

РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛАСТОСТАТИКИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Д.А. Иванычев

lsivdmal@mail.ru

ЛГТУ, Липецк, Российская Федерация

Аннотация

Исследовано упругое равновесие трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием стационарных поверхностных сил, распределенных по циклическому закону. Предложенная методика построения напряженно-деформированного состояния представляет собой развитие метода граничных состояний. Основа метода — понятия пространств внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом. Формируются базисы пространств состояний и осуществляется их ортонормирование. Искомое состояние раскладывается в ряд по элементам ортонормированного базиса, вычисляются коэффициенты Фурье этой линейной комбинации. Коэффициенты Фурье представляют собой квадратуры. Базис пространства внутренних состояний формируется на основе общего решения задачи о плоской деформации трансверсально-изотропного тела и формул перехода к пространственному состоянию, компоненты которого зависят от трех координат. Скалярные произведения в пространствах состояний представляют собой внутреннюю энергию упругого деформирования и работу поверхностных сил на перемещениях точек границы. Приведено решение основной смешанной задачи для кругового цилиндра из трансверсально-изотропного алевролита с осью анизотропии, совпадающей с геометрической осью симметрии. Решение является аналитическим, и характеристики напряженно-деформированного состояния имеют полиномиальный вид. Представлены явные и косвенные признаки сходимости решения задач и графическая визуализация результатов

Ключевые слова

Метод граничных состояний, трансверсально-изотропные тела, первая основная задача, неосесимметричные задачи, пространство состояний

Поступила 10.06.2021

Принята 07.02.2022

© Автор(ы), 2022

Введение. Детали машин и механизмов, изготовленные из современных материалов, таких как эластомеры, поликристаллические металлы, керамика, а также горные породы и материалы, обладающие значительной анизотропией свойств, пребывают в условиях сложного кинематического взаимодействия с другими телами. Силы взаимодействия этих тел не распределяются симметрично относительно, например, оси вращения цилиндрического тела или какой-либо плоскости. Исследование возникающего в теле напряженно-деформированного состояния (НДС), которое носит несимметричный характер, является актуальной научной задачей для анизотропных тел.

Решению краевых задач для трансверсально-изотропных тел посвящено множество работ. В настоящее время исследуют частные аспекты данных задач для усложненных по геометрии и структуре материалов, например многосвязные, слоистые и др. Так, в [1] получены точные аналитические решения задач о равновесии полых и составных трансверсальных сфер, находящихся под действием внешнего или внутреннего давления. Задача о деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления рассмотрена в [2]. Полученные асимптотические формулы позволяют описать поведение слоя с разными жесткостями в трансверсальном и тангенциальном направлениях. С использованием преобразования Фурье в [3] решена смешанная краевая задача Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями. Решение записано через построенную функцию Грина оператора Лапласа. Подход к определению трехмерного НДС многослойного трансверсального полупространства в случае воздействия на него нормальной нагрузки предложен в [4]. Решению контактной задачи для трансверсального полупространства с неизвестной областью контакта посвящена [5]. Задача сведена к интегральному уравнению относительно давления в зоне контакта, для решения которого применяется численный метод Галанова.

Несколько работ посвящено расчету оболочек. Так, в [6] рассмотрены осесимметричные краевые задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки. Решение построено методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. Применением прямой формулировки метода граничных состояний (МГС) в [7] решены краевые задачи трехмерной анизотропной теории упругости, приведены численные примеры для нескольких видов анизотропии. Предельное нагружение конструкций из трансверсально-изотропных материалов в условиях кусочно-линейной текучести исследовано в [8]. Доказатель-

ства теорем существования и единственности решения упругопластической краевой задачи, основанной на теории пластического течения трансверсально-изотропных тел, приведены в [9].

В настоящее время для трансверсально-изотропных тел вращения средствами МГС решена первая основная задача теории упругости при участии массовых сил [10]. Решению второй основной задачи теории упругости при одновременном действии на тело массовых сил посвящена [11]. По идентичной методике, что и во второй основной задаче, решены основная смешанная [12] и контактная [13] задачи. Особенность решения указанных задач заключается в том, что полученное упругое поле удовлетворяет одновременно заданным условиям как на поверхности тела, так и внутри области (массовым силам).

Цель работы — решение трехмерных задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения.

Постановка задачи. Для трансверсально-изотропных тел вращения в [14] приведено краткое описание решения краевых задач теории упругости в различной постановке граничных условий с участием объемных сил. Однако функции, описывающие граничные условия, имели осесимметричный характер, т. е. зависели от двух цилиндрических координат r , z и не зависели от угловой координаты θ . В реальных условиях такое нагружение тела носит частный характер, например, силы инерции, равномерного давления. Рассмотрение неосесимметричного случая приложения нагрузки, когда заданные поверхностные силы зависят и от координаты θ , расширит класс решаемых задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела.

Рассмотрено равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения и находящегося под действием поверхностных усилий $\mathbf{p}_v = \{p_r, p_\theta, p_z\}$, изменяющихся по циклическому закону (рис. 1). Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения z . Использована цилиндрическая система координат r, θ, z . Массовые силы отсутствуют. Область тела односвязная. Материал однороден.

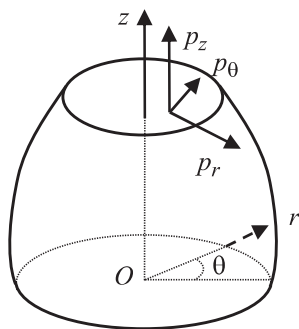


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Задача состоит в определении НДС, возникающего в теле под действием поверхностных сил.

Материалы и метод решения. Для решения задачи использован МГС [15]. Фундамент метода составляют понятия пространств внутренних Ξ и граничных Ω состояний:

$$\Xi = \{\xi_k\}_N; \quad \Omega = \{\gamma_k\}_N.$$

Здесь ξ_k , γ_k — базисные элементы этих пространств, $k = 1, 2, \dots, N$; N — число базисных элементов.

Базисный элемент ξ_k в пространстве Ξ представляет собой некоторое внутреннее состояние, в которое входят вектор перемещения $\mathbf{u}^k = \{u^k, v^k, w^k\}$, тензор деформаций $\hat{\varepsilon}^k = \varepsilon_{ij}^k$ и тензор напряжений $\hat{\sigma}^k = \sigma_{ij}^k$:

$$\xi_k = \{\mathbf{u}^k, \hat{\varepsilon}^k, \hat{\sigma}^k\} \quad (1)$$

(в правой части выражения индекс k верхний).

В МГС базисный элемент γ_k в пространстве Ω представляет собой некоторое граничное состояние, соответствующее ξ_k :

$$\gamma_k = \{\mathbf{u}_s^k, \mathbf{p}^k\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}_s^k = \{u_s^k, v_s^k, w_s^k\}$ — вектор перемещения точек границы; $\mathbf{p}^k = \{p_r^k, p_\theta^k, p_z^k\}$ — вектор усилия на границе.

После назначения базисов пространств состояний необходимо обеспечить их изоморфизм, для чего используем уравнение Клапейрона при отсутствии объемных сил [16, 17]:

$$\int_S \mathbf{p} \mathbf{u}_s dS - \int_V \hat{\sigma} \hat{\varepsilon} dV = 0. \quad (3)$$

Согласно (3), скалярное произведение в пространстве Ξ можно определить через внутреннюю энергию упругого деформирования (например, для первого и второго состояний):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \hat{\varepsilon}^1 \hat{\sigma}^2 dV, \quad (4)$$

где V — область тела.

Скалярное произведение в пространстве Ω можно определить через работу поверхностных сил на перемещениях точек границы:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S \mathbf{p}^1 \mathbf{u}_s^2 dS, \quad (5)$$

где S — поверхность тела. Причем в силу тождества Бетти и соотношения Клапейрона (3):

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1); (\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1).$$

Каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ взаимнооднозначно соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Omega$. Это позволяет поиск внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

После построения базиса внутренних состояний (методика построения описана ниже) необходимо провести его ортонормирование. Оно осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму Грама — Шмидта [18], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается соотношение (4).

Ортонормированный базис Γ редуцируется из ортонормированного Ξ путем предельного перехода к границе тела для вектора перемещения $\mathbf{u}_s^k = \mathbf{u}^k|_S$, вычисления усилий на границе с использованием соотношения $p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j$ (n_j — компонента нормали к границе). Однако можно проводить ортонормирование базиса пространства Ω отдельно, оперируя базисными элементами этого пространства и скалярным произведением (5).

Окончательно проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего $\xi = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$ и граничного $\gamma = \{\mathbf{u}_s, \mathbf{p}\}$ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{u}^k; \quad \hat{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{\varepsilon}^k; \quad \hat{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{\sigma}^k; \\ \mathbf{u}_s &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{u}_s^k; \quad \mathbf{p} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{p}^k. \end{aligned} \tag{6}$$

В случае первой основной задачи, в которой заданы усилия на границе тела, коэффициенты Фурье определяются из выражения

$$c_k = \int_S \mathbf{p}_v \mathbf{u}_s^k dS. \tag{7}$$

Здесь \mathbf{u}_s^k — вектор перемещения в k -м базисном элементе базиса граничных состояний (2).

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими граничными условиями (ГУ) в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$ (n — номер тестируемого элемента), остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

Формирование базиса внутренних состояний. Главная задача МГС — формирование базиса внутренних состояний, который основан на общем или фундаментальном решении для среды, также не исключено использование каких-либо частных решений.

С использованием метода интегральных наложений в [19] установлена зависимость пространственного НДС упругого трансверсально-изотропного конечного тела без полостей от определенных вспомогательных двумерных состояний (плоская деформация и депланация), компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

Переход к пространственному состоянию осуществляется по формулам (в [19] показаны только выражения для перемещений, здесь приведем выражения и для напряжений):

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=a}^b (u_n \cos n \theta + u_n \sin n \theta); \\ v &= \sum_{n=a}^b (-v_n \sin n \theta + v_n \cos n \theta); \\ w &= \sum_{n=a}^b (w_n \cos n \theta + w_n \sin n \theta); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sum_{n=a}^b (\sigma_z^n \cos n \theta + \sigma_z^n \sin n \theta); \quad \sigma_r = \sum_{n=a}^b (\sigma_y^n \cos n \theta + \sigma_y^n \sin n \theta); \\ \sigma_\theta &= \sum_{n=a}^b (\sigma_\eta^n \cos n \theta + \sigma_\eta^n \sin n \theta); \quad \sigma_{zr} = \sum_{n=a}^b (\sigma_{zy}^n \cos n \theta + \sigma_{zy}^n \sin n \theta); \\ \sigma_{r\theta} &= \sum_{n=a}^b (-\sigma_{y\eta}^n \sin n \theta + \sigma_{y\eta}^n \cos n \theta); \quad \sigma_{z\theta} = \sum_{n=a}^b (-\sigma_{z\eta}^n \sin n \theta + \sigma_{z\eta}^n \cos n \theta). \end{aligned}$$

Здесь a, b — пределы суммирования;

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta;$$

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta;$$

$$w_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta;$$

$$S_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad S_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl}) \cos(n\beta) d\beta;$$

$$S_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl} + 2\sigma_{y\eta}^{pl}) \cos[(n-2)\beta] d\beta;$$

$$S_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl} - 2\sigma_{y\eta}^{pl}) \cos[(n+2)\beta] d\beta;$$

$$S_5 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_{zy}^{pl} + \sigma_{z\eta}^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta;$$

$$S_6 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sigma_{zy}^{pl} - \sigma_{z\eta}^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta;$$

$$\sigma_z^n = S_1; \quad \sigma_y^n = (2S_2 + S_3 + S_4) / 4; \quad \sigma_{zy}^n = (S_5 + S_6) / 2;$$

$$\sigma_\eta^n = (2S_2 + S_3 + S_4) / 4; \quad \sigma_{z\eta}^n = (S_5 - S_6) / 2; \quad \sigma_{y\eta}^n = (S_3 - S_4) / 4,$$

где компоненты с верхним индексом pl соответствуют компонентам плоского вспомогательного состояния [19]:

$$u_z^{pl} = \operatorname{Re} [p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)];$$

$$u_y^{pl} = \operatorname{Re} [iq_1 \phi_1(\zeta_1) + iq_2 \phi_2(\zeta_2)];$$

$$u_\eta^{pl} = -\operatorname{Re} [iq_3 \phi_3(\zeta_3)];$$

$$\sigma_z^{pl} = -\operatorname{Re} [\gamma_1^2 \phi_2'(\zeta_1) + \gamma_2^2 \phi_2'(\zeta_2)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re} [\phi_1'(\zeta_1) + \phi_2'(\zeta_2)]; \quad (9)$$

$$\sigma_{zy}^{pl} = -\operatorname{Re} [\gamma_1 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2 \phi_2'(\zeta_2)]; \quad \sigma_\eta^{pl} = v_r \sigma_y^{pl} + v_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl};$$

$$\sigma_{z\eta}^{pl} = \operatorname{Re} [i\gamma_3 \phi_3(\zeta_3)]; \quad \sigma_{y\eta}^{pl} = -\operatorname{Re} [\phi_3(\zeta_3)],$$

где q_i , p_i , γ_3 — константы, определяемые упругими параметрами материала; $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j — комплексные корни характеристического уравнения

$$\left(1 - \nu_z^2 \frac{E_r}{E_z}\right) \gamma_j^4 - \left[\frac{E_z}{G_z} - 2\nu_z(1 + \nu_r)\right] \gamma_j^2 + (1 - \nu_r^2) \frac{E_z}{G_r} = 0,$$

$\phi_j(\zeta_j)$ — аналитические по переменным функции.

Придавая функциям $\phi_j(\zeta_j)$ поочередно значения

$$\begin{pmatrix} \phi_1(\zeta_1) \\ \phi_2(\zeta_2) \\ \phi_3(\zeta_3) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_3^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\zeta_3^k \end{pmatrix}, \dots \right\}, \quad k \in N, \quad (10)$$

можно сгенерировать набор плоских вспомогательных состояний (9) и по зависимостям (8) построить совокупность пространственных состояний, образуя базис пространства внутренних состояний.

Решение задач. Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового цилиндра из алевролита крупного темно-серого [16]. После процедуры «обезразмеривания» параметров задачи (с масштабным коэффициентом $\eta^* = 10^5$ кгс · см²), аналогия которой приведена в [20], упругие характеристики материала $E_r = 5,68$; $E_z = 6,21$; $G_r = 2,29$; $G_z = 2,55$; $\nu_r = 0,24$; $\nu_z = 0,22$. Цилиндр занимает область $V = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -1 \leq z \leq 1\}$.

При построении базиса внутренних состояний необходимо стремиться к наибольшей простоте вида функций, описывающих компоненты упругого поля.

Рассмотрим базис, формируемый из левых частей выражений (8) и пределов суммирования $a = 0$ и $b = 1$ (приведены выражения для перемещений):

$$u = \sum_{n=a}^b (u_n \cos n \theta); \quad v = \sum_{n=a}^b (-v_n \sin n \theta); \quad w = \sum_{n=a}^b (w_n \cos n \theta). \quad (11)$$

В таком случае задача будет разрешима, если на поверхностях тела компоненты заданных сил p_r , p_θ , p_z содержат тригонометрические функции $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos \theta$, например:

$$p_z = r^m z^l (1 - p \cos \theta); \quad m, l \in N, \quad p \in Z. \quad (12)$$

В противном случае коэффициенты Фурье (7) будут равны нулю.

Если формировать базис из правых частей выражений (8) (приведены выражения для перемещений):

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin n \theta]; \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos n \theta]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin n \theta], \quad (13)$$

то решение существует, если силы p_r , p_θ , p_z содержат тригонометрические функции $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$ соответственно.

Если в (11) и (13) использовать пределы суммирования $a = 1$ и $b = 1$, то для заданных поверхностных сил вида (12) решения не существует, в этом случае приближенное решение задачи ищется для заданных функций вида $r^m z^l p \cos \theta$ или $r^m z^l p \sin \theta$.

В случае заданных сил вида

$$r^m z^l (\cos \theta + \sin \theta) \quad (14)$$

необходимо использовать выражения (8) в полной мере с пределами суммирования $a = 1$ и $b = 1$. При этом возможно получение не только приближенных, но и строгих решений.

Если при синусах и косинусах в (11) разные коэффициенты, например $r^m z^l (p \sin \theta + h \cos \theta)$, $p \neq h$, то решения не существует. Это связано с одинаковыми коэффициентами (единица) при соответствующих функциях в базисных выражениях (8). В этом случае целесообразно использовать принцип независимости действия сил и решать две отдельные задачи, в каждой из которых заданы $r^m z^l p \sin \theta$ и $r^m z^l h \cos \theta$, а полученные упругие поля суммировать.

В случае заданных сил, зависящих от $\sin n\theta$ или $\cos n\theta$, $n = 2, 3, \dots$, в (8), (11), (13) необходимо использовать пределы суммирования $a = b = n$.

Для последнего случая рассмотрим пример решения задачи для кругового цилиндра, когда на участках границы S_i заданы силы

$$\mathbf{p}_v = \{z^2 \sin 2\theta, 0, 0\}, \quad S_1 \mid r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -1 \leq z \leq 1;$$

$$\mathbf{p}_v = \{0, r \cos 2\theta, r^4 \sin 2\theta\}, \quad S_2 \mid z = 1, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

$$\mathbf{p}_v = \{0, -r^3 \cos 2\theta, -r^2 \sin 2\theta\}, \quad S_3 \mid z = -1, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

После построения базиса по (13) и исключения линейно зависимых элементов в процессе ортонормирования базисные компоненты вектора перемещения имеют вид, приведенный в таблице (шесть элементов).

Ортонормированный базисный набор компонент вектора перемещения

Элемент	u	v	w
ξ_1	$0,1318 r \sin 2\theta$	$0,1318 r \cos 2\theta$	0
ξ_2	$0,143 rz \sin 2\theta$	$0,143 rz \cos 2\theta$	$0,066 r^2 \times$ $\times \sin 2\theta$
ξ_3	$-0,178 rz \sin 2\theta$	$-0,178 rz \cos 2\theta$	$0,2 r^2 \sin 2\theta$
ξ_4	$-(0,008r + 0,047r^3 -$ $-0,132rz^2) \sin 2\theta$	$-(0,008r + 0,023r^3 -$ $-0,132rz^2) \cos 2\theta$	$0,132r^2 z \times$ $\times \sin 2\theta$
ξ_5	$(0,011r + 0,006r^3 -$ $-0,266rz^2) \sin 2\theta$	$(0,011r + 0,147r^3 -$ $-0,266rz^2) \cos 2\theta$	$0,251r^2 z \times$ $\times \sin 2\theta$
ξ_6	$(0,185r - 0,052r^3 -$ $-0,14rz^2) \sin 2\theta$	$(0,185r - 0,225r^3 -$ $-0,14rz^2) \cos 2\theta$	$0,137r^2 z \times$ $\times \sin 2\theta$

Для решения задачи потребовался базис внутренних состояний из 71 элемента. Коэффициенты Фурье (шесть коэффициентов): $c_1 = 0,3105$; $c_2 = -0,1956$; $c_3 = 0,2067$; $c_4 = -0,0426$; $c_5 = -0,5738$; $c_6 = -0,0407$. Решение формируется рядами (6).

Проверка результата и оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных усилий на границе с восстановленными усилиями при решении. Верификация ГУ на участках границы S_i приведена на рис. 2. На рисунках заданные (---) и восстановленные (—) ГУ показаны в масштабе. Например, истинное значение p_r на рис. 2, б равно значению на графике, умноженному на коэффициент k . В целях выявления максимальной погрешности угол θ выбран так, чтобы тригонометрические функции имели максимальные значения. Верификация восстановленных усилий в зависимости от угла θ приведена на рис. 3.

Максимальная погрешность задачи (5,1 %) определена в точке (0,13, 0, 1) (рис. 2, д). Погрешность преодолевается увеличением числа используемых элементов базиса.

Компоненты тензора напряжений, имеющие полиномиальный вид, представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 4. Изолинии напряжений построены в сечении $z = 1$ с масштабным коэффициентом $k = 10^{-2}$.

Компоненты вектора перемещения приведены на рис. 5. В силу осевой симметрии показана область $0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Для всех изолиний $k = 10^{-2}$. В силу малости деформаций контур деформированного тела изображен в масштабе (рис. 5, б).

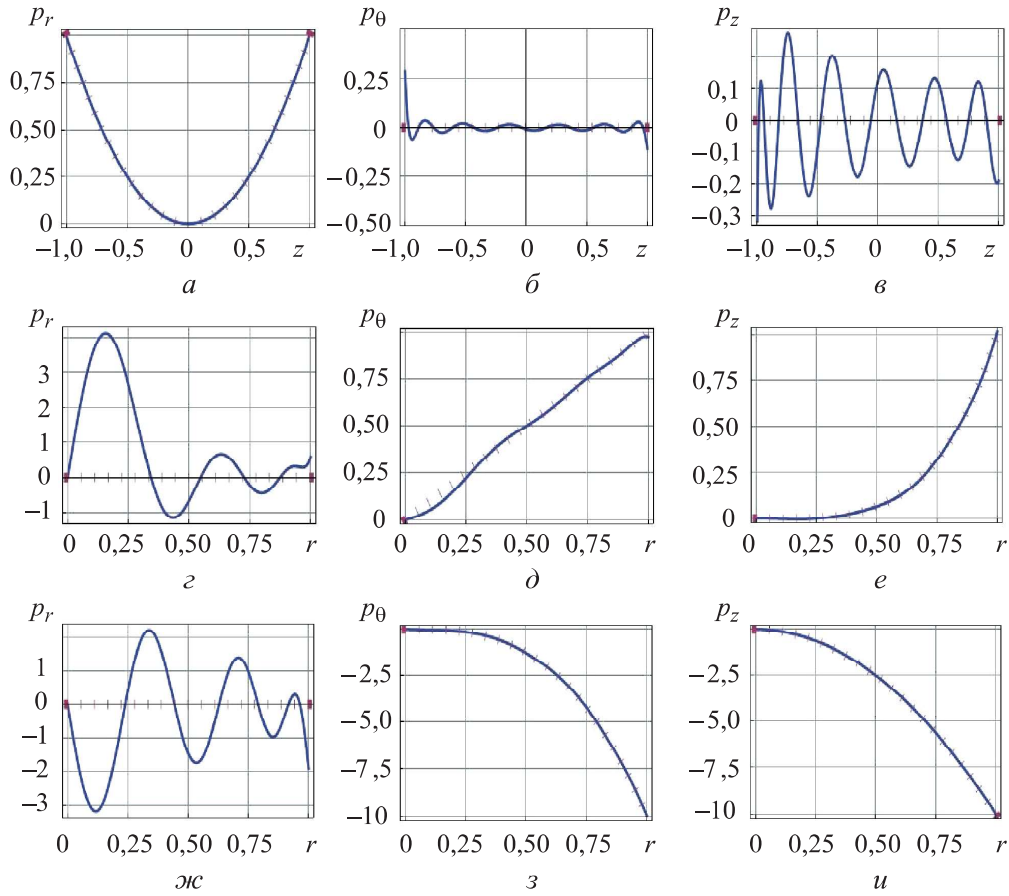


Рис. 2. Верификация ГУ на участке границ S_1 (а-в), S_2 (г-е) и S_3 (ж-и):

a — $p_r, \theta = \pi/4, \kappa = 1$; $б$ — $p_\theta, \theta = 0, \kappa = 10^{-1}$; $в$ — $p_z, \theta = \pi/4, \kappa = 10^{-2}$;
 $г$ — $p_r, \theta = \pi/4, \kappa = 10^{-2}$; $д$ — $p_\theta, \theta = 0, \kappa = 1$; $е$ — $p_z, \theta = \pi/4, \kappa = 1$;
 $ж$ — $p_r, \theta = \pi/4, \kappa = 10^{-3}$; $з$ — $p_\theta, \theta = 0, \kappa = 10^{-1}$; $и$ — $p_z, \theta = \pi/4, \kappa = 10^{-1}$

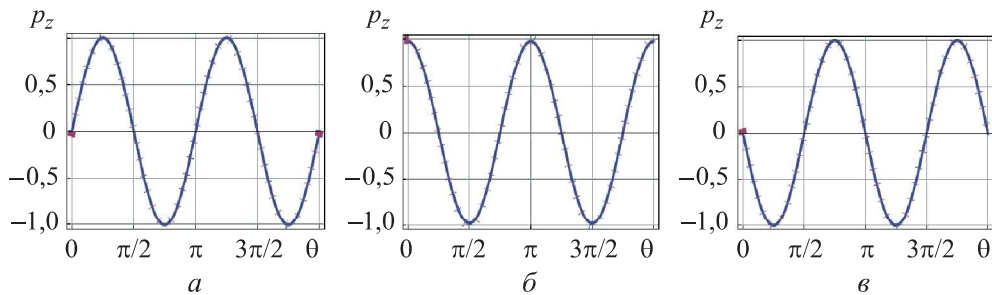


Рис. 3. Верификация ГУ зависимости от угла θ на участке границ S_1 (а),

S_2 (б) и S_3 (в):

a — $p_r, z = 1, \kappa = 1$; $б$ — $p_\theta, r = 1, \kappa = 1$; $в$ — $p_z, r = 1, \kappa = 1$

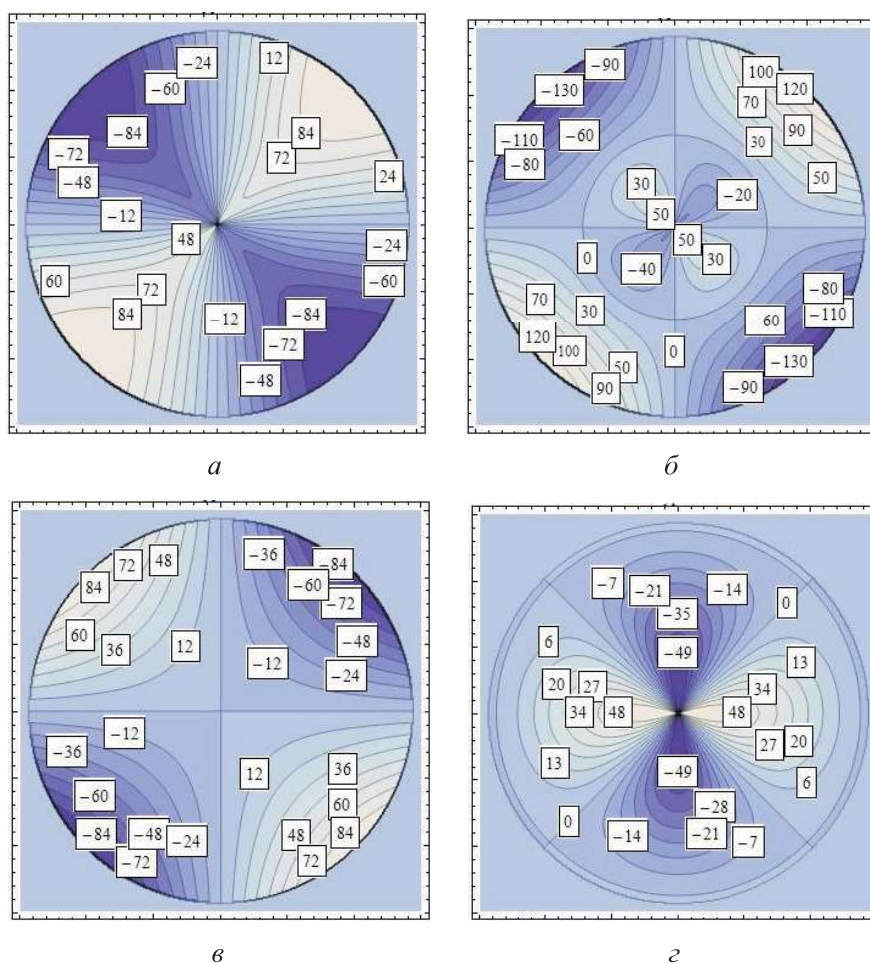


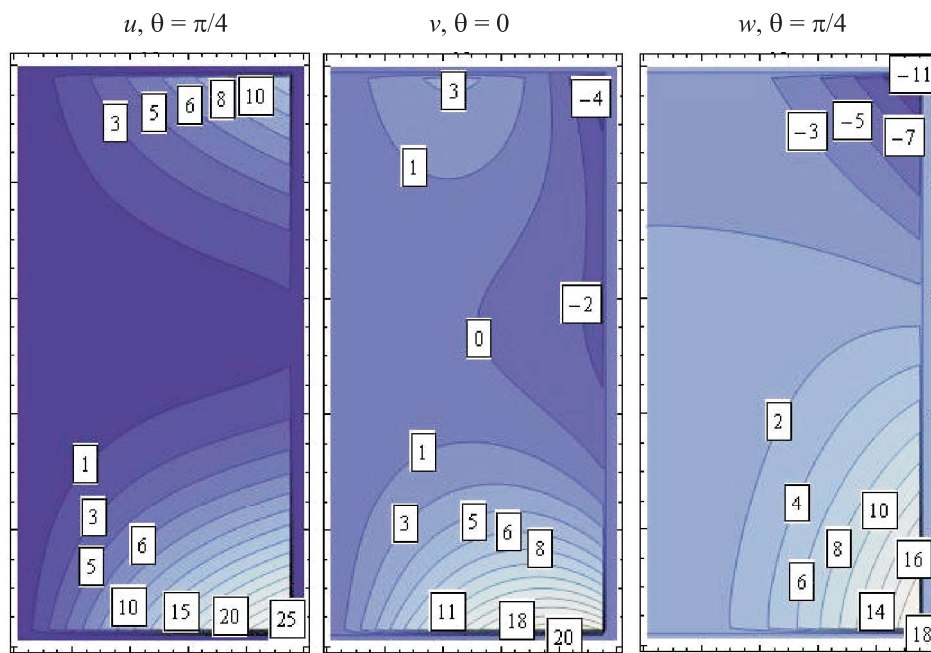
Рис. 4. Изолинии компонент тензора напряжений:

$a - \sigma_{rr}$; $б - \sigma_{\theta\theta}$; $в - \sigma_{zz}$; $г - \sigma_{r\theta}$

Полученные упругие поля удовлетворяют всем уравнениям теории упругости в цилиндрической системе координат для трансверсально-изотропного тела [19].

Следует отметить, что если на одной части поверхности тела заданы усилия с одной частотой, например 2θ , то с такой же частотой они должны быть заданы и на оставшейся части поверхности тела. Если частота изменения усилий на участках границы тела различна, то возникает необходимость в решении ряда последовательных задач с одинаковой частотой и сложении решений согласно принципу независимости действия сил.

Обсуждение полученных результатов. Решение задач линейной теории упругости строится в виде рядов, основываясь на общем решении задачи о плоской деформации трансверсально-изотропного тела вращения



a

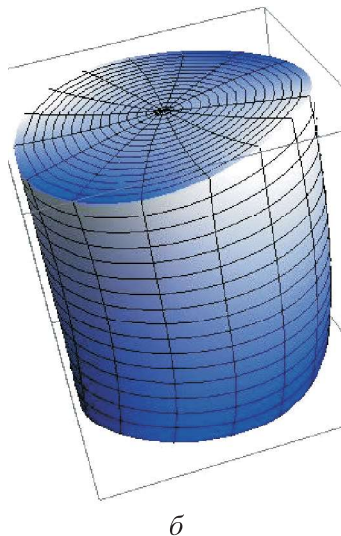


Рис. 5. Изолинии компонент вектора перемещения (*a*) и контур деформированного тела (*б*)

и на соотношениях перехода к пространственному состоянию, компоненты которого изменяются по тригонометрическим законам в зависимости от угловой координаты. Трём аналитическим функциям ϕ_j придаются последовательно значения (10), тем самым формируется набор точных решений задачи о плоской деформации меридионального сечения рассматриваемого тела. Осуществляя переход к трехмерному состоянию по (8), формируются множество точных решений трехмерной задачи и базис пространства внутренних состояний. Оставляют среди этих решений только линейно независимые и осуществляют их ортогонализацию, получают базис, по которому искомые векторы или тензоры разлагаются в ряды (6) с одинаковыми коэффициентами.

В задаче на ГУ наложено ограничение: поверхностные силы должны зависеть от синуса или косинуса (или от того и другого) угла θ . В соответствии с этим выбирается способ формирования базиса внутренних состояний, причем на всей поверхности тела частота изменения заданных сил должна быть одинакова.

Однако предложенная методика не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданных функций поверхностных сил (условие цикличности). Для решения задач с удовлетворительной точностью требуется довольно большой «отрезок» базиса внутренних состояний. Скорость сходимости рядов зависит от ГУ и геометрии тела.

Заключение. Метод граничных состояний показал эффективность в решении первой основной неосесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения. Решение имеет аналитический вид, что позволяет легко анализировать полученные характеристики НДС.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фукалов А.А., Кутергин А.В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения. *Вестник ННГУ*, 2011, № 4-4, с. 25–26.
- [2] Стружанов В.В., Сагдуллаева Д.А. Осесимметричные деформации трансверсально-изотропного цилиндрического слоя под действием нормального давления. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*, 2015, т. 2, № 3, с. 426–430.
- [3] Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 1 (58), с. 3–13.
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2015-1-3-13>
- [4] Круподеров А.В. Функции Грина для трансверсально-изотропных оснований. *Вестник БНТУ*, 2011, № 5, с. 54–60.
- [5] Пожарский Д.А., Давтян Д.Б. Трехмерная контактная задача для трансверсально-изотропного тела. *Вестник ДГТУ*, 2013, т. 13, № 7-8, с. 22–26.
DOI: <https://doi.org/10.12737/2016>
- [6] Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф., Шахвердиева Г.Н. Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2015, № 2, с. 5–11.
- [7] Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости. *Вестник ННГУ*, 2013, № 1-3, с. 115–119.

- [8] Семькина Т.Д., Цуканова Л.П. Расчет предельных нагрузок для конструкций из трансверсально-изотропных материалов. *Вестник ВГТУ*, 2011, т. 7, № 4, с. 233–236.
- [9] Кодиров А.У. Решение задач для упругопластических трансверсально-изотропных тел. *Бюллетень науки и практики*, 2019, т. 5, № 2, с. 10–13.
DOI: <https://doi.org/10.33619/2414-2948/39/01>
- [10] Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2020, № 66, с. 96–111.
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/66/8>
- [11] Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2019, № 61, с. 45–60.
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/61/5>
- [12] Ivanychev D.A. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. *2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, 2020, pp. 56–61.
DOI: <https://doi.org/10.1109/SUMMA50634.2020.9280697>
- [13] Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019, № 2, с. 49–62. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05>
- [14] Ivanychev D.A., Levina E.Yu. The solution of boundary value problems of various types with consideration of volume forces for anisotropic bodies of revolution. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-57-70>
- [15] Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137.
- [16] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.
- [17] Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975.
- [18] Саталкина Л.В. Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. *Сб. тез. докл. науч. конф. студентов и аспирантов ЛГТУ*. Липецк, ЛГТУ, 2007, с. 130–131.
- [19] Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М., Наука, 1978.
- [20] Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2, с. 16–24.

Иванычев Дмитрий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей механики ЛГТУ (Российская Федерация, 398055, Липецк, ул. Московская, д. 30).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2 (101), с. 4–21.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-4-21>

SOLUTION OF THE NONAXISYMMETRIC ELASTOSTATIC PROBLEM FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC BODY OF REVOLUTION

D.A. Ivanychev

lsivdmal@mail.ru

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

Abstract

The paper investigates the elastic equilibrium of transversely isotropic bodies of revolution under the action of stationary surface forces distributed according to the cyclic law. The proposed method for constructing the stress-strain state is a development of the method of boundary states. The method is based on the concept of spaces of internal and boundary states conjugated by an isomorphism. Bases of state spaces are formed and orthonormalized. The desired state is expanded in a series by the elements of the orthonormal basis, and the Fourier coefficients, which are quadratures, of this linear combination are calculated. The basis of the internal state space relies on the general solution of the problem of plane deformation of a transversely isotropic body and the formulas for the transition to a spatial state, the components of which depend on three coordinates. Scalar products in state spaces represent the internal energy of elastic deformation and the work of surface forces on the displacements of the boundary points. The study introduces the solution of the main mixed problem for a circular cylinder made of transversely isotropic siltstone with the axis of anisotropy coinciding with the geometric axis of symmetry. The solution is analytical and the characteristics of the stress-strain state have a polynomial form. The paper presents explicit and indirect signs of convergence of problem solutions and graphically visualizes the results

Keywords

Boundary state method, transversely isotropic bodies, first main problem, nonaxisymmetric problems, state space

Received 10.06.2021

Accepted 07.02.2022

© Author(s), 2022

REFERENCES

- [1] Fukalov A.A., Kutergin A.V. Exact analytical solutions to problems of the equilibrium state of elastic anisotropic heavy central and axial-symmetric bodies and their applications. *Vestnik NNGU* [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod], 2011, no. 4-4, pp. 25–26 (in Russ.).
- [2] Struzhanov V.V., Sagdullaeva D.A. Axisymmetric deformations of a transverse isotropic cylindrical layer under normal pressure. *Vestnik SPbGU. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Vestnik St. Petersburg Univ. Math.], 2015, vol. 2, no. 3, pp. 426–430 (in Russ.).
- [3] Algazin O.D., Kopaev A.V. Solution to the mixed boundary-value problem for Laplace equation in multidimensional infinite layer. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2015, no. 1 (58), pp. 3–13 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2015-1-3-13>
- [4] Krupoderov A.V. Green's functions for transversely-isotropic bases. *Vestnik BNTU*, 2011, no. 5, pp. 54–60 (in Russ.).
- [5] Pozharskiy D.A., Davtyan D.B. Three-dimensional contact problem for a transversely isotropic solid. *Vestnik of Don State Technical University*, 2013, vol. 13, no. 7-8, pp. 22–26 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.12737/2016>
- [6] Akhmedov N.K., Mekhtiev M.F., Shakhverdiev G.N. Analysis of axisymmetric problem of elasticity theory for inhomogeneous transversally-isotropic conic shell. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences], 2015, no. 2, pp. 5–11 (in Russ.).
- [7] Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P. Boundary-element analysis of boundary-value problems of 3D anisotropic elasticity. *Vestnik NNGU* [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod], 2013, no. 1-3, pp. 115–119 (in Russ.).
- [8] Semykina T.D., Tsukanova L.P. Calculation of maximum loads for designs from transversal-isotropic materials. *Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 233–236 (in Russ.).
- [9] Kodirov A.U. Solution of tasks for elastoplastic transversal isotropic bodies. *Bulletin of Science and Practice*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 10–13 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.33619/2414-2948/39/01>
- [10] Ivanychev D.A. A method of boundary states in a solution to the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, no. 66, pp. 96–111 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/66/8>
- [11] Ivanychev D.A. The method of boundary states in the solution of the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, no. 61, pp. 45–60 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/61/5>

- [12] Ivanychev D.A. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. *2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, 2020, pp. 56–61. DOI: <https://doi.org/10.1109/SUMMA50634.2020.9280697>
- [13] Ivanychev D.A. The contact problem Solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 49–62 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05>
- [14] Ivanychev D.A., Levina E.Yu. The solution of boundary value problems of various types with consideration of volume forces for anisotropic bodies of revolution. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-57-70>
- [15] Penkov V.B., Penkov V.V. Boundary conditions method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137 (in Russ.).
- [16] Lekhnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Elasticity theory of an anisotropic body]. Moscow, Nauka Publ., 1977.
- [17] Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Moscow, Mir Publ., 1975.
- [18] Satalkina L.V. [Expansion of state space basis with severe limitations on computations energy consumption]. *Sb. tez. dokl. nauch. konf. studentov i aspirantov LGTU* [Abs. Sc. Conf. of LSTU Students and Post-Graduates]. Lipetsk, LSTU Publ., 2007, pp. 130–131 (in Russ.).
- [19] Aleksandrov A.Ya., Solovyev Yu.I. *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the elasticity theory]. Moscow, Nauka, 1978.
- [20] Levina L.V., Novikova O.S., Penkov V.B. Full parametrical solution of the problem of the elasticity theory of a simply connected finite body. *Vestnik LGTU* [Vestnik LSTU], 2016, no. 2, pp. 16–24 (in Russ.).

Ivanychev D.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of General Mechanics, Lipetsk State Technical University (Moskovskaya ul. 30, Lipetsk, 398055 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Ivanychev D.A. Solution of the nonaxisymmetric elastostatic problem for a transversely isotropic body of revolution. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 2 (101), pp. 4–21 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-4-21>