

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ИЗГИБЕ ТРУБОПРОВОДА В СЛОЖНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

А. А. Александров<sup>1</sup>, В. И. Ларионов<sup>2</sup>, А. В. Юзefович<sup>3</sup>, А. К. Гумеров<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва (e-mail: rector@bmstu.ru);

<sup>2</sup>Научно-образовательный центр исследований экстремальных ситуаций МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва (e-mail: lar@esrc.ru);

<sup>3</sup>ОАО “АК “Транснефть”, Москва (e-mail: YuzefovichAV@ak.transneft.ru);

<sup>4</sup>Институт проблем транспорта энергоресурсов ГУП “ИПТЭР”, Уфа (e-mail: k.m.gumerov@mail.ru)

*Представлена математическая модель пространственного изгиба трубопровода под действием совокупности нагрузок при его эксплуатации в сложных инженерно-геологических условиях, позволяющая оценить напряженно-деформированное состояние, надежность и безопасность участков магистральных трубопроводов.*

**Ключевые слова:** магистральный трубопровод, пространственный изгиб, сложные геологические условия, продольная сила, метод итераций.

## MATHEMATICAL STATEMENT AND NUMERICAL SOLVING OF A PROBLEM ON THREE-DIMENSIONAL PIPELINE BEND UNDER COMPLEX GEOLOGICAL CONDITIONS

A. A. Aleksandrov<sup>1</sup>, V. I. Larionov<sup>2</sup>, A. V. Yuzefovich<sup>3</sup>, A. K. Gumerov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, (e-mail: rector@bmstu.ru);

<sup>2</sup>Scientific and Educational Center of Extremal Situation Study of the Bauman Moscow State Technical University, Moscow (e-mail: lar@esrc.ru);

<sup>3</sup>ОАО АК Transneft, Moscow, Russia (e-mail: YuzefovichAV@ak.transneft.ru);

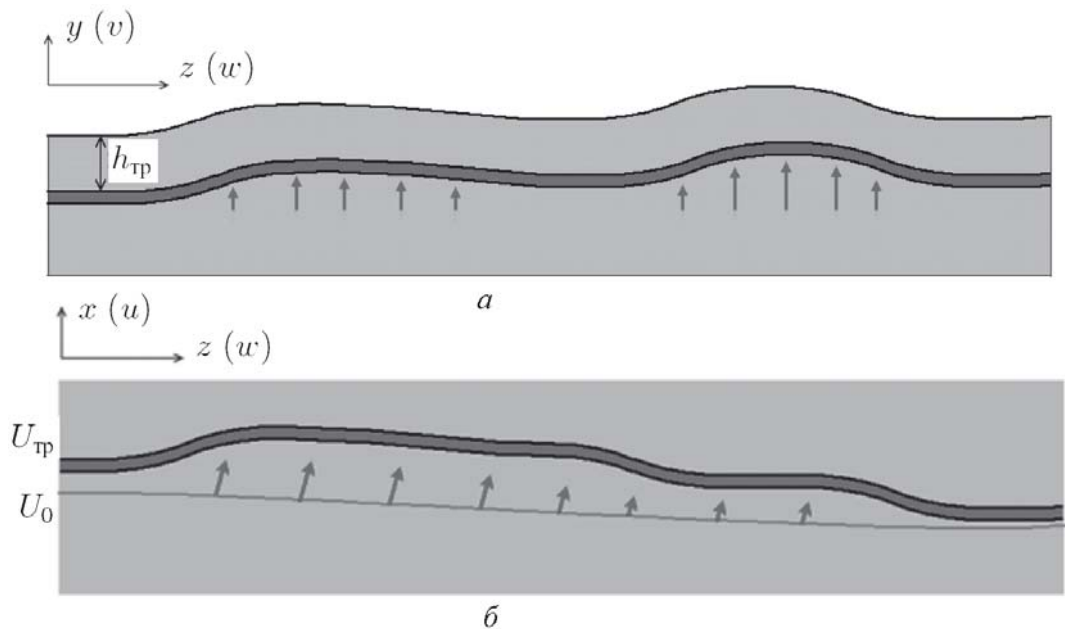
<sup>4</sup>Institute of Problems in Energy Resource Transport of the Republic of Bashkortostan, Ufa, Russia (e-mail: k.m.gumerov@mail.ru)

*A mathematical model of three-dimensional bend of a pipeline under action of a whole set of loads during its operation under complex geological conditions is presented, which makes it possible to estimate the stress and strain state, reliability and safety of main pipeline sections.*

**Keywords:** main pipeline, three-dimensional bend, complex geological conditions, axial force, iteration method.

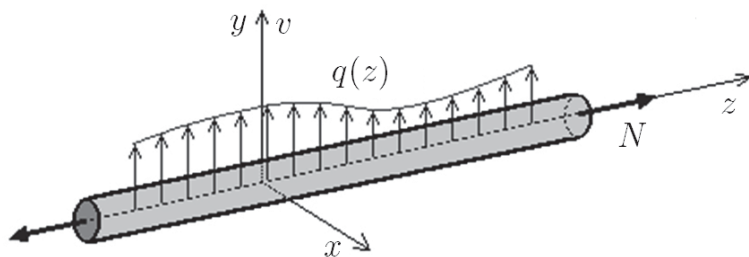
Геодезические методы мониторинга позволяют выявить перемещение участков трубы относительно неподвижных реперных точек. Такие наблюдения проводятся в режиме периодических измерений с интервалом по времени в зависимости от активизации геологических процессов на опасных участках.

Деформация трубы может быть вызвана образованием карстов за счет нарушения гидродинамического равновесия, образованием термокарстов в результате подтаивания грунта, просадками грунта при



**Рис. 1. Положение трубопровода в зоне грунтовых изменений:**

*a* — продольный профиль трубопровода (стрелками показан вертикальный сдвиг трубопровода;  $h_{тр}$  — глубина залегания трубы); *б* — положение трубопровода в плане (стрелками показан сдвиг грунта в плане;  $U_0$  и  $U_{тр}$  — начальное и текущее положения трубопровода)



**Рис. 2. Принятая система координат и силовые нагрузки на трубу его оттаивании, вспучиванием грунта при его намерзании, а также оползнями (рис. 1).**

**Математическая постановка задачи о пространственном изгибе трубопровода в сложных геологических условиях.** Положение отдельных точек трубопровода задается геодезическими измерениями, плано-высотное положение (ПВП) трубы по данным геодезических измерений определяется при решении системы дифференциальных уравнений, описывающих продольно-поперечный изгиб упругой балки в плоскостях  $xz$ ,  $yz$  и продольный сдвиг вдоль оси  $z$  (рис. 2):

$$\begin{aligned}
 EJ_y \frac{d^4 u}{dz^4} - N(z) \frac{d^2 u}{dz^2} &= q_x(z); \\
 EJ_x \frac{d^4 v}{dz^4} - N(z) \frac{d^2 v}{dz^2} &= q_y(z); \\
 \frac{d^2 w}{dz^2} &= -\frac{q_z(z)}{\pi DE \delta_r},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $u, v$  — поперечные смещения оси трубы по горизонтали и вер-

тикали;  $w$  — продольное смещение трубы;  $q_x(z), q_y(z)$  — поперечные горизонтальная и вертикальная нагрузки на трубу;  $q_z$  — продольная нагрузка на трубу;  $E$  — модуль упругости металла трубы;  $N(z)$  — продольная (осевая) сила;  $J_y(z)$  — момент инерции поперечного сечения трубы относительно вертикальной оси  $y$  ( $J_x(z) = J_y(z)$ ).

Собственный вес заполненного продуктом трубопровода (трубы, изоляции, нефтепродукт), соответствующий единице длины, в проекции на ось  $y$  определяется по формуле

$$q_{св(y)} = -\frac{\pi\gamma_n}{4} [D^2 - (D - 2\delta_t)^2] - \frac{\pi\gamma_n}{4} (D - 2\delta_t)^2 - \pi\gamma_i\delta_i (D + \delta_i), \quad (2)$$

где  $\gamma_t, \gamma_n, \gamma_i$  — удельный вес металла трубы, нефтепродукта и изоляции;  $\delta_t, \delta_i$  — толщина стенки трубы и слоя изоляции;  $D$  — наружный диаметр трубы (ось  $y$  направлена вертикально вверх,  $q_{св}$  — вертикально вниз, поэтому в формуле (2) знаки всех слагаемых отрицательны).

Вес трубопровода участвует в формировании изгибающих напряжений наряду с другими силами (реакция грунта, воды, анкеров) и используется в расчетах в качестве исходной информации.

Реакция грунта  $q_{гр}$  — сила, действующая со стороны грунта на трубу единичной длины, является искомой величиной наряду с напряжениями в трубопроводе.

Рассмотрим составляющие реакции грунта в проекциях на оси системы координат —  $q_{гр(x)}, q_{гр(y)}, q_{гр(z)}$ .

*Вертикальная составляющая реакции грунта  $q_{гр(y)}$*  определяется двумя компонентами, характеризующими действие грунта снизу и сверху. Действие грунта снизу определяется вертикальным смещением трубы, действие сверху — весом грунта засыпки над трубой. Для трубы с наружным диаметром  $D$ , находящейся в грунте на глубине  $h_{тр}$ , отсчитываемой от поверхности до верхней образующей трубы, величина  $q_{гр(y)}$  вычисляется по формуле [1]

$$q_{гр(y)} = -C_y v_y D - \gamma_{гр} D (h_{тр} + 0,1073D), \quad (3)$$

где  $v_y$  — смещение трубы по вертикали от исходного состояния (смещение вверх считается положительным, вниз — отрицательным). Значения  $v_y$  заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи о напряжениях;  $C_y$  — коэффициент постели грунта при вертикальном воздействии, значение которого определяется в зависимости от направления смещения грунта (для плотного глинистого грунта  $C_y \approx 10^7$  Па/м [2]);  $\gamma_{гр}$  — удельный вес грунта.

Опорная реакция грунта может быть направлена вертикально вверх или вниз, что учитывается и уточняется в процессе решения задачи о напряженно-деформированном состоянии трубопровода.

Горизонтальная составляющая реакции грунта  $q_{гр(x)}$  определяется по формуле

$$q_{гр(x)} = -C_x u_x D, \quad (4)$$

где  $C_x$  — коэффициент постели грунта;  $u_x$  — поперечное смещение трубы от исходного состояния в горизонтальной плоскости.

Продольная составляющая реакции грунта  $q_{гр(z)}$  определяется силами сцепления между трубопроводом и грунтом:

$$q_{гр(z)} = -\pi C_w w_z D, \quad (5)$$

где  $C_w$  — коэффициент сцепления соответствует коэффициенту трения между поверхностью трубы и грунтом;  $w_z$  — продольное смещение трубы от исходного состояния.

Отметим, что все компоненты реакции грунта не могут беспрестанно увеличиваться по мере увеличения смещения трубопровода или грунта, т.е. имеют предел. При некотором смещении трубы относительно грунта силы перестают расти аналогично пределу текучести материалов. Предельное значение смещения будем называть *пределом текучести грунта* соответственно в горизонтальном, вертикальном и осевом направлениях.

Внутреннее давление в трубе  $P$  вызывает в стенке трубы кольцевые и продольные напряжения, определяемые формулами:

$$\sigma_{кц(p)} = \frac{P(D - 2\delta_T)}{2\delta_T} \quad (6)$$

— для кольцевого напряжения;

$$\sigma_{пр(p)} = \mu \sigma_{кц(p)} = \mu \frac{P(D - 2\delta_T)}{2\delta_T} \quad (7)$$

— для продольного напряжения, где  $\mu$  — коэффициент поперечной деформации материала трубы (коэффициент Пуассона).

Температурное воздействие выражается в том, что при эксплуатации могут появиться термонапряжения в стенке трубы, которые направлены по оси трубопровода и описываются формулой

$$\sigma_t = -E\alpha\Delta t, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения металла;  $\Delta t$  — расчетный температурный перепад.

При определении термонапряжений положительное значение  $\sigma_t$  соответствует напряжениям растяжения, отрицательное — сжатия.

*Упругий изгиб* (искривление трубопровода) в вертикальном и горизонтальном направлениях вызывает изгибные напряжения, которые зависят от воздействия внешних сил, включая реакцию грунта. Изгибные напряжения направлены по оси трубопровода и имеют различные значения на разных образующих трубопровода. Максимальное значение изгибного напряжения определяется формулой [2, 3]

$$\sigma_{\text{изг}} = \pm \frac{ED}{2\rho}, \quad (9)$$

где  $\rho$  — радиус упругого изгиба рассматриваемого участка трубопровода.

Фактический радиус изгиба определяется по формуле  $\rho \approx \frac{1}{y''}$ , где  $y''$  — вторая производная функции прогиба. В связи с этим напряжения изгиба следует определять по формуле

$$\sigma_{\text{изг}} = \pm \frac{ED}{2} y''. \quad (10)$$

Если участок трубопровода имеет изгиб одновременно в горизонтальном и вертикальном направлениях, то радиусы и напряжения вычисляются по формулам

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_y}\right)^2}; \quad (11)$$

$$\sigma_{\text{изг}} = \pm \frac{ED}{2\rho} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}(x)}^2 + \sigma_{\text{изг}(y)}^2}. \quad (12)$$

**Продольные силы и их роль в формировании напряженного состояния.** Продольная (осевая) сила  $N(z)$  оказывает влияние не только на продольные смещения и деформации, но и на поперечные смещения. Перед началом решения задачи необходимо правильно задавать начальное значение продольной силы  $N(z)$  и уточнять его в процессе выполнения расчетов.

Продольные силы  $N(z)$  включают начальное значение и приращение силы за счет деформации трубопровода:

$$N(z) = N_0(z) + \Delta N(z), \quad (13)$$

где под начальным значением  $N_0(z)$  понимается продольная сила, связанная с внутренним давлением и температурой и определяемая по формуле

$$N_0(z) = (\mu\sigma_{\text{кц}} - \alpha\Delta t E)F(z), \quad (14)$$

а  $\Delta N(z)$  — изменение осевой силы, связанное с изменением осевой деформации:

$$\Delta N = E\Delta\varepsilon_z F(z); \quad (15)$$

$F(z) = \pi\delta_T(D - \delta_T)$  — площадь поперечного сечения металла трубы; осевая деформация  $\Delta\varepsilon_z$  связана с поперечными и продольными перемещениями участка трубопровода в каждом сечении  $z$ .

Окончательно формулу (13) запишем в виде

$$N(z) = (\mu\sigma_{кц} - \alpha\Delta tE + E\Delta\varepsilon_z)F(z). \quad (16)$$

Продольная сила может изменяться под действием процессов в грунте вокруг трубопровода и при поперечном изгибе трубопровода как следствие некоторого удлинения.

**Численное решение задачи** получено с использованием следующего алгоритма.

1. В качестве исходных данных принимается прямолинейный участок трубопровода (–1-я итерация метода прогонки). Фактическое ПВП в расчетной схеме задается начальными смещениями узлов (нулевая итерация метода прогонки). Внутри участка строится конечно-элементная сетка с размером элементов  $h$  (рис. 3).

2. Реализуется итерационный процесс (прогонка) ( $j = -1, 0, 2, 3, \dots, p$ ) в пределах всех узлов конечно-элементной модели ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) и определяется результирующее смещение каждого узла ( $i$ ) посредством формул, полученных при решении системы уравнений (1),

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= A_{ui}^j (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + B_{ui}^j (u_{i-2}^j + u_{i+2}^j) + C_{ui}^j; \\ v_i^{j+1} &= A_{vi}^j (v_{i-1}^j + v_{i+1}^j) + B_{vi}^j (v_{i-2}^j + v_{i+2}^j) + C_{vi}^j; \\ w_i^{j+1} &= 0,5 (w_{i-1}^j + w_{i+1}^j + C_{wi}^j), \end{aligned} \quad (17)$$

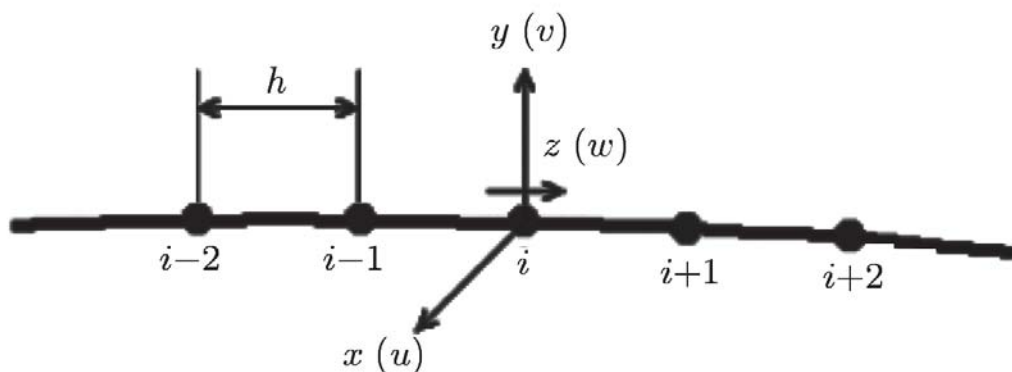


Рис. 3. Расчетная схема участка трубопровода

где коэффициенты определяются соотношениями

$$A_{ui}^j = \frac{4EJ_y + N_i^j h^2}{6EJ_y + 2N_i^j h^2}; \quad B_{ui}^j = \frac{-EJ_y}{6EJ_y + 2N_i^j h^2}; \quad C_{ui}^j = \frac{q_{xi}^j h^4}{6EJ_y + 2N_i^j h^2};$$

$$A_{vi}^j = \frac{4EJ_x + N_i^j h^2}{6EJ_x + 2N_i^j h^2}; \quad B_{vi}^j = \frac{-EJ_x}{6EJ_x + 2N_i^j h^2}; \quad C_{vi}^j = \frac{q_{yi}^j h^4}{6EJ_x + 2N_i^j h^2};$$

$$C_{wi}^j = \frac{q_{wi}^j h^2}{\pi DE \delta_T}.$$

Здесь  $i$  — номер узла конечно-разностной сетки;  $j$  — номер шага итерации по методу прогонки;  $N_i^j$  — суммарная продольная сила, действующая в  $i$ -м узле на  $j$ -й итерации, вычисляемая по формуле

$$N_i^j = (\mu\sigma_{кц} - \alpha\Delta t E + \Delta\varepsilon_{zi}^j E)F, \quad (18)$$

где

$$\Delta\varepsilon_{zi}^j = \frac{\sqrt{(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)^2 + (v_{i+1}^j - v_{i-1}^j)^2 + (2h + w_{i+1}^j - w_{i-1}^j)^2}}{2h} - 1 \quad (19)$$

— относительное удлинение оси трубопровода на конечном элементе в  $i$ -м узле на  $j$ -й итерации;  $q_{xi}^j$ ,  $q_{yi}^j$ ,  $q_{wi}^j$  — соответственно суммарные горизонтальная, вертикальная и продольная нагрузки, прикладываемые в  $i$ -м узле на  $j$ -й итерации

$$q_{xi}^j = -c_x \Delta U_i^j D; \quad q_{yi}^j = -c_y \Delta V_i^j D; \quad (20)$$

$$q_{wi}^j = (\mu\sigma_{кц} - \alpha\Delta t E)F + c_w \Delta W_i^j D.$$

Рассмотрим в качестве примера первую и вторую итерации в используемом методе прогонки.

Первая итерация:

$$u_i^1 = A_{ui}^1 (u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0) + B_{ui}^1 (u_{i-2}^0 + u_{i+2}^0) + C_{ui}^1;$$

$$v_i^1 = A_{vi}^1 (v_{i-1}^0 + v_{i+1}^0) + B_{vi}^1 (v_{i-2}^0 + v_{i+2}^0) + C_{vi}^1;$$

$$w_i^1 = 0,5 (w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0 + C_{wi}^1);$$

$$N_i^1 = (\mu\sigma_{кц} - \alpha\Delta t E + \Delta\varepsilon_{zi}^1)F;$$

$$\Delta\varepsilon_{zi}^1 = \frac{\sqrt{(u_{i+1}^1 - u_{i-1}^1)^2 + (v_{i+1}^1 - v_{i-1}^1)^2 + (2h + w_{i+1}^1 - w_{i-1}^1)^2}}{2h} - 1.$$

Вторая итерация:

$$u_i^2 = A_{ui}^2 (u_{i-1}^1 + u_{i+1}^1) + B_{ui}^2 (u_{i-2}^1 + u_{i+2}^1) + C_{ui}^2;$$

$$v_i^2 = A_{vi}^2 (v_{i-1}^1 + v_{i+1}^1) + B_{vi}^2 (v_{i-2}^1 + v_{i+2}^1) + C_{vi}^2;$$

$$w_i^2 = 0,5 (w_{i-1}^1 + w_{i+1}^1 + C_{wi}^2).$$

3. На каждой последующей итерации смещение  $\Delta U_i^{j+1}$ ,  $\Delta V_i^{j+1}$ ,  $\Delta W_i^{j+1}$ , входящие в (20), вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta U_i^{j+1} &= \Delta U_i^j - u_i^j; & \Delta V_i^{j+1} &= \Delta V_i^j - v_i^j; \\ \Delta W_i^{j+1} &= \Delta W_i^j - w_i^j, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\Delta U_i^j$ ,  $\Delta V_i^j$ ,  $\Delta W_i^j$  – смещения, полученные на  $j$ -й итерации в  $i$ -м узле;  $u_i^j$ ,  $v_i^j$ ,  $w_i^j$  – перемещения, вычисленные на  $j$ -й итерации в  $i$ -м узле.

4. После определения смещений по всем узлам вычисляется величина

$$SS^j = \sum_{i=1}^n (|u_i^j| + |v_i^j| + |w_i^j|). \quad (22)$$

5. Полученное значение  $SS^j$  сравнивается со значением  $SS^{j-1}$  на предыдущем шаге. В случае если они различаются на величину  $\Delta$ , меньшую заданной точности  $\varepsilon$ , расчет заканчивается. В противном случае происходит переход на следующую итерацию.

6. Повторяя последовательные приближения в зависимости от требуемой точности решения от 100 и более раз, получаем такое состояние конечно-элементной модели, когда смещения всех узлов перестают изменяться, что соответствует искомому решению системы (1).

В упругом состоянии напряженное состояние трубопровода может быть разложено на отдельные слагаемые, которые могут рассматриваться независимо друг от друга. Например, внутреннее давление не влияет на напряжения, создаваемые действием внешних сил и окружающего грунта; температурное напряжение также не зависит от внутреннего давления и реакции грунта. Это позволяет задачу о напряженном состоянии трубопровода решать по частям, рассматривая воздействия и напряжения по группам.

Общее напряженное состояние трубопровода можно разложить на составляющие кольцевые (окружные) ( $\sigma_{кц}$ ) и продольные ( $\sigma_{пр}$ ) напряжения, которые принимаются равными

$$\begin{aligned} \sigma_{кц} &= \sigma_{кц(р)}; \\ \sigma_{пр} &= \sigma_{пр(р)} + \sigma_t + \sigma_\varepsilon + \sigma_{изг}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\sigma_{кц(р)}$  – кольцевые напряжения от действия внутреннего давления (6);  $\sigma_{пр(р)}$  – продольные напряжения от действия внутреннего давления (7);  $\sigma_t$  – температурные напряжения (11);  $\sigma_{изг}$  – напряжения изгиба (12) и (13);  $\sigma_\varepsilon = E\Delta\varepsilon_z$  – напряжения от продольного перемещения участка трубопровода.

Для трубопровода представляют опасность механические напряжения как сжатия (может произойти потеря устойчивости), так и растяжения (может произойти разрыв) [4]. Причем в одном и том же



сечении трубопровода могут быть напряжения, как растяжения, так и сжатия (например, в случае изгиба). Поэтому при суммировании напряжений необходимо рассматривать различные сочетания слагаемых напряжений. Введем расчетные напряжения:

$S_1 = \max \sigma_{\text{кц}}$  — наибольшее кольцевое напряжение;

$S_2 = \min \sigma_{\text{пр}}$  — наименьшее продольное напряжение с учетом знака (наибольшее сжимающее продольное напряжение);

$S_3 = \max \sigma_{\text{пр}}$  — наибольшее продольное напряжение с учетом знака;

$S_4 = \max \sigma_{\text{экв}}$  — наибольшее эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_{\text{пр}})^2 + (\sigma_{\text{кц}})^2} - \sigma_{\text{пр}}\sigma_{\text{кц}}. \quad (24)$$

Далее можно оценить техническое состояние участка трубопровода по найденным значениям расчетных напряжений  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . При этом необходимо учитывать, что в процессе нормальной эксплуатации нефтепровода все четыре расчетных напряжения по абсолютной величине должны быть не более допустимых напряжений, определенных с учетом характеристики трубопровода, включая механические свойства стали, срок эксплуатации, уровень дефектности, категорию безопасности и др.

**Выводы.** Сформулирована математическая модель и рассмотрена численная реализация системы уравнений, описывающих взаимодействие трубопровода с грунтом на сложных геологических участках, позволяющая исследовать и оценивать влияние опасных геологических процессов на напряженно-деформированное состояние участков трубопровода.

*Работа, результаты которой использованы в данной научной публикации, выполнена по заказу ОАО «АК «Транснефть» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г у м е р о в А. Г., Г у м е р о в Р. С., Г у м е р о в К. М. Безопасность длительно эксплуатируемых магистральных нефтепроводов. – М.: Недра, 2001. – 305 с.
2. Б е з у х о в Н. И. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. – М.: Высш. шк., 1968.
3. Б о р о д а в к и н П. П., С и н ю к о в А. М. Прочность магистральных нефтепроводов. – М.: Недра, 1984. – 245 с.
4. А й н б и н д е р А. Б., К а м е р ш т е й н А. Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. – М.: Недра, 1982. – 340 с.

Статья поступила в редакцию 25.06.2012