (обобщенный закон Гука) уравнениям [1]:

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}(M, t)}{\partial k} = \rho^* \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ik}(M, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i(M, t)}{\partial k} + \frac{\partial U_k(M, t)}{\partial i} \right]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}(M, t) = \\ = 2G \left[\varepsilon_{ik}(M, t) + \frac{\nu}{1-2\nu} e(M, t) \delta_{ik} - \frac{1+\nu}{(1-2\nu)} \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ik} \right], \\ M \in D, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ρ^* — плотность; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера; α_T — коэффициент линейного теплового расширения; $T(M, t)$ — температурная функция; $e(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t) = U_{i,i}(M, t) = \operatorname{div} [\vec{U}(M, t)]$ — объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$ ($n = x, y, z$) соотношением

$$e(M, t) = \frac{1-2\nu}{E} \sigma(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (4)$$

Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S , создающего термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи: температурный нагрев $T(M, t) = T_c(t)$, $M \in S$, $t > 0$ ($T_c(t) > T_0$, $t \geq 0$); тепловой нагрев $\partial T(M, t)/\partial n = -(1/\lambda_T) q_0(t)$, $M \in S$, $t > 0$ (λ_T — теплопроводность материала, $q_0(t)$ — тепловой поток); нагрев средой $\partial T(M, t)/\partial n = -h[T(M, t) - T_c]$, $M \in S$, $t > 0$ (h — относительный коэффициент теплообмена; T_c — температура окружающей среды $T_c > T_0$); нагрев от действия внутренних источников теплоты.

В равной мере могут быть рассмотрены и случаи охлаждения твердого тела. Входящая в (3) температурная функция $T(M, t)$ находится из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности при соответствующих краевых условиях [17].

Уравнения совместности в напряжениях и перемещениях для динамических задач. Соотношения (1)–(3) — общие соотношения динамической термоупругости, связывающие напряжения, деформации, перемещения и температуру. При переходе к конкретным случаям (1)–(3) необходимо преобразовать их в так называемые уравнения совместности либо в напряжениях, либо в перемещениях, и для этих уравнений записывать соответствующую задачу динамической термоупругости. С использованием методов тензорной алгебры в [20] предложено уравнение совместности в напряжениях для динамических задач, обобщающее уравнение Бельтрами — Митчелла для динамических случаев:

$$\begin{aligned} (1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(M,t) + \sigma_{,ij}(M,t) + \alpha_T E \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta T(M,t) \sigma_{ij} + (T(M,t) - T_0) \right] = \\ = \frac{(1+\nu)\rho^*}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[2\sigma_{ij}(M,t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma(M,t) \delta_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_T (T(M,t) - T_0) \sigma_{ij} \right] \quad (M \in D; t > 0; i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) справедливо в любой ортогональной системе координат, однако наиболее удобное приложение (5) для частных случаев реализуется в декартовой системе координат для тел канонической формы (бесконечная пластина; пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью, и др.) Что касается цилиндрической и сферической систем координат, то далее рассмотрим базовое уравнение теории теплового удара в этих системах координат. Здесь более удобной математической моделью динамической термоупругости является уравнение совместности в перемещениях. Подставляя правые части (3) в (1) и используя (2), (4), после громоздких преобразований приходим к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta U_i(M,t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial e(M,t)}{\partial i} - (\rho^*/G) \frac{\partial^2 U_i(M,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)\alpha_T}{(1-2\nu)} \frac{\partial [T(M,t) - T_0]}{\partial i} \quad (i = x, y, z), \end{aligned} \quad (6)$$

которые формально можно записать в виде векторного равенства

$$\Delta \vec{U}(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \text{grad} [\text{div} \vec{U}(M, t)] - (\rho^*/G) \frac{\partial^2 \vec{U}(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \text{grad} [T(M, t) - T_0], \quad M \in D, t > 0. \quad (7)$$

Отметим, что при обратном переходе от (7) к (6) необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей в (7).

На основе приведенных соотношений (6) или (7) формулируются модели динамической термоупругости в случае радиального потока теплоты в телах цилиндрической формы и центральной симметрии в телах сферической формы. Впрочем, это соотношение может быть использовано и в декартовых координатах при одномерном движении.

Математическая модель задачи и ее аналитическое решение. Рассмотрим в цилиндрических координатах (r, φ, z) область $r > R, t > 0$ с радиальным потоком теплоты в условиях температурного нагрева — температура $T_1(r, t)$, теплового нагрева — температура $T_2(r, t)$, нагрева средой — температура $T_3(r, t)$. Отличными от нуля компонентами тензора напряжения являются $\sigma_{rr}(r, t), \sigma_{\varphi\varphi}(r, t), \sigma_{zz}(r, t)$. Компонента вектора перемещения $\vec{U}(r, t) — U_r = U(r, t)$.

Для этого случая уравнение (6) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial (T_i - T_0)}{\partial r}, \quad r > R, t > 0; \quad (8)$$

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial U}{\partial r} + \nu \frac{U}{r} \right] - \frac{E\alpha_T}{(1-2\nu)} [T_i(r, t) - T_0];$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, t) = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{U}{r} + \nu \frac{\partial U}{\partial r} \right] - \frac{E\alpha_T}{(1-2\nu)} [T_i(r, t) - T_0];$$

$$\sigma_{zz}(r, t) = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) - E\alpha_T (T_i - T_0) = \\ = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T_i - T_0) \quad (i=1, 2, 3).$$

В (8) $\nu_p = \sqrt{2G(1+\nu)/(\rho^*(1-2\nu))} = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho^*}$ — скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука, λ, μ — изотермические коэффициенты Ламе.

Температурные функции $T_i(r, t)$ в условиях указанных выше случаев нагрева являются решениями следующих задач:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right), \quad r > R, \quad t > 0;$$

$$T_i(r, t)|_{t=0} = T_0, \quad r \geq R;$$

$$T_1(r, t)|_{r=R} = T_c, \quad t > 0;$$

$$\left. \frac{\partial T_2(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, \quad t > 0;$$

$$\left. \frac{\partial T_3(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = h \left[T_3(r, t)|_{r=R} - T_c \right], \quad t > 0;$$

$$|T_i(r, t)| < \infty, \quad r \geq R, \quad t > 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Введем безразмерные переменные:

$$\rho = \frac{\nu_p r}{a}; \quad \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a}; \quad \rho_0 = \frac{\nu_p R}{a}; \quad \text{Bi} = hR;$$

$$W_i(\rho, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(r, t) - T_0}{T_c - T_0}, & i = 1, 3; \\ \frac{T_2(r, t) - T_0}{q_0 / (\lambda_T \nu_p / a)}, & i = 2; \end{cases}$$

$$U^*(\rho, \tau) = \begin{cases} \frac{(\lambda + 2\mu)(\nu_p/a)U(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)}, & i = 1, 3; \\ \frac{(\lambda + 2\mu)(\nu_p/a)^2 U(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(q_0/\lambda_T)}, & i = 2; \end{cases}$$

$$[\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau); \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau); \sigma_{zz}(\rho, \tau)] =$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{\sigma_{rr}(z, t); \sigma_{\varphi\varphi}(z, t); \sigma_{zz}(z, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)} \right], & i = 1, 3; \\ \left[\frac{\sigma_{rr}(z, t); \sigma_{\varphi\varphi}(z, t); \sigma_{zz}(z, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T q_0 / (\lambda_T / \nu_p / a)} \right], & i = 2. \end{cases}$$

Здесь и далее используем обозначения:

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} = \frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}; \quad \frac{E}{1-2\nu} = 3\lambda+2\mu; \quad \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} = (\lambda+2\mu);$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad \mu = G; \quad \lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (E \text{ — модуль Юнга}).$$

В новых переменных компоненты напряжения записываются через $U^*(\rho, \tau)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) &= \frac{\partial U^*}{\partial \rho} + \nu_1 \frac{U^*}{\rho} - W_i(\rho, \tau); \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau) &= \frac{U^*}{\rho} + \nu_1 \frac{\partial U^*}{\partial \rho} - W_i(\rho, \tau); \\ \sigma_{zz}(\rho, \tau) &= \frac{\lambda}{2\mu} [\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) + \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \tau)] - W_i(\rho, \tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим в координатах (ρ, τ) постановку задачи для свободной от напряжений цилиндрической полости ($\sigma_{\rho\rho}(\rho_0, \tau) = 0$):

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U^*}{\partial \rho} - \frac{U^*}{\rho^2} - \frac{\partial^2 U^*}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W_i}{\partial \rho}, \quad \rho > \rho_0, \quad \tau > 0; \quad (10)$$

$$U^*|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \rho \geq \rho_0; \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial U^*}{\partial \rho} + \nu_1 \frac{U^*}{\rho} \right)_{\rho_0} = W_i(\rho, \tau)|_{\rho=\rho_0}, \quad \tau > 0; \quad (12)$$

$$|U^*(\rho, \tau)| < \infty, \quad \rho \geq \rho_0, \quad \tau \geq 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_i}{\partial \rho}, \quad \rho > \rho_0, \quad \tau \geq 0; \quad (14)$$

$$W_i|_{\tau=0} = 0, \quad \rho \geq \rho_0; \quad (15)$$

$$W_1(\rho, \tau)|_{\rho=\rho_0} = 1, \quad \tau > 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial W_2(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = -1, \quad \tau > 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial W_3(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \text{Bi} \left[W_3(\rho, \tau)|_{\rho=\rho_0} - 1 \right], \quad \tau > 0; \quad (18)$$

$$|W_i(\rho, \tau)| < \infty, \rho \geq \rho_0, \tau \geq 0. \tag{19}$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{U}^*(\rho, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) U^*(\rho, \tau) d\tau; \quad \bar{W}_i(\rho, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) W_i(\rho, \tau) d\tau$$

находим решение задачи (14)–(19):

$$\bar{W}_i(\rho, p) = \bar{f}_i(p) K_0(\rho\sqrt{p}); \tag{20}$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{pK_0(\rho_0\sqrt{p})}, & i = 1; \\ \frac{1}{p\sqrt{p}K_1(\rho_0\sqrt{p})}, & i = 2; \\ \frac{\text{Bi}}{p[\sqrt{p}K_1(\rho_0\sqrt{p}) + \text{Bi}K_0(\rho_0\sqrt{p})]}, & i = 3, \end{cases} \tag{21}$$

где $K_i(z)$ ($i = 0; 1$) — модифицированные функции Бесселя.

Общее решение уравнения (10) в пространстве изображений

$$\Delta U^*(\rho, p) - \left(\frac{1}{\rho^2} + p^2\right) \bar{U}^*(\rho, p) = \frac{d\bar{W}_i(\rho, p)}{d\rho}, \quad \rho > \rho_0, \tag{22}$$

имеет вид

$$\bar{U}^*(\rho, p) = C_1 K_1(\rho p) + C_2 I_1(\rho p) + \bar{U}_{\text{ч.р}}^*(\rho, p). \tag{23}$$

Нахождение частного решения $\bar{U}_{\text{ч.р}}^*$ в (23) требует особого рассмотрения. Имеем

$$\frac{d}{d\rho}(\Delta \bar{U}^*) = \Delta \left(\frac{d\bar{U}^*}{d\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\bar{U}^*}{d\rho}. \tag{24}$$

Частное решение в (12) ищем в виде $\bar{U}_{\text{ч.р}}^* = A \frac{d\bar{W}_i}{d\rho}$, где постоянная A подлежит нахождению. Подставляя это выражение в (23) и используя далее (24), находим

$$A \left[\frac{d}{d\rho}(\Delta \bar{W}_i) - p^2 \frac{d\bar{W}_i}{d\rho} \right] = \frac{d\bar{W}_i}{d\rho}. \tag{25}$$

Однако $\Delta \bar{W}_i(\rho, p) = p \bar{W}_i(\rho, p)$, отсюда и из (25) $A = \frac{1}{p(1-p)}$. Таким

образом, общее решение (23) с (12) будет

$$\bar{U}^*(\rho, p) = C_1 K_1(\rho p) + \frac{1}{p(1-p)} \frac{d\bar{W}_i(\rho, p)}{d\rho}. \quad (26)$$

Постоянная C_1 в (26) должна быть найдена из граничного условия (12) в пространстве изображений. Рассмотрим для (12) случай, когда $v = \rho_0/(1+\rho_0)$; при этом $v_1 = v/(1-v) = \rho_0$, так что в (12) $v_1/\rho_0 = 1$. При этом условии и с использованием (20) находим искомую величину $\bar{U}^*(\rho, p)$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}^*(\rho, p) = & \frac{\bar{f}_i(p) K_1(\rho p)}{\sqrt{p(p-1)}} \frac{\gamma_1 K_1(\rho_0 \sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\rho_0 \sqrt{p})}{\gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p)} - \\ & - \frac{\bar{f}_i(p) K_1(\rho p)}{\sqrt{p(p-1)}} \frac{K_1(\rho \sqrt{p})}{K_1(\rho p)} - \frac{\bar{f}_i(p) K_1(\rho p)}{\sqrt{p(p-1)}} \frac{K_0(\rho \sqrt{p}) \sqrt{p(p-1)}}{\gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p)} \end{aligned}$$

и радиальное напряжение $\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p)$ из (9) в пространстве изображений:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p) = & \frac{\bar{f}_i(p)}{\sqrt{p(1-p)}} \left[\gamma_\rho K_1(\rho \sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\rho \sqrt{p}) \right] - \\ & - \frac{\bar{f}_i(p)}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{[\gamma_\rho K_1(\rho p) + p K_0(\rho p)] [\gamma_1 K_1(\rho_0 \sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\rho_0 \sqrt{p})]}{[\gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p)]} + \\ & + \bar{f}_i(p) K_0(\rho_0 \sqrt{p}) \frac{[\gamma_\rho K_1(\rho p) + p K_0(\rho p)]}{[\gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p)]} - \bar{f}_i(p) K_0(\rho \sqrt{p}). \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_\rho = (1-\rho_0)/\rho$; $\gamma_1 = (1-\rho_0)/\rho_0$; $\bar{f}_i(p)$ — соотношения (21). Обратное преобразование в (27) оказывается весьма трудоемким и приводит к сложным и трудно обозримым выражениям. Если учесть, что в постановке задачи (10)–(13) для (8) имеют место инерционные эффекты микросекундной длительности [3], то можно рассмотреть малые значения времени t , соответствующие в (27) большим значениям p , т. е. непосредственно после теплового удара. Для этого используем в (27) асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений p :

$$K_\nu(p) \approx \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{p}} \exp(-p).$$

После громоздких вычислений находим:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = -\bar{\Phi}_i(\rho, p) \exp[-(\rho - \rho_0)\sqrt{p}] + \bar{\Psi}_i(\rho, p) \exp[-(\rho - \rho_0)p], \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1(\rho, p) &= \frac{\gamma_\rho + p^{3/2}}{p^{3/2}(p-1)}; \quad \bar{\Psi}_1(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)(\gamma_1 + p^{3/2})}{p^{3/2}(p-1)(\gamma_1 + p)}; \\ \bar{\Phi}_2(\rho, p) &= \frac{\gamma_\rho + p^{3/2}}{p^2(p-1)}; \quad \bar{\Psi}_2(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)(\gamma_1 + p^{3/2})}{p^2(p-1)(\gamma_1 + p)}; \\ \bar{\Phi}_3(\rho, p) &= \frac{(\gamma_\rho + p^{3/2})\text{Bi}}{p^{3/2}(p-1)(\sqrt{p} + \text{Bi})}; \quad \bar{\Psi}_3(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)(\gamma_1 + p^{3/2})\text{Bi}}{p^{3/2}(p-1)(\sqrt{p} + \text{Bi})(\gamma_1 + p)}. \end{aligned}$$

Переход к оригиналам дает искомые выражения для радиального напряжения:

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < (\rho - \rho_0), \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau), \tau > (\rho - \rho_0). \end{cases} \quad (29)$$

Здесь

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau) = -\phi_i^*(\rho, \tau); \quad \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau) = \Psi_i[\rho, \tau - (\rho - \rho_0)],$$

где в случае (16) ($i = 1$)

$$\begin{aligned} \phi_1^*(\rho, \tau) &= \gamma_\rho \left\{ (\rho - \rho_0) \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau} \right] \right\} + \\ &+ \frac{(1 + \gamma_\rho)}{2} \exp[\tau - (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \\ &+ \frac{(1 - \gamma_\rho)}{2} \exp[\tau + (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right); \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\rho, \tau) &= -\frac{2\gamma_\rho\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2(\gamma_\rho - \gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1\pi}(1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1\tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1\tau}} \exp(y^2) dy + \\ &+ \frac{(\gamma_1 - \gamma_\rho)}{(1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1\tau) + \frac{1 + \gamma_\rho}{(1 + \gamma_1)} \exp(\tau) + \frac{\gamma_1(1 + \gamma_\rho)}{(1 + \gamma_1)} \exp(\tau) \Phi(\sqrt{\tau}); \quad (31) \end{aligned}$$

в случае (17) ($i = 2$)

$$\begin{aligned} \phi_2^*(\rho, \tau) &= \\ &= \gamma_\rho \left\{ \frac{(\rho - \rho_0)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau} \right] - \left[(1 + \tau) + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2} \right] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+\gamma_\rho}{2} \exp[\tau - (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \\
& + \frac{\gamma_\rho - 1}{2} \exp[\tau + (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right); \\
\Psi_2(\rho, \tau) = & \frac{\gamma_1(1+\gamma_\rho)}{1+\gamma_1} \exp(\tau) - \gamma_\rho \tau + \frac{\gamma_1 - \gamma_\rho}{\gamma_1(1+\gamma_1)} \exp(-\gamma_1 \tau) + \\
& + \frac{(\gamma_\rho - \gamma_1) - \gamma_1^2(1+\gamma_\rho)}{\gamma_1(1+\gamma_1)} + \frac{1+\gamma_\rho}{1+\gamma_1} \exp(\tau) \Phi(\sqrt{\tau}) + \\
& + \frac{2(\gamma_\rho - \gamma_1)}{\sqrt{\pi\gamma_1(1+\gamma_1)}} \exp(-\gamma_1 \tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1 \tau}} \exp(y^2) dy;
\end{aligned}$$

в случае (29) ($i = 3$)

$$\begin{aligned}
\phi_3^*(\rho, \tau) = & \gamma_\rho \left[(\rho - \rho_0) + \frac{1}{\text{Bi}} \right] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} \right) + \\
& + \frac{\text{Bi}(1+\gamma_\rho)}{2(1+\text{Bi})} \exp[\tau - (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \\
& - \frac{\text{Bi}(1-\gamma_\rho)}{2(1-\text{Bi})} \exp[\tau + (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) + \\
& + \frac{\text{Bi}^3 - \gamma_\rho}{\text{Bi}(1-\text{Bi}^2)} \exp[\text{Bi}^2 \tau + (\rho - \rho_0) \text{Bi}] \Phi^* \left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \text{Bi}\sqrt{\tau} \right) + \\
& + \frac{2\gamma_\rho \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau} \right]; \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(\rho, \tau) = & \left[\frac{\gamma_1(1+\gamma_\rho)}{(1+\gamma_1)} + \frac{(1+\gamma_\rho)\text{Bi} - \gamma_1}{(1+\gamma_1)(1-\text{Bi}^2)} \right] \exp(\tau) \Phi(\sqrt{\tau}) + \\
& + \frac{\text{Bi}[\text{Bi}(1+\gamma_\rho) - \gamma_1]}{(1+\gamma_1)(\text{Bi}^2 - 1)} \exp(\tau) - \frac{2\gamma_\rho \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + \frac{(1-\gamma_1)\gamma_\rho}{\text{Bi}(1+\gamma_1)} - \\
& - \left[\frac{\text{Bi}^2(1+\gamma_\rho) - \text{Bi}\gamma_1}{(1+\gamma_1)(\text{Bi}^2 - 1)} + \frac{(1-\gamma_1)\gamma_\rho}{(1+\gamma_1)\text{Bi}} + \frac{\text{Bi}(\gamma_1 - \gamma_\rho)(1+\text{Bi})}{(1+\gamma_1)(\gamma_1 + \text{Bi}^2)} \right] \exp(\text{Bi}^2 \tau) \Phi^*(\text{Bi}\sqrt{\tau}) + \\
& + \frac{\text{Bi}[(\gamma_1 - \gamma_\rho)(1+\text{Bi})]}{(1+\gamma_1)(\gamma_1 + \text{Bi}^2)} \exp(-\gamma_1 \tau) + \\
& + \left[\frac{2\sqrt{\gamma_1}(\gamma_1 - \gamma_\rho)(1+\text{Bi})}{\sqrt{\pi}(1+\gamma_1)(\gamma_1 + \text{Bi}^2)} + \frac{2(\gamma_\rho - \gamma_1)}{\sqrt{\pi\gamma_1(1+\gamma_1)}} \right] \exp(-\gamma_1 \tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1 \tau}} \exp(y^2) dy. \tag{33}
\end{aligned}$$

Результаты анализа решения. Зависимость напряжения $\left[\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) / \sqrt{\rho_0/\rho} \right]$ от времени в фиксированном сечении $\rho=1$ и $\rho_0 = 0,4$, $\gamma_\rho = 0,6$, $Vi = 0,5$ построена по (30), (31) (рис. 1, а) и (32), (33) (рис. 1, б). Рассмотрим данные, приведенные на рис. 1, а. Как следует из (29), в фиксированном сечении возникает только составляющая

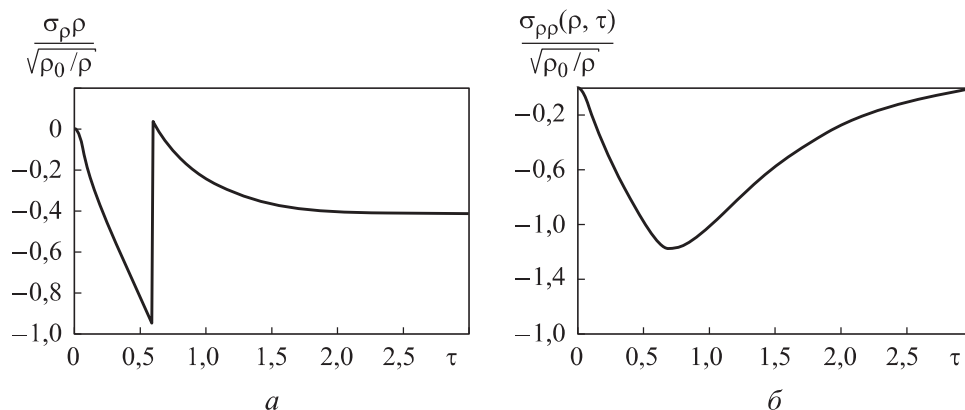


Рис. 1. Зависимость напряжения $\left[\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) / \sqrt{\rho_0/\rho} \right]$ в сечении $\rho = 1$ при температурном нагреве (16), $\gamma_\rho = 0,6$, $\rho_0 = 0,4$ (а) и при нагреве средой (18), $\gamma_\rho = 0,6$, $\rho_0 = 0,4$, $Vi = 0,5$ (б) от времени

напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau)$ — продольная упругая волна, фронт которой движется со скоростью v_p от поверхности полости внутри тела; напряжение растет от нуля до некоторого отрицательного значения, оставаясь сжимающим (материал, занимающий область $0,4 < \rho < 1,0$, нагревается сильнее материала, расположенного в области $\rho > 1$, поэтому при $\rho \leq 1$ возникают сжимающие напряжения). В момент времени $\tau = 0,6$ ($t = 0,6r/v_p$) к этому сечению приходит волна напряжения, соответствующая функции $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau)$, и напряжение скачкообразно возрастает, при температурном нагреве переходит в область положительных (растягивающих) значений и затем убывает, достигая квазистатических значений. В случае нагрева средой (см. рис. 1, б) напряжение плавно, без скачка, изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь сжимающим при всех $\tau > 0$. Таким образом, процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн.

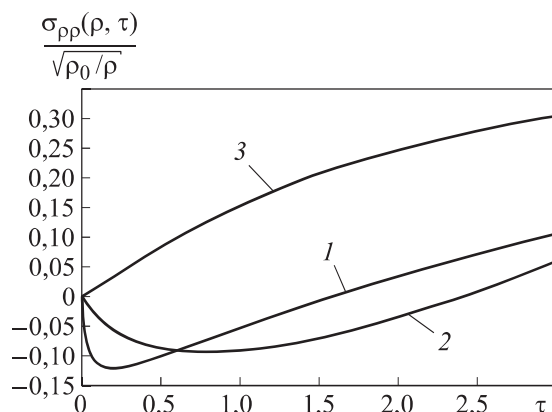


Рис. 2. Зависимость радиального напряжения $[\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)/\sqrt{\rho_0/\rho}]$ в сечении $\rho = 1$ при температурном нагреве (27) (1), при тепловом нагреве (28) (2), при нагреве средой (29) (3) для $\rho_0 = 0,4$; $\gamma_\rho = 0,6$; $Bi = 0,4$ от времени

Представляет интерес рассчитать значение скачка напряжений на фронте термоупругой волны при температурном нагреве (см. рис. 1, а), используя теорему запаздывания:

$$\bar{f}(p) \exp(-pt_0) \leftarrow \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ f(t-t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке t_0 происходит скачок функции $f(t)$. Величина этого скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0+} p\bar{f}(p).$$

Для вычисления величины $|\Delta|$ в операционном решении (28) выделим множитель $\bar{\Psi}_1(\rho, p)$ при $\exp[-(\rho - \rho_0)p]$ и найдем

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p\bar{\Psi}_1(\rho, p) = 1.$$

Величина $|\Delta|=1$ может служить верхней оценкой термического напряжения (28) в области при температурном нагреве. При пересчете полученной оценки на истинное напряжение $\sigma_{rr}(z, t)$ получим важную для практики характеристику степени опасности термического напряжения в области $r > R$ при резком нагреве ее поверхности от T_0 до T_c :

$$|\Delta| = \frac{\sqrt{r/RE\alpha_T}(T_c - T_0)}{1 - 2\nu}.$$

Отметим, что при нагреве средой скачок напряжения отсутствует ($|\Delta| = 0$), что и подтверждают данные на рис. 1, б. В практических случаях термического нагружения определяющим является именно начальное время, когда возникающие в твердых телах кратковременные динамические напряжения приводят к трещинообразованию, растрескиванию поверхностного и приповерхностных слоев, последнее можно установить, сравнивая максимальные значения напряжения сжатия, пересчитанные на величину $\sigma_{rr}(r, t)$ с пределом прочности, величина которого для конкретных материалов приводится в справочниках.

Остановимся кратко на сравнении динамических и квазистатических напряжений в условиях нагрева (16)–(18). Динамические модели (10)–(19) оправданы тем, что в случаях (16)–(18) внешние воздействия вызывают резкие изменения температуры на поверхности полости. Тем не менее иногда влияние ускорений в силу технических трудностей при решении соответствующих задач динамической термоупругости не учитывается. Зависимости радиального напряжения в сечении $\rho = 1$ от времени при квазистатической постановке задачи (10)–(19) (в (10) слагаемое $\partial^2 u^* / \partial \tau^2 = 0$ и полное решение задачи не выписывается в силу ограниченности объема работы) приведены на рис. 2. Квазистатическая составляющая решения практически определяет состояние материала после прохождения волны и не дает истинной картины термической реакции твердого тела в условиях интенсивного нагрева его поверхности.

Заключение. Рассмотрена термическая реакция массивного тела с внутренней цилиндрической полостью в условиях интенсивного нагрева поверхности полости: температурный нагрев, тепловой нагрев, нагрев средой. Приведено уравнение «совместности» в перемещениях, в рамках которого сформулирована динамическая задача термоупругости и получено ее аналитическое решение. Проведены численные эксперименты и показано, что процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн. Рассчитан скачок на фронте термоупругой волны, который может служить верхней оценкой максимума динамических термоупругих напряжений при температурном нагреве. Приведены кривые квазистатических температурных напряжений и показано, что в условиях интенсивного нагрева квазистатический подход не дает объективной картины соответствующей термической реакции твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карташов Э.М., Кудинов В.А. Математические модели теплопроводности и термоупругости. М., Изд-во МИРЭА, 2018.
- [2] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М., ФИЗМАТЛИТ, 1963.
- [3] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория термоупругих напряжений. М., Мир, 1964.
- [4] Новацкий В. Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости. *Механика*, 1966, № 6, с. 101–142.
- [5] Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика (обзор). *Математические методы и физико-механические поля*, 1975, № 2, с. 37–42.
- [6] Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Динамическая термоупругость в проблеме теплового удара на основе обобщенного уравнения энергии. *Тепловые процессы в технике*, 2018, т. 10, № 7-8, с. 334–344.
- [7] Карташов Э.М. Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности. *Тонкие химические технологии*, 2019, т. 14, № 4, с. 77–86. DOI: <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2019-14-4-77-86>
- [8] Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., Наука, 1984.
- [9] Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев, Наукова думка, 1992.
- [10] Колпащиков В.Л., Яновский С.Ю. Уравнения динамической термоупругости для сред с тепловой памятью. *Инж.-физ. журн.*, 1984, т. 47, № 4, с. 670–675.
- [11] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М., ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- [12] Карташов Э.М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии. В: *Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений*. Т. 25. М., ВИНТИ, 1988, с. 3–88.
- [13] Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. В: *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела*. Т. 22. М., ВИНТИ, 1991, с. 55–127.
- [14] Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М., Либроком, 2012.
- [15] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
- [16] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., Высш. шк., 1967.
- [17] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М., Высш. шк., 2001.
- [18] Аттетков А.В., Волков И.К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической полостью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 1999, № 1 (34), с. 49–56.

[19] Аттетков А.В., Беляков Н.С., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле твердого тела с цилиндрическим каналом в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2006, № 1 (62), с. 31–40.

[20] Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Модельное представление теплового удара. *Известия РАН. Энергетика*, 2019, № 2, с. 135–156.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S0002331019020158>

Карташов Эдуард Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики РТУ МИРЭА (Российская Федерация, 119454, Москва, Вернадского пр-т, д. 78).

Ненахов Евгений Валентинович — ассистент кафедры компьютерной математики МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Термическая реакция при тепловом ударе массивного тела с внутренней цилиндрической полостью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 6 (93), с. 60–79.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-60-79>

**THERMAL REACTION DURING THERMAL SHOCK
OF A MASSIVE BODY WITH AN INTERNAL CYLINDRICAL CAVITY**

E.M. Kartashov¹

kartashov@mitht.ru

E.V. Nenakhov²

newnew94@mail.ru

¹ Federal State Budget Educational Institution of Higher Education
“MIREA–Russian Technological University”, Moscow, Russian Federation

² Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper examines mathematical models of thermal shock in terms of dynamic thermoelasticity and their application to specific cases during intense heating of a solid boundary. We introduce a stress compatibility equation for dynamical problems, generalizing the well-known Beltrami — Mitchell relation for quasi-static cases. It is convenient to use this relation when considering numerous special cases in the theory of heat shock in Cartesian coordinates both for bounded bodies of a canonical form, i.e., an infinite plate, and for partially bounded bodies, i.e., space bounded from

Keywords

Thermal shock, dynamic thermoelasticity, wave nature, stresses, accelerations

the inside by a flat surface. In the latter case, the obtained analytical solutions of dynamic problems of thermoelasticity lead to visual and convenient for physical analysis functional structures describing the kinetics of thermal stresses. For cylindrical and spherical coordinate systems, we propose a compatibility equation in displacements, which is convenient for studying the problem of thermal shock in bodies with a radial heat flux and under conditions of central symmetry. In the study, we singled out a class of problems in which the consideration of the geometric dimensions of a structure investigated for a thermomechanical reaction under conditions of intense heating concerns mainly the near-surface layers. According to the experimental results, it is these layers that absorb the main amount of heat during a time close to the beginning of heating, which corresponds to the time of the microsecond duration of the inertial effects. We investigated the thermal reaction of a massive body with an inner cylindrical cavity within the framework of dynamic thermoelasticity under various modes of intense heating of the cavity surface. Finally, we carried out numerical experiments and described the wave character of thermal stresses with the corresponding quasi-static values, and established the role of inertial effects in mathematical models of the theory of thermal shock

Received 02.03.2020

Accepted 02.07.2020

© Author(s), 2020

REFERENCES

- [1] Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Matematicheskie modeli teploprovodnosti i termouprugosti* [Mathematical models of thermoelasticity]. Moscow, MIREA Publ., 2018.
- [2] Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Vienna, Springer, 1959.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-5710-7>
- [3] Boley B.A., Weiner J.H. *Theory of thermal stresses*. Weiner Chapman and Hall, 1960.
- [4] Novatskiy V. Review of works on dynamical problems of thermoelasticity. *Mekhanika*, 1966, no. 6, pp. 101–142 (in Russ.).
- [5] Kolyano Yu.M. *Obobshchennaya termomekhanika (obzor)* [Generalized thermal mechanics (review)]. *Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polya*, 1975, no. 2, pp. 37–42 (in Russ.).
- [6] Kartashov E.M., Nenakhov E.V. Dynamic thermoelasticity in the problem of heat shock based on the general energy equation. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2018, vol. 10, no. 7-8, pp. 334–344 (in Russ.).

- [7] Kartashov E.M. Originals of operating images for generalized problems of unsteady heat conductivity. *Tonkie khimicheskie tekhnologii* [Fine Chemical Technologies], 2019, vol. 14, no. 4, pp. 77–86 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2019-14-4-77-86>
- [8] Podstrigach Ya.S., Lomakin V.A., Kolyano Yu.M. Termouprugost' tel neodnorodnoy struktury [Thermoelasticity of bodies with inhomogeneous structure]. Moscow, Nauka Publ., 1984.
- [9] Kolyano Yu.M. Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela [Thermal conductivity and thermoelasticity methods of inhomogeneous body]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1992.
- [10] Kolpashchikov V.L., Yanovskii S.Yu. Equation of dynamical thermoelasticity in a medium with thermal memory. *J. Eng. Phys.*, 1984, vol. 47, no. 4, pp. 1241–1244.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00869927>
- [11] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli termomekhaniki [Mathematical models of thermal mechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2002.
- [12] Kartashov E.M., Bartenev G.M. Dinamicheskie efekty v tverdykh telakh v usloviyakh vzaimodeystviya s intensivnymi potokami energii [Dynamic effects in solids at the interaction with intense energy flows]. V: Itogi nauki i tekhniki. Ser. Khimiya i tekhnologiya vysokomolekulyarnykh soedineniy. T. 25 [In: Outcomes of Science and Technique. Ser. Chemistry and Technology of High-Molecular Compositions. Vol. 25]. Moscow, VINITI Publ., 1988, pp. 3–88 (in Russ.).
- [13] Kartashov E.M., Parton V.Z. Dinamicheskaya termouprugost' i problemy termicheskogo udara [Dynamic thermoelasticity in problem of thermal shock]. V: Itogi nauki i tekhniki. Ser. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela. T. 22 [In: Outcomes of Science and Technique. Ser. Mechanics of Deformable Solids. Vol. 22]. Moscow, VINITI Publ., 1991, pp. 55–127 (in Russ.).
- [14] Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoy termouprugosti [Analytical theory of heat conductivity and thermoelasticity]. Moscow, Librokom Publ., 2012.
- [15] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford Univ. Press, 1959.
- [16] Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Thermal conductivity theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967.
- [17] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in thermal conductivity theory of solids]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001.
- [18] Attetkov A.V., Volkov I.K. Formation of temperature fields in the region internally restricted by cylindrical hollow. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 1999, no. 1 (34), pp. 49–56 (in Russ.).
- [19] Attetkov A.V., Belyakov N.S., Volkov I.K. Influence of boundary mobility on temperature field of solid body with cylindrical channel under non-stationary conditions of

heat exchange with environment. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2006, no. 1 (62), pp. 31–40 (in Russ.).

[20] Kartashov E.M., Nenakhov E.V. Model representations of heat shock. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the RAS. Power Engineering], 2019, no. 2, pp. 135–156 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0002331019020158>

Kartashov E.M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education “MIREA–Russian Technological University” (Vernadskogo prospekt 78, Moscow, 119454 Russian Federation).

Nenakhov E.V. — Post-Graduate Student, Department of Computational Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kartashov E.M., Nenakhov E.V. Thermal reaction during thermal shock of a massive body with an internal cylindrical cavity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 6 (93), pp. 60–79 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-60-79>