УДК 519.711.3 DOI: 10.18698/1812-3368-2022-3-4-16

МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДОСТИЖИМОСТИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЯХ ПЕТРИ

Д.С. Звягин danil_exp@mail.ru
О.В. Пьянков ovpyankov@mail.ru
А.Н. Копылов kan777@mail.ru

ВИ МВД России, Воронеж, Российская Федерация

Аннотация

Работа направлена на развитие теории стохастических сетей Петри и их практического применения при исследовании дискретных систем. Рассмотрена возможность решения задачи достижимости в стохастических сетях Петри с использованием матричных уравнений, широко применяемых в сетях Петри. Приведены этапы и особенности составления матричных уравнений для стохастических сетей. Введены правила введения виртуальных элементов (позиций и переходов) в стохастическую сеть Петри для составления и разрешения матричных уравнений. Рассмотрены примеры различных по структуре и составу стохастических сетей Петри на возможность применения матричных уравнений. Показано, что достижимость требуемых состояний сетей определяется через срабатывание переходов, являющихся решением матричного уравнения. Приведены объяснения получаемых результатов. Разработан алгоритм, позволяющий проверить истинность выдвинутого предположения и наглядно определить ограничения на применение матричных уравнений для различных исходных состояний моделируемой системы. В графическом виде представлены результаты работы предложенного алгоритма на примерах стохастических сетей Петри, моделирующих процесс производства судебной почерковедческой экспертизы. Сделан вывод о применимости матричных уравнений в стохастических сетях Петри и необходимости проведения дальнейших исследований в указанной области

Ключевые слова

Моделирование, стохастические сети Петри, матричные уравнения

Поступила 27.12.2021
Принята 24.01.2022

Введение. Сети Петри нашли широкое применение при моделировании различных динамических систем в целях исследования их свойств и определения достижимости определенных состояний [1].

Сеть Петри состоит из двух типов вершин (позиции (p) и переходы (t)), соединяющихся между собой дугами. Вершины одного типа не могут быть соединены дугами. Позиции могут соответствовать определенному состоянию элемента системы или всей системы в целом. Для обозначения нахождения системы в определенном состоянии (позиции) используют фишки (метки), которые в процессе срабатывания переходов могут перемещаться [2, 3]. Определение возможности перехода системы из одного заданного состояния в другое формулируется в сети Петри как задача достижимости. Решение этой задачи осуществляется построением дерева достижимости или применением матричного подхода, заключающегося в составлении матричного уравнения, которое связывает начальную и конечную маркировки со структурой сети.

Для исследования систем, в которых смена состояния носит вероятностный характер, используют стохастические сети Петри. *Стохастической сетью Петри* называется пара $M_s = \left\{C, \mu^s\right\}$, где $C = \left\{P, T, I, O\right\}$ — описание структуры сети Петри, P — множество позиций, T — множество переходов, I — входная функция $\left(T \to P\right)$, O — выходная функция $\left(P \to T\right)$; отображение $\mu^s : p \to V_s$ присваивает каждой позиции вектор распределения вероятностей наличия фишек $\mu^s\left(P_i\right)$, где V_s — множество векторов с компонентами, значения которых принадлежат интервалу [0, 1] с суммой компонент каждого вектора, равной единице. Элементы множества V_s будут определять распределение вероятностей наличия фишек в позициях сети, при этом номер компоненты соответствует числу фишек, а значение равно вероятности нахождения этого числа фишек в позиции [4]. Стохастические сети Петри, в которых отсутствуют переходы с одинаковыми наборами входных позиций, т. е. $\forall i, j\left(i \neq j\right) : I\left(t_i\right) \neq I\left(t_j\right)$, применяют при анализе процесса производства судебной почерковедческой экспертизы [5].

Методы решения задач. Для решения задачи достижимости в сети Петри составляется матричное уравнение вида

$$\mu' = \mu + x \times D,$$

где μ' — произвольная желаемая маркировка; μ — начальная маркировка сети; x — вектор запуска переходов [6, 7]; $D = D^+ - D^-$ — составная матрица изменений, определяемая через входную и выходную функции.

Если для стохастической сети Петри обозначить начальное состояние через μ^s, а конечное через μ^{s^*}, то можно предположить, что решением задачи достижимости также будет являться разрешение матричного уравнения

$$\mu^{s^*} = \mu^s + x \times D$$

в виде

$$x = \left(\mu^{s^*} - \mu^s\right) \times D^{-1}. \qquad (1)$$

Результаты. Для проверки истинности предположения (1) проведем вычислительный эксперимент на примере стохастической сети Петри (рис. 1, *а*) фрагмента модели процесса производства судебной почерковедческой экспертизы, где представленный на экспертизу объект исследования p_1; представленные на экспертизу объекты, выполненные скорописью, p_2; вывод экспертизы о том, что представленные объекты исследования выполнены скорописью p_3.

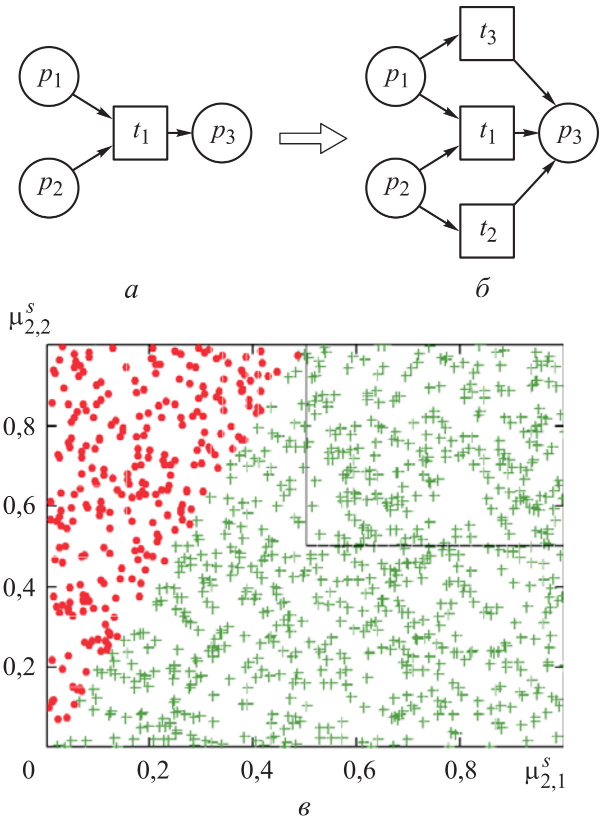


Рис. 1. Фрагменты модели процесса производства судебной почерковедческой экспертизы (*а*) и модели после добавления виртуальных переходов (*б*), результат работы алгоритма для стохастической сети Петри ($N = 1000$) (*в*)

Для решения уравнения (1) составную матрицу изменений D требуется привести в квадратный вид. Для этого добавим виртуальные позиции и/или переходы, *виртуальность* понимается как отсутствие у добавляемых элементов входных или выходных дуг, позволяющих передавать фишку в последующие элементы. При добавлении виртуальных элементов будем придерживаться следующих правил.

Правило 1. Если число позиций больше числа переходов и существуют позиции, пересечение выходных функций которых не является пустым множеством, то к одной из них добавляется виртуальный переход:

$$If\ |P|>|T|:\exists i,j\,(i\neq j),\ \ O(p_i)\cap O(p_j)\neq\varnothing\Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_{|T|+1}\to T\big|\forall k:I(p_k)\neq\{t_{|T|+1}\}\text{ и }O(p_i)\ni\{t_{|T|+1}\}.$$

Правило 2. Если число позиций больше числа переходов и существует конечная позиция, то виртуальный переход без входных дуг добавляется к конечной позиции:

$$\exists p_i:O(p_i)=\varnothing\Rightarrow t_{|T|+1}\to T\big|\forall k:O(p_k)\neq\{t_{|T|+1}\}\text{ и }I(p_i)=\{t_{|T|+1}\}.$$

Правило 3. Если число переходов больше числа позиций, то к переходу добавляется виртуальная позиция без входных дуг:

$$If\ |T|>|P|:p_{|p|+1}\to P\big|I(p_{|p|+1})=\varnothing,\ \ O(p_{|p|+1})=\{t_i\},\ t_i\in T.$$

Существующая вариативность выполнения указанных правил позволяет преобразовать сеть Петри так, чтобы составная матрица изменений D была невырожденной. Для рассмотренных ниже примеров это утверждение подтверждалось, хотя в общем случае требует доказательства [8–10].

Для сети, приведенной на рис. 1, *а*, в целях получения квадратной матрицы D необходимо добавить два виртуальных перехода. В соответствии с правилом 1 получаем

$$O(p_1)\cap O(p_2)=\{t_1\}\neq\varnothing\Rightarrow t_2\to T\big|I(p_1)\neq\{t_2\},$$
$$I(p_2)\neq\{t_2\},\ O(p_2)\ni\{t_2\}.$$

Согласно правилу 2,

$$O(p_3)=\varnothing\Rightarrow t_3\to T\big|O(p_1)\neq\{t_3\},\ O(p_2)\neq\{t_3\},O(p_3)\neq\{t_3\}$$

и

$$I(p_3)=\{t_3\}.$$

Фрагмент модели после добавления виртуальных переходов показан на рис. 1, *б*.

Рассмотрим случай максимального числа фишек, находящихся в каждой позиции, равного единице. Зададим начальную маркировку

$$\mu^s = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 1 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. поскольку $\mu^s_{2,1} = 0,8,$ вероятность нахождения одной фишки в позиции $p_1 = 0,8;$ вероятность отсутствия фишки в первой позиции равна 0,2 $(\mu^s_{1,1} = 0,2);$ аналогично и для других позиций [11]. Пусть желаемая конечная маркировка рассматриваемого фрагмента сети определяется как

$$\mu^{s*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0,52 \\ 0 & 0 & 0,48 \end{pmatrix}.$$

В соответствии со схемой на рис. 1, *б* составная матрица изменений имеет вид

$$D^- = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (1), решением матричного уравнения будет матрица запуска переходов

$$x = \left(\mu^{s*} - \mu^s\right) \times D^{-1} = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,2 & 0,32 \\ 0,8 & -0,2 & -0,32 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что номер столбца элемента нижней строки матрицы x, имеющего максимальное значение из всех элементов этой строки, соответствует номеру перехода, который должен сработать для достижения маркировки сети μ^{s*}. Для рассматриваемого примера максимальное значение (0,8) имеет первый элемент, таким образом, должен сработать переход t_1.

Для проверки выдвинутого предположения разработан приведенный ниже алгоритм.

Алгоритм, позволяющий определить его истинность для различных вариантов начальной маркировки

Шаг 1. Задаем число итераций N.

Шаг 2. $i \leftarrow 1$.

Шаг 3. Повторяем, пока $i \le N$:

Шаг 4. Инициализируем $\mu_{2,k}^{s}$ (где k соответствует позициям без входных дуг) равномерно распределенными в интервале (0, 1) числами. Остальные значения матрицы μ^{s} определяем в соответствии с моделью сети.

Шаг 5. Определяем значение μ^{s^*}, соответствующее желаемому состоянию сети.

Шаг 6. Вычисляем x по (1).

Шаг 7. Исключаем из рассмотрения элементы второй строки матрицы x, соответствующие виртуальным переходам.

Шаг 8. Находим $x_{2,\min}$ — минимальное значение из второй строки матрицы x, соответствующее переходам, срабатывание которых приводит к желаемому состоянию в сети.

Шаг 9. Определяем q — число элементов второй строки матрицы x, которые не менее $x_{2,\min}$.

Шаг 10. Если q не равно числу переходов, срабатывание которых приводит к желаемому состоянию в сети, выводим сообщение об ошибке.

Шаг 11. $i \leftarrow i+1$.

Результат работы алгоритма показан на рис. 1, *б*. Маркером • отмечены точки, соответствующие сообщениям об ошибках, маркером + — точки, в которых предположение подтверждается. Согласно выделенному верхнему правому квадранту, истинность подтверждается для случаев значений вероятности нахождения в позиции одной фишки больше 0,5 $\left(\mu_{2,i}^{s} > 0,5,\ i = 1,\ 2\right)$.

Проверим предположение на других стохастических сетях Петри.

Пример 1. Пример стохастической сети Петри приведен рис. 2, *а*,

$$\mu^{s} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 1 & 1 \\ 0,7 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mu^{s^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,44 \\ 0 & 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$x = \left(\mu^{s^*} - \mu^{s}\right) \times D^{-1} = \begin{pmatrix} -0,7 & -0,1 & -0,7 & 0,14 \\ 0,7 & 0,1 & 0,7 & -0,14 \end{pmatrix}.$$

В таком случае должно сработать два перехода (в соответствии с шагом 7 столбцы 2 и 4 не рассматриваются). Максимальное значение 0,7, что указывает на переходы t_1 и t_3 [12]. Результат работы приведенного выше алгоритма подтверждает выдвинутую гипотезу (рис. 2, *б*).

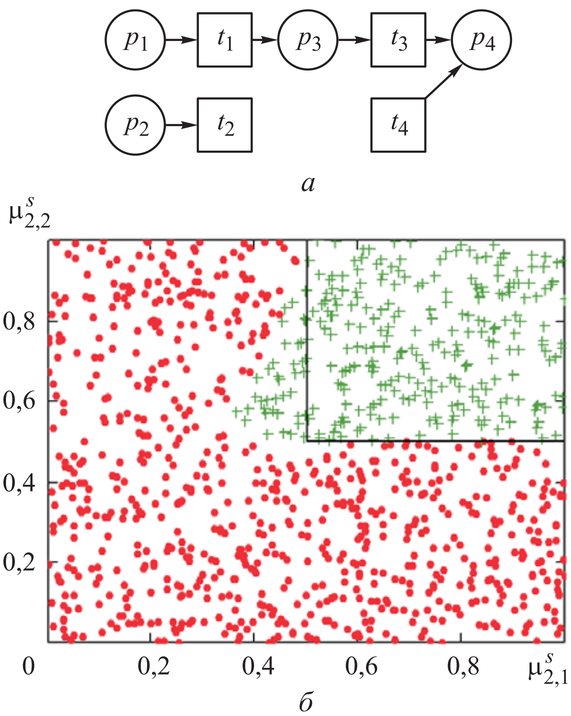


Рис. 2. Пример 1 стохастической сети Петри (*а*) и результат работы алгоритма для этой сети ($N = 1000$) (*б*)

Пример 2. Пример стохастической сети Петри приведен на рис. 3, *а*,

$$\mu^s = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 1 & 1 & 1 \\ 0,9 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mu^{s*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0,37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,63 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$x = \left(\mu^{s*} - \mu^s\right) \times D^{-1} = \begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 & -0,9 & -0,9 & -0,27 \\ 0,9 & -0,2 & 0,9 & 0,9 & 0,27 \end{pmatrix}.$$

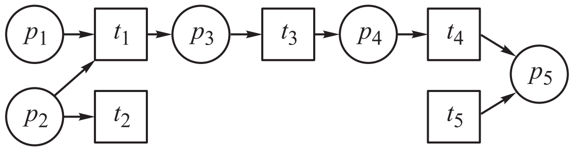
В этом случае должно сработать три перехода. Максимальное значение 0,9, что указывает на переходы t_1, t_3 и t_4. Результат работы алгоритма (рис. 3, *б*) подтверждает выдвинутое предположение [13].

Пример 3. Пример стохастической сети Петри приведен на рис. 4, *а*,

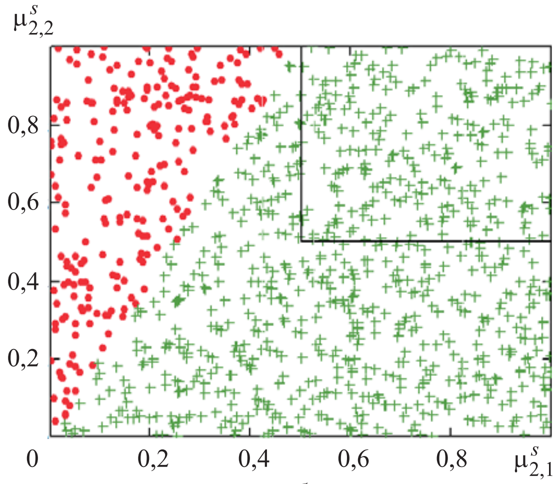
$$\mu^s = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 & 1 & 1 \\ 0,9 & 0,7 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mu^{s*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0,622 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,378 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$x = \left(\mu^{s*} - \mu^s\right) \times D^{-1} = \begin{pmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,3 & -0,9 & 0,522 \\ 0,9 & -0,2 & -0,3 & 0,9 & -0,522 \end{pmatrix}.$$

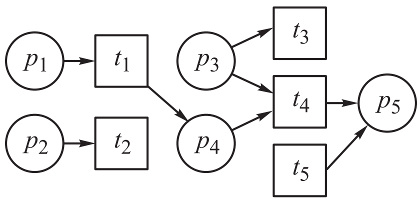


а

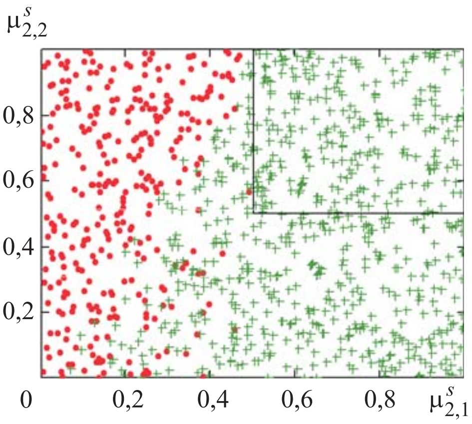


б

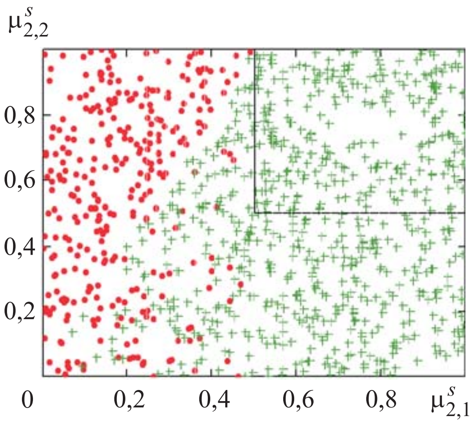
Рис. 3. Пример 2 стохастической сети Петри (*а*) и результат работы алгоритма для этой сети ($N = 1000$) (*б*)



а



б



в

Рис. 4. Пример 3 стохастической сети Петри (*а*) и результаты работы алгоритма для этой сети Петри ($N = 3000$) (*б*, *в*)

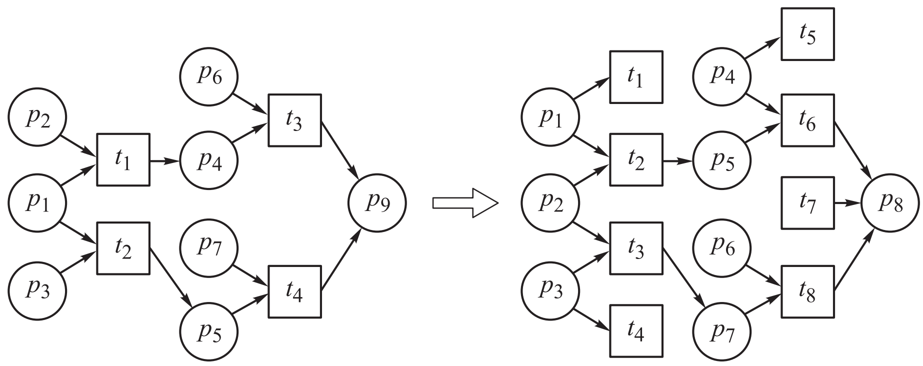
Результат работы приведенного алгоритма подтверждает выдвинутое предположение (рис. 4, *б*, *в*).

Пример 4. Рассмотрим пример стохастической сети Петри с двумя альтернативными путями (рис. 5, *а*), приведем сеть к квадратному виду составной матрицы изменений (рис. 5, *б*):

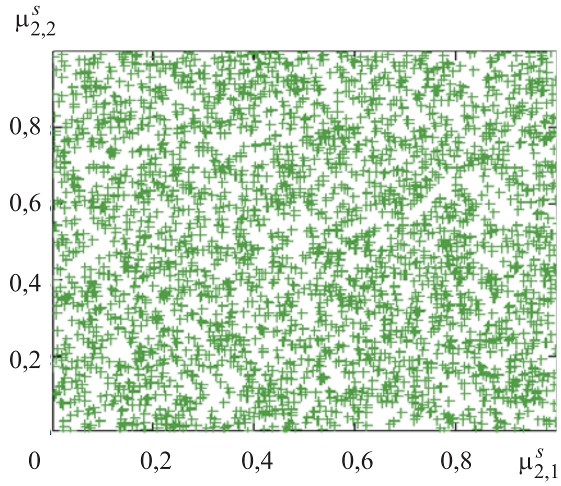
$$\mu^s = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 1 & 0,4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu^{s*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,712 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,288 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$x = \left(\mu^{s*} - \mu^s\right) \times D^{-1} = \begin{pmatrix} -0,2 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,312 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,312 & 0 \end{pmatrix}.$$



а *б*



в

Рис. 5. Преобразование фрагмента модели процесса производства судебной почерковедческой экспертизы (*а*) к удобному для применения матричного подхода виду (*б*) и результат работы алгоритма для этой стохастической сети Петри ($N = 3000$) (*в*)

Результат работы алгоритма подтверждает истинность предположения (рис. 5, *в*) [14].

Заключение. Подтверждение истинности выдвинутого предположения позволяет применять теорию матричных уравнений для быстрой проверки возможности перехода исследуемой системы в требуемое состояние. Матричный метод и выдвинутое предположение можно использовать для анализа процесса производства судебной почерковедческой экспертизы, построенной с использованием сетей Петри. Однако, как следует из представленных примеров, возможность применения матричного уравнения для решения задачи достижимости в стохастических сетях Петри имеет ограничения. Для устранения этих ограничений требуется проведение дальнейших исследований по модификации составления и разрешения матричного уравнения для стохастических сетей Петри [15].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Men'shikh V.V., Lunev Yu.S. Simulation of destabilizing factors influence on distributed information systems by Petri nets. *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 11, pp. 2417–2424. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117911110166

[2] Котов В.Е. Сети Петри. М., Наука, 1984.

[3] Лескин А.А., Мальцев П.А., Спиридонов А.М. Сети Петри в моделировании и управлении. Л., Наука, 1989.

[4] Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М., Мир, 1984.

[5] Пьянков О.В., Звягин Д.С. Моделирование процесса производства судебной почерковедческой экспертизы при помощи сетей Петри. *ВИ МВД России*, 2020, № 1, с. 154–163.

[6] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., Мир, 1976.

[7] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М., Наука, 1979.

[8] Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М., Наука, 1977.

[9] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[10] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М., ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[11] Jensen K., Kristensen L.M. Coloured Petri nets. Modelling and validation of concurrent systems. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1007/b95112

[12] Биркгоф Г., Барти Г. Современная прикладная алгебра. М., Мир, 1976.

[13] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высш. шк., 1972.

[14] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М., Мир, 1999.

[15] Звягин Д.С. Условия применения матричного подхода к стохастическим сетям Петри. *Вестник ВИ МВД России,* 2021, № 3, с. 101–110.

Звягин Данил Сергеевич — преподаватель кафедры информационной безопасности ВИ МВД России (Российская Федерация, 394065, Воронеж, пр-т Патриотов, д. 53).

Пьянков Олег Викторович — д-р техн. наук, доцент, заместитель начальника кафедры инфокоммуникационных систем и технологий ВИ МВД России (Российская Федерация, 394065, Воронеж, пр-т Патриотов, д. 53).

Копылов Алексей Николаевич — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры математики и моделирования систем ВИ МВД России (Российская Федерация, 394065, Воронеж, пр-т Патриотов, д. 53).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Звягин Д.С., Пьянков О.В., Копылов А.Н. Матричный подход решения задач достижимости в стохастических сетях Петри. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 3 (102), с. 4–16.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-3-4-16

MATRIX APPROACH TO SOLVING REACHABILITY PROBLEMS IN STOCHASTIC PETRI NETS

D.S. Zvyagin danil_exp@mail.ru
O.V. Pyankov ovpyankov@mail.ru
A.N. Kopylov kan777@mail.ru

Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation

Abstract

The purpose of the research was to develop the theory of stochastic Petri nets and consider its practical application when studying discrete systems. The paper considers the possibility of solving the reachability problem in stochastic Petri nets by means of matrix equations widely used in Petri nets; describes the stages and features of generating matrix equations for stochastic networks; formulates the rules for introducing virtual elements, i.e., positions and transitions, into the stochastic Petri net to generate and solve matrix equations. Stochastic Petri nets different in structure and composition were used to explore the possibility of applying matrix equations. Findings of the research show that the reachability of the required states of the networks is determined through the firing of transitions, which are the solution of the matrix equation. Within the

Keywords

Modeling, stochastic Petri nets, matrix equations

study, we interpreted the obtained results and developed an algorithm that allowed us to validate the assumption made and visually determine the restrictions on the use of matrix equations for various initial states of the simulated system. The results of the proposed algorithm are presented in graphical form on the examples of stochastic Petri nets that model the process of forensic handwriting analysis. The conclusion is made about the applicability of matrix equations in stochastic Petri nets and the need for further research in this area

Received 27.12.2021
Accepted 24.01.2022

REFERENCES

[1] Men'shikh V.V., Lunev Yu.S. Simulation of destabilizing factors influence on distributed information systems by Petri nets. *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 11, pp. 2417–2424. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117911110166

[2] Kotov V.E. Seti Petri [Petri nets]. Moscow, Nauka Publ., 1984.

[3] Leskin A.A., Maltsev P.A., Spiridonov A.M. Seti Petri v modelirovanii i upravlenii [Petri nets in modeling and control]. Leningrad, Nauka Publ., 1989.

[4] Peterson J.L. Petri net theory and the modeling of systems. Englewood Cliffs, 1981.

[5] Pyankov O.V., Zvyagin D.S. Modeling the production process of forensic handwriting expertise using stochastic Petri nets. *The Bulletin of Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia*, 2020, no. 1, pp. 154–163 (in Russ.).

[6] Bellman R.E. Introduction to matrix analysis. McGraw-Hill, 1970.

[7] Waerden B.L. Algebra. Ungar, 1970.

[8] Vygodskiy M.Ya. Spravochnik po vysshey matematike [Handbook of higher mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1977.

[9] Gantmakher F.R. Teoriya matrits [Matrix theory]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2010.

[10] Ilin V.A., Poznyak E.G. Lineynaya algebra [Linear algebra]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005.

[11] Jensen K., Kristensen L.M. Coloured Petri nets. Modelling and validation of concurrent systems. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009.
DOI: https://doi.org/10.1007/b95112

[12] Birkhoff G., Bartee T.C. Modern applied algebra. McGraw-Hill, 1970.

[13] Gmurman V.E. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika [Theory of probability and mathematical statistics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1972.

[14] Golub G.H., van Loan C.F. Matrix computations. JHU Press, 1996.

[15] Zvyagin D.S. Conditions for application of the matrix approach to stochastic Petri nets. *The Bulletin of Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia*, 2021, no. 3, pp. 101–110 (in Russ.).

Zvyagin D.S. — Lecturer, Department of Information Security, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia (Patriotov prospekt 53, Voronezh, 394065 Russian Federation).

Pyankov O.V. — Dr. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Deputy Head of the Department of Information Communication Systems and Technologies, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia (Patriotov prospekt 53, Voronezh, 394065 Russian Federation).

Kopylov A.N. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Mathematics and Modeling of Systems, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia (Patriotov prospekt 53, Voronezh, 394065 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zvyagin D.S., Pyankov O.V., Kopylov A.N. Matrix approach to solving reachability problems in stochastic Petri nets. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 3 (102), pp. 4–16 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-3-4-16