УДК 537.87

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

А. М. Макаров, Л. А. Лунёва, К. А. Макаров

Московский государственый технический университет им. Н.Э. Баумана (e-mail: anmak2009@rambler.ru)

Получено точное решение задачи о распространении гармонических во времени колебаний электромагнитного поля в изотропной пространственно неоднородной прозрачной среде, параметры которой стационарны и произвольно изменяются вдоль заданного направления.

Ключевые слова: электромагнитное поле, неоднородная прозрачная среда.

ELECTROMAGNETIC WAVE IN THE INHOMOGENEOUS ISOTROPIC TRANSPARENT MEDIUM

A. M. Makarov, L. A. Lunyova, K. A. Makarov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow (e-mail: anmak2009@rambler.ru)

An exact solution is derived to the problem on propagation of temporally-harmonic electromagnetic oscillations in the isotropic spatially-inhomogeneous transparent medium whose parameters are stationary and change arbitrarily along the specified direction.

Keywords: electromagnetic field, inhomogeneous transparent medium.

Исследованию распространения электромагнитных волн в неоднородной изотропной непроводящей среде посвящено большое число публикаций. Наиболее полно разработаны теоретические основы геометрической оптики как приближение “коротких волн” [1–3]. Уравнения геометрической оптики (уравнение эйконала и уравнение переноса [2]) получают из дифференциальных уравнений классической электродинамики [3] или из волновых уравнений для напряженности электрического или магнитного поля с полным или частичным (показатель преломления среды — функция пространственных координат) учетом неоднородности среды, используя метод разложения в ряд по малому параметру.

В классической работе [3] искомые зависимости амплитуд гармонических во времени колебаний напряженностей электрического и магнитного полей записываются в форме

$$\vec{E}_0 = \vec{e}\,(\vec{r}\,)\exp(ik_0\wp(\vec{r}\,)), \quad \vec{H}_0 = \vec{h}\,(\vec{r}\,)\exp(ik_0\wp(\vec{r}\,)),$$

где $\wp(\vec{r}\,)$ — оптический путь — вещественная функция положения (эйконал), а $\vec{e}(\vec{r}\,)$ и $\vec{h}(\vec{r}\,)$ — векторные функции положения (в общем случае комплексные). Принимается, что постоянная величина k_0 — большой параметр. Приближения нулевого и первого порядка малости можно получить либо отбрасывая члены более высокого порядка малости в дифференциальных уравнениях, либо используя разложение по малому параметру в предполагаемом решении [2]. В работе [3] утверждается, что во многих важных случаях векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ можно разложить в асимптотические ряды вида

$$\vec{E}_0 = \exp(ik_0\wp(\vec{r}))\sum_{m\geq 0}\frac{\vec{e}^{(m)}}{(ik_0)^m}, \quad \vec{H}_0 = \exp(ik_0\wp(\vec{r}))\sum_{m\geq 0}\frac{\vec{h}^{(m)}}{(ik_0)^m}.$$

Отметим, что форма решения (векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$) при этом имеет сомножитель, разложенный по малому параметру, а экспоненциальный сомножитель содержит большой параметр. Если экспоненту разложить в степенной ряд и эти разложения перемножить, то оценки порядка малости оставленных членов могут оказаться несостоятельными. Кроме того, практическая реализация метода разложения в ряд по малому параметру в рассматриваемом случае приводит к отбрасыванию членов со старшей производной из системы уравнений классической электродинамики. В теории возмущений это соответствует случаю так называемых сингулярных возмущений. Разложение в ряд по малому параметру при этом может содержать члены порядка дробных степеней малого параметра, порядка логарифма малого параметра, порядка произведения малого параметра на логарифм малого параметра и т.п. Использование регулярной части метода разложения решения в рассматриваемом случае влечет за собой потерю информации о так называемом “пограничном слое” точного решения задачи. По-видимому, этим объясняется тот факт, что допущения геометрической оптики [1] не справедливы на границе геометрической тени, вблизи фокуса, в мутной среде и в средах с сильным поглощением.

В настоящей работе исследовано распространение электромагнитной волны в неоднородной среде без привлечения аппарата теории малого параметра.

Система уравнений классической электродинамики в линейном приближении для пространственно неоднородной изотропной непроводящей среды имеет вид

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{1}$$

Материальные уравнения среды запишем в общепринятой форме

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t); \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \mu(\vec{r})\mu_0\vec{H}(\vec{r},t), \tag{2}$$

полагая, что зависимости диэлектрической и магнитной проницаемостей среды от радиус-вектора точки наблюдения описываются достаточно гладкими функциями, т.е. выполняется условие непрерывности функций и их первых пространственных производных.

Решение системы уравнений (1)–(2) будем искать в форме

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t); \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})\exp(-i\omega t), \tag{3}$$

круговую частоту ω принимаем постоянной действительной положительной величиной. Для объемной плотности стороннего электрического заряда полагаем справедливым соотношение

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\exp(-i\omega t).$$

Для гармонического во времени электромагнитного поля справедливы уравнения:

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\vec{E} = i\omega\vec{B}; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = -i\omega\vec{D}. \tag{4}$$

Предположим, что решение рассматриваемой системы уравнений (4) можно записать в форме

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0'\exp(i\Phi(\vec{r})); \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0'\exp(i\Phi(\vec{r})), \tag{5}$$

где $\vec{E}_0'$ и $\vec{H}_0'$ — постоянные векторные величины, а скалярная функция $\Phi(\vec{r})$ — произвольная, не обязательно действительная гладкая функция точки наблюдения. Форма решения (5) описывает случай, когда плоскость поляризации электромагнитного поля остается постоянной, а вектор $\vec{E}_0$ не меняет своего направления в плоскости колебаний напряженности электрического поля. Такое же замечание имеет место и для вектора $\vec{H}_0$. Отметим, что даже в случае действительной функции $\Phi(\vec{r})$ трансформация решения задачи к зависимости в форме бегущей волны с переменной длиной волны приводит к зависимости локальной амплитуды колебаний от координат точки наблюдения.

Очевидно, что для выбранной формы решения справедливы соотношения

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = i\nabla\Phi\cdot\vec{E}(\vec{r}); \quad \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = i\nabla\Phi\times\vec{E}(\vec{r});$$

$$\mathrm{div}\vec{H}(\vec{r}) = i\nabla\Phi\cdot\vec{H}(\vec{r}); \quad \mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = i\nabla\Phi\times\vec{H}(\vec{r}).$$

В приведенных выше соотношениях и далее предполагается, что оператор Гамильтона ∇ действует только на следующую за ним функцию, т.е. выражение $\nabla\Phi$ обозначает градиент функции $\Phi(\vec{r})$.

Отметим, что в рассматриваемом случае следствием "роторных" уравнений в системе уравнений (4) являются однородные "дивергентные" уравнения, т.е. справедливы соотношения

$$(\nabla\varepsilon + i\nabla\Phi)\cdot\vec{E} = 0; \quad (\nabla\mu + i\nabla\Phi)\cdot\vec{H} = 0; \quad \rho(\vec{r},t) = 0. \tag{6}$$

"Роторные" уравнения системы (4) приобретают при этом следующий вид:

$$\nabla\Phi \times \vec{E} = \omega\mu\mu_0\vec{H}; \quad \nabla\Phi \times \vec{H} = -\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}. \tag{7}$$

В уравнениях (7) опущены явные указания на зависимости рассматриваемых физических величин от координат точки наблюдения. Структура уравнений системы (7) предопределяет взаимную ортогональность векторных величин:

$$\vec{E}\perp\nabla\Phi, \quad \vec{H}\perp\nabla\Phi, \quad \vec{E}\perp\vec{H}. \tag{8}$$

С учетом этого из уравнений (6) следует, что должны быть выполнены соотношения

$$\vec{E}\cdot\nabla\varepsilon = 0; \quad \vec{H}\cdot\nabla\mu = 0 \Rightarrow \vec{E}\perp\nabla\varepsilon; \quad \vec{H}\perp\nabla\mu. \tag{9}$$

Система уравнений (7) сводится к уравнению для напряженности электрического поля $\vec{E}$ или к уравнению для напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\nabla\Phi\times(\nabla\Phi\times\vec{E}) = -\omega^2\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0\vec{E}; \; \nabla\Phi\times(\nabla\Phi\times\vec{H}) = -\omega^2\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0\vec{H}. \tag{10}$$

Идентичность первого и второго уравнений (10) предопределяет одинаковый характер зависимости напряженностей рассматриваемых электрического и магнитного полей от пространственных координат.

Раскрывая двойные векторные произведения в уравнениях (10) и учитывая необходимые условия (8), получаем уравнения

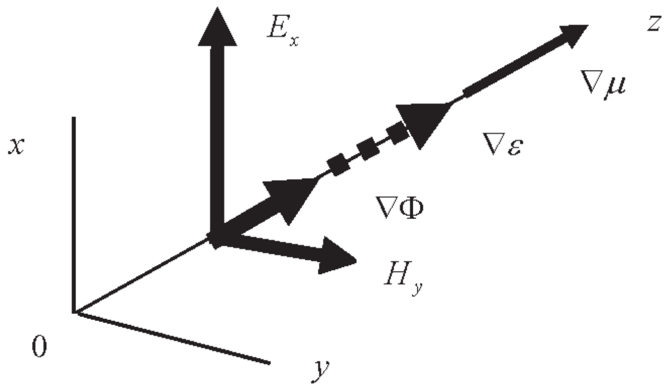
$$(\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi - a^2)\cdot\vec{E} = 0; \; (\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi - a^2)\cdot\vec{H} = 0; \; a^2 = \omega^2\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0. \tag{11}$$

Нетривиальное решение уравнений (11) существует, если выполнено условие (дисперсионное уравнение)

$$\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi = a^2. \tag{12}$$

Отметим, что при выполнении условия (12) уравнения (11) обращаются в тождества при произвольных векторах $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Однако следует иметь в виду, что решение рассматриваемой задачи получено с учетом весьма жестких ограничений (8) и (9). Эти ограничения выполнены, в частности, для одномерного случая, в котором направления градиентов диэлектрической проницаемости среды, магнитной проницаемости среды и искомой функции Φ совпадают и не изменяются в пространстве, а векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны градиенту искомой функции Φ и взаимно ортогональны (рисунок).

Условия существования решения каждого из однородных уравнений (10) можно получить (не используя явно необходимые условия (8)), если записать операцию векторного произведения градиента



Система координат и ориентация векторов электромагнитной волны

функции $\Phi(\vec{r})$ на вектор $\vec{E}$ в векторно-матричной форме [4]:

$$\nabla\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix}; \;\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}; \;\nabla\Phi\times\vec{E} = \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_z & \Phi_y \\ \Phi_z & 0 & -\Phi_x \\ -\Phi_y & \Phi_x & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}.$$

В векторно-матричной форме записи последнее соотношение имеет компактный вид: $\hat{\Phi}\cdot\vec{E}$. Повторное применение операции векторного произведения к $\nabla\Phi$ и полученному результату позволяет записать уравнение (10) для напряженности электрического поля в форме однородного векторно-матричного уравнения

$$(\hat{\Phi}\cdot\hat{\Phi} + a^2\cdot\hat{\delta})\cdot\vec{E} = 0, \quad a^2 = \omega^2\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0. \tag{13}$$

Матрица $\hat{\delta}$ в уравнении (13) является единичной. Внешне уравнение (13) отличается по своей структуре от первого из уравнений (11), но оно сводится к последнему, если воспользоваться следствием (8) "роторных" уравнений, согласно которому $\nabla\Phi\perp\vec{E}$, т.е.

$$\Phi_x\cdot E_x + \Phi_y\cdot E_y + \Phi_z\cdot E_z = 0.$$

Нетривиальное решение уравнения (13) существует, если матрица его коэффициентов особенная:

$$\left|\hat{\Phi}\cdot\hat{\Phi} + a^2\cdot\hat{\delta}\right| = 0. \tag{14}$$

Раскрывая определитель в левой части соотношения (14), приходим к уравнению (12).

По внешнему виду форма записи уравнения (12) совпадает с известным в геометрической оптике уравнением эйконала, методы решения которого хорошо разработаны. Однако между уравнением (12) и уравнением эйконала существуют различия. Так, уравнение (12) является точным результатом теории в специальных условиях наблюдения, но без ограничений на длину волны. Уравнение эйконала является приближенным результатом, учитывающим малость длины волны, но при более слабых ограничениях на пространственную ориентацию векторов электромагнитного поля и вектора распространения возмущения с течением времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С и в у х и н Д. В. Оптика: Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Физматлит, 1985. – 752 с.
2. В и н о г р а д о в а М. Б., Р у д е н к о О. В., С у х о р у к о в А. П. Теория волн. – М.: Наука. Физматлит, 1979. – 384 с.
3. Б о р н М., В о л ь ф Э. Основы оптики. Пер. с англ. – М.: Наука. Физматлит, 1970. – 856 с.
4. К о р е н е в Г. В. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240 с.

Статья поступила в редакцию 22.02.2012