

**КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ «УХОД» МАЯТНИКА
ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ТОЧКИ ПОДВЕСА
ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ ВИБРАЦИЕЙ
С НЕКРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ**

О.Н. Тушев
Д.С. Чернов

tushev@bmstu.ru
dmitrij-chernov9697@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача динамического поведения плоского маятника при полигармонической вибрации. Полагается, что углы между вертикальной осью координат и направлениями воздействий отдельных гармонических составляющих в общем случае различны. В соответствии с известным подходом решение осуществляется в два приближения. При этом движение маятника раскладывается на две составляющие: 1) «медленную» с частотой порядка собственной; 2) «быструю» с частотой внешних воздействий. Вследствие некратности частот оно представляет собой, по существу, апериодический процесс. В связи с этим при выводе основных соотношений невозможно использовать эффективный прием осреднения решения на периоде быстрых колебаний. Разделение решения по частотам колебаний позволило получить уравнение, описывающее медленное движение и на его основании — приближенную формулу для определения квазистатического перемещения маятника («ухода»). Результат обобщен на систему с диссипацией энергии. Показано, что в окрестности квазистатического положения маятника возможна потеря устойчивости в результате параметрического резонанса на комбинационных частотах внешнего воздействия. Результаты иллюстрируются примером, в котором приближенное решение сравнивается с точным, полученным численным моделированием. Приведены результаты сравнения

Ключевые слова

Маятник, квазистатическое решение, полигармоника, «уход» маятника, медленное и быстрое движения, диссипация, параметрический резонанс

Поступила 13.05.2021
Принята 21.06.2021
© Автор(ы), 2021

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант РФФИ № 20-08-01076А)

Введение. Анализ колебаний и устойчивости маятника с изменяющимися во времени параметрами, в частности с вибрирующей точкой подвеса, является классической и одной из самых «древних» задач механики. С одной стороны, это связано с простотой системы, позволяющей применить наглядные аналитические методы решения, а с другой — с ее характерными динамическими свойствами, присущими в той или иной степени всем параметрически возбуждаемым системам. Как правило, математическое описание движения системы осуществляется с использованием уравнений типа Матье или Хилла. При этом с определенной степенью условности обозначились два направления исследований: 1) потеря устойчивости и динамика системы при «низкочастотных» воздействиях (параметрический резонанс); 2) динамические эффекты типа повышения устойчивости при «высокочастотных» вибрациях, следствием которых является вибрационный момент. Влияние момента заметно проявляется при достаточно высокочастотных вибрациях (по отношению к собственной частоте колебаний маятника). Во многих работах по теории колебаний и динамике конструкций приведены различные задачи с параметрическими воздействиями; наиболее распространенный результат — диаграмма Айнса — Стретта, определяющая границы области неустойчивости для маятника при синусоидальном вертикальном воздействии [1]. Эта задача в [2–4] рассмотрена с более общих позиций.

Задачи анализа динамики линейных и нелинейных систем при наличии двух периодических и двух параметрических синусоидальных воздействий рассмотрены в [5, 6]. Показано, что при этом могут возникать множественные параметрические резонансы на комбинационных частотах.

Противоположный эффект достигается, если вертикальная гармоническая вибрация является высокочастотной. Тогда положение «перевернутого» на 180° маятника, соответствующее максимальной потенциальной энергии, при определенных условиях становится устойчивым. Эту задачу впервые решил П.Л. Капица [7]. Фундаментальные результаты общего характера по повышению устойчивости механических систем при воздействии высокочастотной вибрации получены В.Н. Челомеем [8–10] на основе асимптотических методов, разработанных Н.Н. Боголюбовым и развитых Ю.Л. Митропольским [11–13]. Эти результаты распространены на многостепенный маятник [14, 15]. Трехстепенный маятник, убедительно подтверждающий эти результаты, исследован в [16].

Представляет самостоятельный интерес родственная задача анализа динамики маятника при высокочастотном перемещении точки подвеса

под углом ϑ к вертикальному направлению: $0 < \vartheta < \pi/2$ («косая» вибрация). В результате действия вибрационного момента возникает отклонение («уход») маятника от вертикали. Практически этот эффект наблюдается, например, в виде ложного сигнала (погрешности) стрелочных приборов (стрелка-маятник) и вращения незатянутых гаек [10, 17].

Большая часть результатов в перечисленных работах (и не только в них) получена для гармонических или хотя бы периодических воздействий, которые могут быть разложены в ряд Фурье. Если они представляют собой полигармонику, то частоты ее элементов должны быть кратными. Это условие необходимо, поскольку для выделения медленной части используется осреднение решения на периоде быстрых колебаний. Авторам настоящей статьи неизвестны работы, в которых рассматривалось бы определение «ухода» маятника или постоянной составляющей в решении какой-либо другой системы при параметрическом воздействии в виде суммы гармоник с некратными частотами. Поскольку в этом случае возмущение представляет собой аperiodический процесс, может даже возникнуть сомнение в отношении существования такого решения в принципе.

Результаты. Рассмотрим колебания физического маятника (рис. 1), точка подвеса которого совершает полигармонические колебания с компонентами

$$z_i(t) = \delta_i \cos(p_i t + \gamma_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

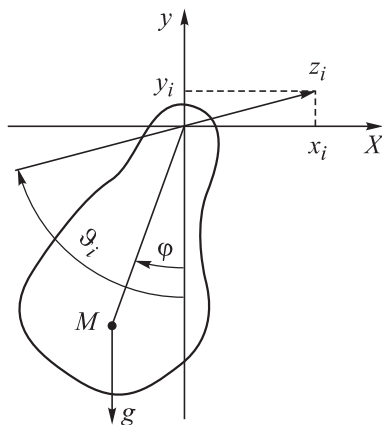


Рис. 1. Схема физического маятника

каждый из которых направлен под углом ϑ_i относительно вертикальной оси; δ_i — амплитуда; p_i — некратные в общем случае частоты.

Отметим, что в таком варианте фазовые сдвиги, которые можно ввести в соотношение (1), роли не играют, что и подтверждается в дальнейшем изложении. Исключением является вариант равенства частот двух или более гармоник, который легко устраняется их объединением. В относительной системе координат уравнение движения маятника записывается в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \left(1 + \frac{\ddot{y}}{g} \right) \sin \varphi = -\omega^2 \frac{\ddot{x}}{g} \cos \varphi, \quad (2)$$

где $\omega^2 = Mgl/J$, M, J — масса и момент инерции, l — расстояние от точки подвеса до центра тяжести;

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^m z_i(t) \sin \vartheta_i; \\ y(t) &= \sum_{i=1}^m z_i(t) \cos \vartheta_i. \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки (1) и (3) в уравнение (2) получим

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \left(1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \varphi = \omega^2 \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \cos p_i t \right) \cos \varphi, \quad (4)$$

где

$$\alpha_i = \frac{\delta_i p_i^2}{g} \cos \vartheta_i; \quad \beta_i = \frac{\delta_i p_i}{g} \sin \vartheta_i.$$

Уравнение (4) отличается от классического уравнения Хилла наличием аддитивного воздействия и некратностью частот p_i . Используем допущения и схему решения задачи, предложенные в [11, 12], до тех пор, пока не потребуются выполнения условия кратности частот. При этом полагается, что

$$\delta_i / l \ll 1, p_i / \omega \gg 1 \forall i. \quad (5)$$

Это означает, что амплитуда колебаний подвижного основания мала, а сами колебания являются высокочастотными.

Допустим, что движение маятника складывается из медленного движения φ_0 с частотами в окрестности ω и быстрыми малыми движениями $\Delta\varphi_i$, каждое из которых является вибрацией с частотами p_i :

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i. \quad (6)$$

Подставим (6) в (4):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\ddot{\varphi}_i + \omega^2 \left(1 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i \right) &= \\ = \omega^2 \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \cos p_i t \right) \cos \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В первом приближении полагаем, что

$$\sin \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = 0, \quad \cos \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = 1. \quad (8)$$

Преобразив синус и косинус суммы углов в (7) по известным формулам с учетом (8), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + \omega^2 \sin \varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\ddot{\varphi}_i + \omega^2 \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cos p_i t \right) \sin \varphi_0 = \\ = \omega^2 \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \cos p_i t \right) \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Потребуем, чтобы равенство (9) выполнялось отдельно для каждой группы членов, имеющих одинаковые частоты. Для медленного движения

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega^2 \sin \varphi_0 = 0.$$

Для каждого элемента суммы быстрых движений

$$\Delta\ddot{\varphi}_i = -\omega^2 \alpha_i \cos p_i t \sin \varphi_0 + \omega^2 \beta_i \cos p_i t \cos \varphi_0. \quad (10)$$

Проинтегрируем дважды соотношение (10), полагая $\sin \varphi_0$ и $\cos \varphi_0$ приблизительно постоянными величинами:

$$\Delta\varphi_i = \frac{\omega^2 \alpha_i}{p_i^2} \cos p_i t \sin \varphi_0 - \frac{\omega^2 \beta_i}{p_i^2} \cos p_i t \cos \varphi_0. \quad (11)$$

Во втором приближении

$$\sin \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i, \quad \cos \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = 1, \quad (12)$$

тогда

$$\begin{aligned} \sin \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i \right) &= \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i; \\ \cos \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i \right) &= \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в (13) значение $\Delta\varphi_i$ из (11), затем полученное соотношение и $\Delta\ddot{\varphi}_i$ из (10) — в (7). После несложных, но громоздких преобразований запишем

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}_0 + \omega^2 \sin \varphi_0 + \omega^4 \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\alpha_i}{2p_i^2} \sin 2\varphi_0 - \frac{\beta_i}{p_i^2} \cos^2 \varphi_0 \right) \cos p_i t \right] + \\ & + \frac{\omega^4}{2} \sum_{i,j=1}^m \left\{ \left[\left(\frac{\alpha_i \alpha_j}{2p_j^2} - \frac{\beta_i \beta_j}{2p_j^2} \right) \sin 2\varphi_0 + \left(\frac{\alpha_j \beta_i}{2p_j^2} - \frac{\alpha_i \beta_j}{2p_j^2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\alpha_j \beta_i}{2p_j^2} - \frac{\alpha_i \beta_j}{2p_j^2} \right) \cos 2\varphi_0 \right] \left[\cos(p_i - p_j)t + \cos(p_i + p_j)t \right] \right\} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Если допустить, что внешнее воздействие представляет собой полигармонику в виде ряда Фурье, то члены уравнения (14), содержащие множители $\cos(p_i - p_j)t$, также являются высокочастотными. В общем случае для некратных частот это несправедливо. Не вводя дополнительных допущений, полагаем, что значения частот $|p_i - p_j| \forall i \neq j$ имеют порядок низкой частоты. Как и в первом приближении, оставим в (14) только члены с низкой частотой, тогда

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi}_0 + \omega^2 \sin \varphi_0 + \frac{\omega^4}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{2p_i^2} \sin 2\varphi_0 - \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i^2} \cos 2\varphi_0 \right] + \\ & + \frac{\omega^4}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left[\frac{\alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j}{2p_i^2} - \left(\frac{\alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j}{2p_i^2} \right) \cos 2\varphi_0 \right] \cos(p_i - p_j)t = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Таким образом, имеем нелинейное уравнение для описания медленного движения с полигармоническими аддитивными и параметрическими воздействиями. Полагаем, что аддитивное воздействие не влияет на квазистатическое решение, а параметрическое, если влияет, то очень слабо. Это позволяет исключить их из рассмотрения. Тем не менее, если поставить задачу более широко, чем в настоящей работе, то следует более подробно рассмотреть вызванные этими воздействиями колебания в окрестности квазистатического положения маятника. В приведенном далее примере показано, как они себя проявляют.

Уравнение (15) в сокращенном варианте и для квазистатического решения $\tilde{\varphi}_0$ при $\dot{\varphi} = 0$ запишется в виде

$$\sin \tilde{\varphi}_0 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{2p_i^2} \sin 2\tilde{\varphi}_0 - \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i^2} \cos 2\tilde{\varphi}_0 \right] = 0. \quad (16)$$

Для малого угла ухода

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i / p_i^2}{1 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m (\alpha_i^2 - \beta_i^2) / p_i^2}. \quad (17)$$

Результат, полученный с использованием (17), можно уточнить, решая нелинейное уравнение (16) методом последовательных приближений.

Распространим полученные результаты на маятник с вязким сопротивлением. Тогда в уравнение движения (4) добавится член $2n\dot{\varphi}$, где n — декремент затухания. При этом схема решения полностью сохранится.

Разделив движение на быстрое и медленное, с использованием допущений первого приближения получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 + \omega^2 \sin \varphi_0 &= 0, \\ \Delta\dot{\varphi}_i + 2n\Delta\varphi_i &= \omega^2 (\beta_i \cos \varphi_0 - \alpha_i \sin \varphi_0) \cos p_i t. \end{aligned} \quad (18)$$

Частное решение (18) при условии, что $\sin \varphi_0 \cong \text{const}$, $\cos \varphi_0 \cong \text{const}$, запишется в виде

$$\Delta\varphi_i = \frac{\omega^2 (\alpha_i \sin \varphi_0 - \beta_i \cos \varphi_0)}{p_i \sqrt{p_i^2 + 4n^2}} \cos (p_i t + \varepsilon_i), \quad (19)$$

где $\varepsilon_i = -2n / p_i$.

Проведя второе приближение с использованием (19) и пренебрегая фазой, получаем уравнение для медленной составляющей решения:

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_0 + 2n\dot{\varphi}_0 + \omega^2 \sin \varphi_0 + \\ &+ \frac{\omega^4}{2} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{2p_i \sqrt{p_i^2 + 4n^2}} \sin 2\varphi_0 - \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i \sqrt{p_i^2 + 4n^2}} \cos 2\varphi_0 \right] = 0. \end{aligned}$$

При условии $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\ddot{\varphi}_0 = 0$ и малости квазистатического решения окончательно получим

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{\frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i \sqrt{p_i^2 + 4n^2}}}{1 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2 - \beta_i^2}{p_i \sqrt{p_i^2 + 4n^2}}}. \quad (20)$$

Для расчетов удобнее подставить в (20) значения α_i, β_i , тогда

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{\frac{\omega^2}{4g^2} \sum_{i=1}^m \frac{\delta_i^2 p_i^3}{\sqrt{p_i^2 + 4n^2}} \sin 2\vartheta_i}{1 + \frac{\omega^2}{4g^2} \sum_{i=1}^m \frac{\delta_i^2 p_i^3}{\sqrt{p_i^2 + 4n^2}} \cos 2\vartheta_i}.$$

Пример. В качестве примера выбраны следующие параметры маятника: $\omega = 1,6$ Гц, $n = 0,2$. Численное моделирование осуществлялось на основе системы *Mathematica (Wolfram Language)*. Квазистатический угол ухода маятника определялся по формуле

$$\varphi_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt,$$

где T — интервал, выбираемый из условия практически полной стабильности результата. Вычислялась относительная погрешность $\delta\varphi$, %.

Расчеты проводились для трех вариантов.

Первый вариант. Две гармоники: $\delta_1 = \delta_2 = 2$ мм, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 45^\circ$, первая из которых имеет фиксированную частоту $p_1 = 17$ Гц; частота второй гармоники варьируется в пределах 10...15 Гц.

Результаты, полученные численным моделированием и приближенным методом, практически совпали за исключением двух точек, где $|p_1 - p_2| = 1,6$ Гц (рис. 2), и соответствуют резонансному режиму, где погрешность существенно больше. Приведенные в табл. 1 численные результаты подтверждают это.

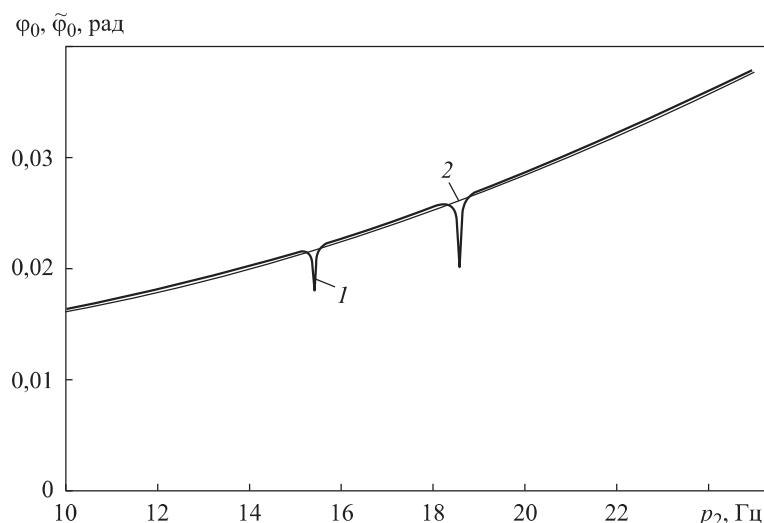


Рис. 2. Зависимость угла ухода от частоты второй гармоники φ_0 (1) и $\tilde{\varphi}_0$ (2)

Таблица 1

**Численные результаты первого варианта расчета
при фиксированной частоте $p_1 = 17$ Гц**

p_2 , Гц	φ_0 , рад	$\tilde{\varphi}_0$, рад	$\delta\varphi$, %
13,0	0,018788	0,018983	1,027077
17,0	0,023711	0,023912	0,840435
18,0	0,025147	0,025233	0,341657
18,6	0,026047	0,02266	14,94969
19,0	0,026664	0,026847	0,678852
21,0	0,029946	0,030107	0,534709
29,0	0,046355	0,046373	0,038699
34,0	0,059277	0,059421	0,242243
45,0	0,094926	0,093588	1,429275
51,0	0,118555	0,115816	2,36471

Перемещения маятника в резонансной точке и в точке, достаточно далекой от резонанса, показаны на рис. 3.

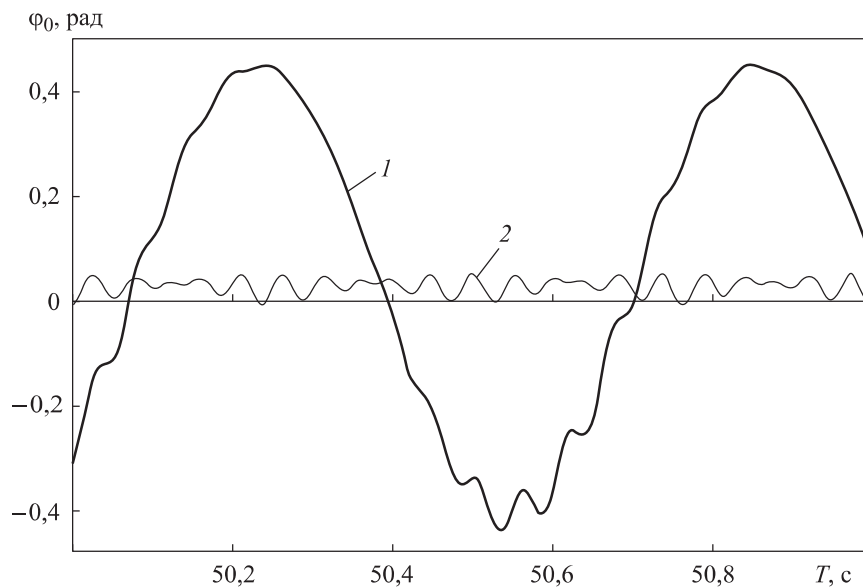


Рис. 3. Установившиеся колебания маятника для $p_1 = 17$ Гц, $p_2 = 18,6$ Гц (1) и $p_1 = 17$ Гц, $p_2 = 21$ Гц (2)

Второй вариант. Полигармоническое воздействие при $m > 2$ для произвольно выбранных частот внешнего воздействия. В этом случае точность также хорошая (табл. 2).

Таблица 2

Численные результаты второго варианта расчета

p_1 , Гц	φ_0 , рад	$\tilde{\varphi}_0$, рад	$\delta\varphi$, %
11, 13, 17, 19, 23	0,06022	0,060058	0,270282
15, 20, 25	0,051253	0,051209	0,085447

Третий вариант. Влияние амплитуд на точность результата для $p_1 = 10$ Гц, $p_2 = 20$ Гц в пределах 4 мм. Погрешность не превышала 1,5 %.

Заключение. При реализации метода Боголюбова во втором приближении осреднение по периоду быстрых колебаний можно заменить повторной операцией сегрегации по частотам.

При решении нет необходимости вводить ограничение на периодичность внешнего воздействия. В системе возможно возникновение множественных параметрических и обычных резонансов на комбинационных частотах внешнего воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
- [2] Сейранян А.П., Ябуно Х., Цумото К. Неустойчивость и периодические движения физического маятника с колеблющейся точкой подвеса. *ДАН*, 2005, т. 404, № 2, с. 192–197.
- [3] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. Multiparameter stability with mechanical applications. World Scientific, 2004.
- [4] Yabuno H., Miura M., Aoshima N. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 273, iss. 3, pp. 493–513. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00507-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00507-8)
- [5] Челомей С.В. Нелинейные колебания с параметрическим возбуждением. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1977, № 3, с. 44–53.
- [6] Челомей С.В. О динамической устойчивости прямого трубопровода, нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости. *Изв. АН РФ. Механика твердого тела*, 1998, № 6, с. 175–184.
- [7] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журнал exper. и теор. физики*, 1951, т. 21, № 5, с. 588–597.
- [8] Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. *ДАН СССР*, 1956, т. 110, № 3, с. 345–347.
- [9] Челомей В.Н. Избранные труды. М., Машиностроение, 1989.

- [10] Синельников А.В. Уходы маятника на вибрирующем основании в случае действия эллиптической вибрации. *Изв. АН СССР. Механика*, 1956, т. 110, № 3, с. 87–93.
- [11] Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одном варианте метода усреднения. *Вестник МГУ. Сер. 3, физика, астрономия*, 1961, № 3, с. 24–34.
- [12] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974.
- [13] Chekurin L., Chekurin S. Physical fundamentals of oscillations. Frequency analysis of periodic motion stability. Cham, Springer, 2018.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-75154-2>
- [14] Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата, Наука, 1981.
- [15] Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 1999, № 6, с. 159–166.
- [16] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрацией. *ДАН СССР*, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
- [17] Benaroya H. Mechanical vibration: analysis, uncertainties, and control. Prentice Hall, 2017.
- [18] Иориш Ю.И. Виброметрия. М., Наука, 1963.

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Чернов Дмитрий Сергеевич — студент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Тушев О.Н., Чернов Д.С. Квазистатический «уход» маятника при возмущении точки подвеса высокочастотной полигармонической вибрацией с некротными частотами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5 (98), с. 4–16. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-4-16>

**PENDULUM QUASI-STATIC DRIFT EFFECT
AT SUSPENSION POINT EXCITATION
BY HIGH-FREQUENCY POLYHARMONIC MULTIPLE
FREQUENCY VIBRATION**

O.N. Tushev

tushev@bmstu.ru

D.S. Chernov

dmitrij-chernov9697@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper dwells upon the dynamic behavior of a 2d pendulum under polyharmonic vibration. The study shows that the angles between the vertical coordinate axis and the directions of the individual harmonic components effects are generally different. Relying on the well-known approach, we solved the problem in two approximations. The movement of the pendulum contains two components: the 'low-frequency' component and the 'high-frequency' one. As the frequencies are not multiple, the movement is essentially an aperiodic process. Hence, when deriving the basic relations, it is impossible to use an effective method of averaging the solution within a period of fast oscillations. Dividing the solution by the frequencies of oscillations, we obtained an equation describing the slow motion and an approximate formula based on it for determining the pendulum quasi-static displacement, i.e., the 'drift effect'. The result is generalized by taking energy dissipation into account. Findings of research show that near the quasi-static position of the pendulum, loss of stability is possible as a result of parametric resonance at the combination frequencies of the external action. The paper gives an example in which an approximate solution is compared with an exact numerical simulation and shows the results of this comparison

Keywords

Pendulum, quasi-static displacement, polyharmonic, pendulum drift, low-frequency and high-frequency component, dissipation, parametric resonance

Received 13.05.2021

Accepted 21.06.2021

© Author(s), 2021

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR grant no. 20-08-01076A)

REFERENCES

- [1] Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebaniy [Oscillation theory]*. Moscow, BMSTU Publ., 2003.
- [2] Seyranyan A.P., Yabuno Kh., Tsumoto K. Instability and periodic motion of a physical pendulum with a vibrating suspension point (theoretical and experimental approach). *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 9, pp. 467–472. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.2074117>
- [3] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter stability with mechanical applications*. World Scientific, 2004.
- [4] Yabuno H., Miura M., Aoshima N. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 273, iss. 3, pp. 493–513. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00507-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00507-8)
- [5] Chelomey S.V. Nonlinear oscillations with parametric excitation. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1977, no. 3, pp. 44–53 (in Russ.).

- [6] Chelomey S.V. On dynamic stability of straight pipeline with pulsing liquid inside under effect of variable axial force. *Izv. AN RF. Mekhanika tverdogo tela*, 1998, no. 6, pp. 175–184 (in Russ.).
- [7] Kapitsa P.L. Dynamic stability of a pendulum with oscillating suspension point. *Zhurnal eksper. i teor. fiziki*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597 (in Russ.).
- [8] Chelomey V.N. On possibility of raising elastic system stability by means of vibrations. *Dokl. AN SSSR*, 1956, vol. 110, no. 3, pp. 345–347 (in Russ.).
- [9] Chelomey V.N. *Izbrannye trudy [Selected works]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989.
- [10] Sinel'nikov A.V. Pendulum shift on vibrating mounting under effect of elliptic vibration. *Izv. AN SSSR. Mekhanika*, 1956, vol. 110, no. 3, pp. 87–93 (in Russ.).
- [11] Bogolyubov N.N., Sadovnikov B.I. On one version of averaging method. *Vestnik MGU. Ser. 3, fizika, astronomiya*, 1961, no. 3, pp. 24–34 (in Russ.).
- [12] Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic method in nonlinear oscillations theory]*. Moscow, Nauka Publ., 1974.
- [13] Chekurin L., Chekurin S. *Physical fundamentals of oscillations. Frequency analysis of periodic motion stability*. Cham, Springer, 2018.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-75154-2>
- [14] Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa "mayatnik" [Research technique for dynamic systems of pendulum type]*. Alma-Ata, Nauka Publ., 1981.
- [15] Chelomey S.V. On two problems of dynamic stability of oscillating systems, put on by P.L. Kapitsa and V.N. Chelomey academics. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1999, no. 6, pp. 159–166 (in Russ.).
- [16] Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibration. *Dokl. AN SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67 (in Russ.).
- [17] Benaroya H. *Mechanical vibration: analysis, uncertainties, and control*. Prentice Hall, 2017.
- [18] Iorish Yu.I. *Vibrometriya [Vibrometry]*. Moscow, Nauka Publ., 1963.

Tushev O.N. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Chernov D.S. — Student, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Tushev O.N., Chernov D.S. Pendulum quasi-static drift effect at suspension point excitation by high-frequency polyharmonic multiple frequency vibration. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 5 (98), pp. 4–16 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-4-16>