

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УПРУГИХ ПОЛЕЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ, ВЫЗВАННЫХ ДЕЙСТВИЕМ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

Д.А. Иванов¹
Е.Ю. Левина²

lsivdmal@mail.ru
hensi-l@yandex.ru

¹ ЛГТУ, Липецк, Российская Федерация

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Представлена методика построения упругих полей для трансверсально-изотропных тел, ограниченных коаксиальными поверхностями вращения и находящихся под действием неосесимметричных объемных сил. Построенная теория оперирует понятиями метода граничных состояний, основу которого составляют пространства состояний среды. Базис пространства внутренних состояний формируется с помощью фундаментальных многочленов. Многочлен ставится в любую позицию вектора перемещения плоского вспомогательного состояния и по формулам перехода определяется пространственное состояние. Набор таких состояний образует конечномерный базис, по которому после ортогонализации искомые характеристики упругого поля раскладываются в ряды Фурье с одинаковыми коэффициентами. Коэффициенты рядов представляют собой скалярные произведения векторов заданных и базисных объемных сил. Поиск упругого состояния сводится к решению квадратур. Даны рекомендации в построении базиса внутренних состояний в зависимости от вида заданных по различным циклическим законам (синуса и косинуса) объемных сил. Проанализировано решение конкретной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного кругового цилиндра от действия неосесимметричных объемных сил. Проведены анализ сходимости рядов и оценка точности решения в графическом виде

Ключевые слова

Неосесимметричная деформация, метод граничных состояний, упругое состояние, объемные силы, трансверсально-изотропные тела, пространство состояний

Поступила 09.11.2021

Принята 24.03.2022

© Автор(ы), 2022

Введение. Создание новых или развитие существующих методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тел из сложных по структуре и реологии материалов по большей части опирается на об-

щее или фундаментальное решение той или иной задачи теории упругости. Фундаментальный вклад в создание общих решений для анизотропной среды внесли С.Г. Лехницкий, А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев, А.С. Космодамианский и другие. Однако эти решения разработаны еще в прошлом столетии. Современными учеными получены решения частных задач, которые могут быть применены для построения математических моделей на основе различных методов механики. Особенно это касается аналитических или численно-аналитических методов, которые позволяют получить решение в виде функции нескольких переменных (координаты, время, температуры и др.). Развитие именно аналитических методов в последнее время преобладает над численными методами, где результатом решения является таблица значений той или иной величины во всей (иногда не во всей) области тела.

В области реализации различных методов анализа НДС эластостатических тел с учетом влияния объемных сил можно выделить следующие работы. Изотропное упругое тело, ограниченное концентрическими сферами и находящееся под действием осесимметричных нестационарных объемных сил, исследовано в [1]. С использованием разложения компонент вектора перемещений в ряды по окружной и радиальной координатам в [2, 3] получены аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер и находящихся под действием внутреннего давления массовых сил. Вынужденные деформации, возникающие от воздействий поверхностных и объемных сил, исследованы в [4]. В дополнение к двум комплексным потенциалам Колосова — Мусхелишвили в [5] предложен третий потенциал, учитывающий влияние массовых сил. Приведены аналитические решения некоторых задач плоской деформации. Развитию метода ортогональных проекций посвящена [6]. Исследованы задачи теории упругости с участием объемных и поверхностных сил в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций. Метод определения НДС изотропных упругих тел от действия объемных сил непотенциального характера редуцирован в [7, 8].

Для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностями вращения, средствами метода граничных состояний решены первая основная [9] и вторая основная [10] задачи теории упругости при одновременном действии на тело массовых сил. По идентичной методике решена контактная задача [11] и задача со смешанными граничными условиями [12]. Особенность решения указанных задач — полученное упругое поле одновременно удовлетворяет условиям внутри области (массовым силам)

и на границе тела, а не является суммой решений отдельных задач. Более кратко методика решения краевых задач для трансверсально-изотропного цилиндра с участием массовых сил описана в [13].

Определению упругих полей от действия осесимметричных массовых сил на трансверсально-изотропное тело вращения вкуче с действием поверхностных сил и установившегося поля температуры посвящена [14].

Цель настоящей работы — развитие аналитического метода определения НДС, предложенного в [7] на класс трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием объемных сил, которые заданы по циклическому закону. Объемные силы носят неосесимметричный характер и зависят от трех цилиндрических координат.

Постановка задачи. Рассмотрено упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными

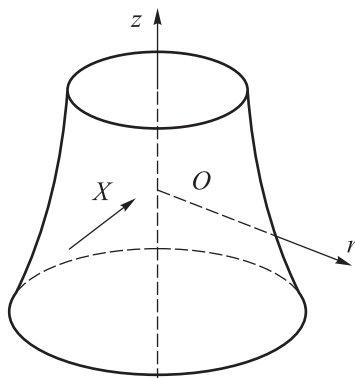


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

поверхностями вращения (рис. 1) под действием неосесимметричных объемных сил $X = \{R, Q, Z\}$, заданных по циклическому закону синуса или косинуса. Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения z . Деформации малы.

Задача состоит в определении НДС, возникающего в теле под действием объемных сил. Поверхность тела свободна от усилий и ограничений кинематического характера.

Материалы и метод решения. Зависимость пространственного НДС упругого

трансверсально-изотропного тела вращения от некоторых вспомогательных двумерных состояний, компоненты которых зависят от двух координат x и y (переменных), установлена в [15]. В качестве плоских вспомогательных состояний использована плоская деформация $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}(x, y), u_\eta^{pl}(x, y), u_z^{pl}(x, y)\}$, возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, которая параллельна плоскости xu (направление η).

При установлении зависимости использован следующий прием. Упругое тело, напряженное состояние которого требуется изучить, рассматривают как часть некоторого бесконечного цилиндра с осью η , параллельной образующей цилиндра. С телом связана цилиндрическая система координат $rz\theta$. Меридианное сечение тела совпадает с плоскостью

поперечного сечения бесконечного цилиндра с осями координат xu (направление η перпендикулярно плоскости xu , ось x цилиндра и ось z упругого тела совмещены). Предполагается, что цилиндр находится в некотором двумерном напряженном состоянии, не меняющимся вдоль образующей. Компоненты этого состояния u_y^{pl} , u_x^{pl} , σ_y^{pl} , σ_x^{pl} , σ_{xy}^{pl} , σ_η^{pl} зависят от координат x , y и определяют плоскую деформацию цилиндра в плоскости xu , а также напряженное состояние заданного упругого тела, так как оно является частью цилиндра. Для того чтобы получить пространственное напряженное состояние тела, рассмотрено несколько цилиндров, отличающихся направлением образующей или углом поворота относительно оси z . Последовательно представляя тело вырезанным из каждого такого цилиндра при $m \rightarrow \infty$ (m — число цилиндров), образуется ряд напряженных состояний, суперпозиция которых и дает суммарное трехмерное состояние. Например, для компоненты вектора перемещения трехмерного состояния имеет место выражение

$$w = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (u_x^{pl})_k.$$

Перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$, сумма заменяется интегралом.

Предполагая, что плоскость xu составляет угол ω с начальной меридиональной плоскостью цилиндрической системы координат, от которой проводится отсчет угла θ ($\beta = \omega - \theta$), связь между пространственным состоянием и плоской деформацией соответствующих цилиндров имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$w_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_x^{pl} \cos(n\beta) d\beta;$$

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + v_n \sin(n\theta)]; \quad (2)$$

$$v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + u_n \cos(n\theta)];$$

$$w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)], \quad (2)$$

где a, b — пределы суммирования; $x = z$; $y = r \cos \beta$.

Деформации вычисляются через соотношения Коши, напряжения — через закон Гука для трансверсально-изотропной среды, объемные силы — из уравнений равновесия [16].

Определение упругого состояния анизотропного тела осуществляется средствами, схожими со средствами метода граничных состояний (МГС) [17]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний Ξ приняты наборы:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, X_i^{(k)}\}. \quad (3)$$

Метод определения НДС изотропных тел от действия неконсервативных непрерывных объемных сил изложен в [8]. Здесь использован тот же подход. В целях построения поля перемещений для тела от действия объемных сил для плоских вспомогательных состояний применена фундаментальная система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое упругое состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \begin{Bmatrix} u_y^{pl} \\ u_x^{pl} \\ u_\eta^{pl} \end{Bmatrix} \in \left\{ \begin{Bmatrix} y^\alpha z^\beta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ y^\alpha z^\beta \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\alpha z^\beta \end{Bmatrix} \right\}.$$

Согласно (1) и (2), определены компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, \theta, z)$ пространственного состояния. Для такого вектора по соотношению Коши найден тензор деформаций, из закона Гука — тензор напряжений, а из уравнения равновесия — массовые силы.

Осуществляя перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, можно получить множество состояний и сформировать конечномерный базис внутренних состояний (3), позволяющий разложить произвольный вектор непрерывных объемных сил в ряд Фурье по его элементам при увеличении числа n до бесконечности.

После построения базиса состояний проведено его ортонормирование с использованием рекурсивно-матричного алгоритма ортогонализации [18]. Алгоритм реализует процесс ортогонализации Грама — Шмидта, в котором перекрестные скалярные произведения вычисляются по формуле (например, для первого и второго состояний):

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) &= \int_V \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}^{(2)} dV; \\ \mathbf{X}^{(k)} &= \{R^{(k)}(r, \theta, z), Q^{(k)}(r, \theta, z), Z^{(k)}(r, \theta, z)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Любой непрерывный вектор объемных сил может быть представлен в виде ряда Фурье, разложенного по элементам ортонормированного базиса:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}^{(k)}; \quad c_k = (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(k)}), \quad (5)$$

где $\mathbf{X} = \{R, Q, Z\}$ — заданные объемные силы.

Каждому базисному вектору $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствуют вектор перемещения, тензоры деформаций и напряжений, в совокупности образующие внутреннее состояние от действия объемных сил

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

или в развернутом виде

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^{(k)}. \quad (6)$$

Тестирование коэффициентов Фурье осуществлено подстановкой объемных сил одного из базисных элементов в качестве заданных, при этом должно выполняться условие $c_n = 1$ (n — номер тестируемого базисного элемента), остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

Решение задачи. Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [19]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи (с масштабным коэффициентом $\eta^* = 10^5$ кгс/с²), аналогия которой представлена в [20], упругие характеристики материала составили: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_r = 2,29$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$. Цилиндр занимает область $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$.

При практической реализации приема решения задач и его тестировании при различных видах функций заданных объемных сил оказалось, что не для любого вида функций объемных сил существует решение. Возможность получения строгого или приближенного решения зависит от способа формирования базиса.

В общем случае при формировании базиса внутренних состояний в (2) суммирование осуществляется от $a = 0$ до $b = \infty$. При построении базиса необходимо стремиться к наибольшей простоте вида функций, описывающих компоненты упругого поля. Сначала рассмотрим базис, формируемый на основе функций, которые являются первыми слагаемыми элементов ряда, входящих в правые части выражений (2), в случае, когда $a = 0$ и $b = 1$:

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)]. \quad (7)$$

В таком случае задача будет разрешима, если заданные объемные силы R, Q, Z содержат тригонометрические функции $\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta$, например:

$$R = r^m z^k (1 - p \cos \theta), \quad m, k \in N, \quad p \in Z. \quad (8)$$

В противном случае скалярные произведения и коэффициенты Фурье (5) будут равны нулю.

Если формировать базис на основе функций, являющихся первыми слагаемыми элементов ряда, входящих в правые части выражений (2), в случае когда $a = 0$ и $b = 1$:

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin(n\theta)], \quad (9)$$

то приближенное решение возможно получить, если объемные силы R, Q, Z содержат тригонометрические функции $\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta$.

Если в (7) и (9) использовать $a = b = 1$, то объемные силы вида (8) восстановить нельзя, в этом случае приближенное решение задачи ищется для функции вида $r^m z^k p \cos \theta$ или $r^m z^k p \sin \theta$.

В случае когда объемные силы имеют вид

$$r^m z^k (\cos \theta + \sin \theta), \quad (10)$$

необходимо использовать выражения (2) в полной мере с учетом $a = 0$ и $b = 1$. При этом возможно получение не только приближенных, но и строгих решений.

Приближенное решение можно получить и для объемной силы вида $r^m (z + p)^k \cos \theta$ или $r^m (z + p)^k \sin \theta$, а при $m = k = 2$ — строгое.

Приведем пример решения задачи, когда задана объемная сила

$$\mathbf{X} = \{r^3 z^2 (\sin \theta + \cos \theta), 0, 0\}.$$

После построения базиса по соотношениям (2), исключения базисных элементов для которых $X = 0$, а также линейно зависимых элементов в процессе ортогонализации, базисные компоненты объемных сил имеют вид, представленный в таблице (показаны семь элементов).

Объемные силы ортонормированного базиса

Элемент	R	Q	Z
ξ_1	$-0,2(\cos \theta + \sin \theta)$	$-0,2(\cos \theta - \sin \theta)$	0
ξ_2	0		-0,282
ξ_3	$-0,172z(\cos \theta + \sin \theta)$	$-0,172z(\cos \theta - \sin \theta)$	0
ξ_4	0		-0,244z
ξ_5	-0,399r	0	
ξ_6	0	-0,399r	0
ξ_7	0		$-0,399r(\cos \theta + \sin \theta)$

Используем базис внутренних состояний из 50 элементов. Ненулевые коэффициенты Фурье: $c_1 = -1,3368$; $c_8 = 1,1957$; $c_{13} = -1,8712$; $c_{14} = 0,4678$; $c_{32} = -1,6736$; $c_{33} = 0,4184$; $c_{38} = -0,2684$; $c_{39} = 0,0671$. Решение формируется соотношениями (6).

Оценка точности решения осуществлена сопоставлением заданных объемных сил (штриховая линия) с восстановленными в результате решения (сплошная линия) (рис. 2). Согласно графику на рис. 2, а, максимальная погрешность находится в точках $\pi/4$ и $5\pi/4$, поэтому оценку точности восстановленной силы R в зависимости от r и z целесообразно провести для сечения с угловой координатой $\pi/4$ (рис. 2, в, д). Максимальная погрешность на графике рис. 2, б находится в точке $3\pi/4$, поэтому верификация силы Q в зависимости от r и z рассматривается в сечении с угловой координатой $3\pi/4$ (рис. 2, г, е).

Максимальная погрешность задачи составила 25 % и определена в точке $(1, \pi/4, 0)$ (см. рис. 2, д). Погрешность преодолевается за счет увеличения числа элементов базиса. При использовании базиса из 70 элементов добавляется два ненулевых коэффициента Фурье ($c_{69} = -0,24$; $c_{70} = 0,06$) и точность решения значительно повышается. Графики на рис. 2, д, е при 70 удержанных элементах базиса примут вид, показанный на рис. 3.

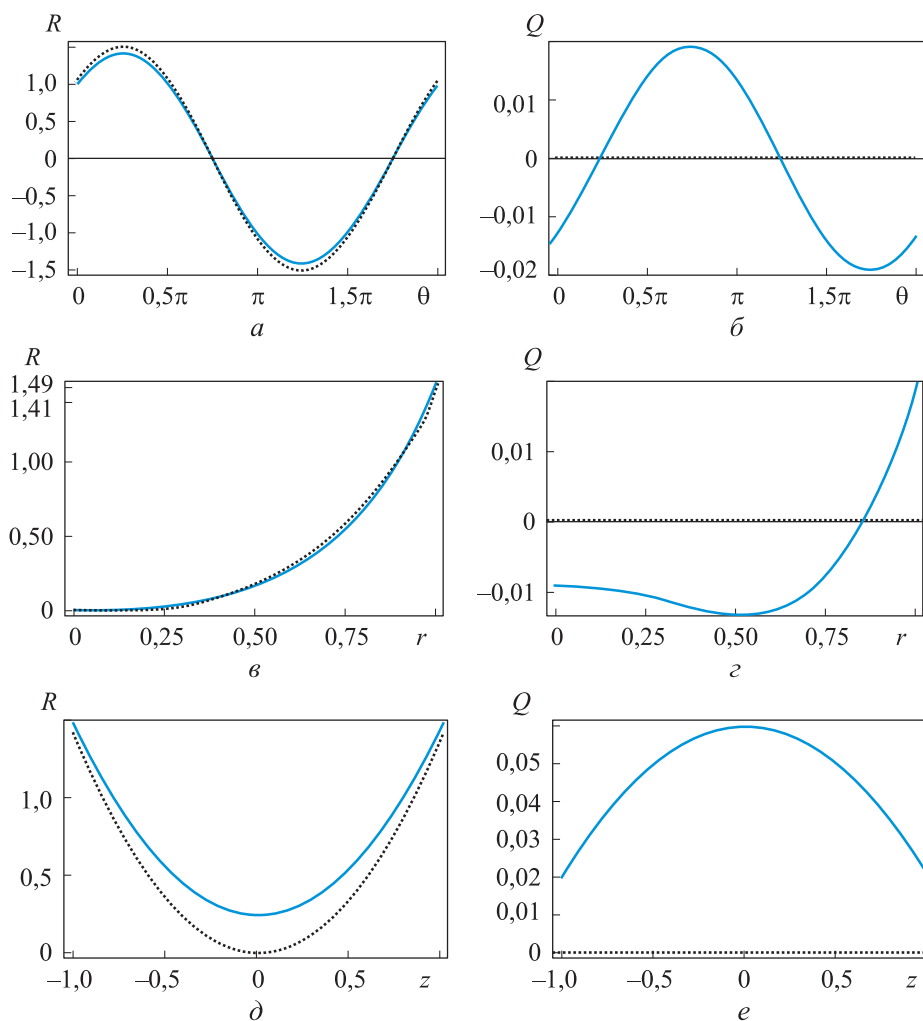


Рис. 2. Верификация объемных сил при 50 удержанных элементах базиса:
 $a - r=1, z=1$; $b - r=1, z=1$; $v - \theta=\pi/4, z=1$; $z - \theta=3\pi/4, z=1$;
 $\partial - \theta=\pi/4, r=1$; $e - \theta=3\pi/4, r=1$

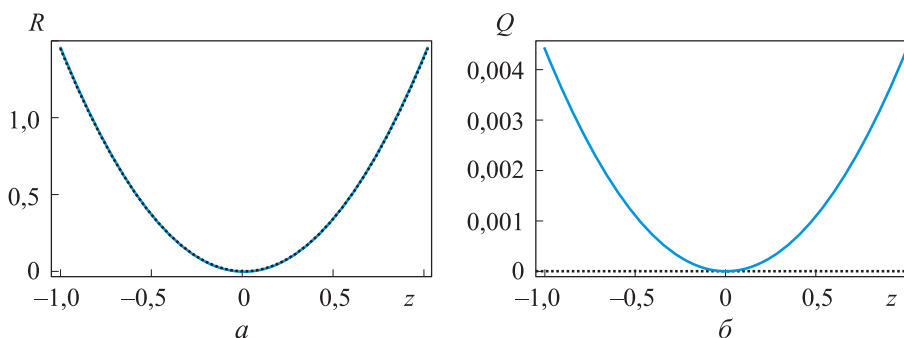


Рис. 3. Верификация объемных сил при 70 удержанных элементах базиса:
 $a - \theta=\pi/4, r=1$; $b - \theta=3\pi/4, r=1$

Окончательное внутреннее состояние ξ_0 построено на 70 базисных элементах и имеет полиномиальный вид:

$$u_0 = (31,123z^4 - 1369,44r^2z^4 - 1971,16r^4z^4 + 165,557z^6 + 1390,77r^2z^6 - 74,417z^8)(\cos \theta + \sin \theta) \cdot 10^{-5};$$

$$v_0 = (31,123z^4 - 124,494r^2z^4 + 103,745r^4z^4 + 165,557z^6 + 264,805r^2z^6 - 74,417z^8)(\cos \theta - \sin \theta) \cdot 10^{-5};$$

$$w_0 = (500,016rz^5 + 1250,04r^3z^5 - 436,69rz^7)(\cos \theta + \sin \theta) \cdot 10^{-5};$$

$$R_0 = (-952,381z^2 + 4190,8r^2z^2 + 60317,5r^4z^2)(\cos \theta + \sin \theta) \cdot 10^{-5};$$

$$Q_0 = (-952,381z^2 + 3809,5r^2z^2 - 3174,6r^4z^2)(\cos \theta - \sin \theta) \cdot 10^{-5}; \quad Z_0 = 0.$$

Компоненты тензора напряжений представлены в виде изолиний (в явном виде не показаны) на рис. 4, а-в. Приведено распределение напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} в сечении $0 \leq r \leq 1$, $\theta = \pi/4$, $-1 \leq z \leq 1$. Контур деформированного цилиндра (в силу малости деформаций показан в гипертрофированном виде) представлен на рис. 4, г.

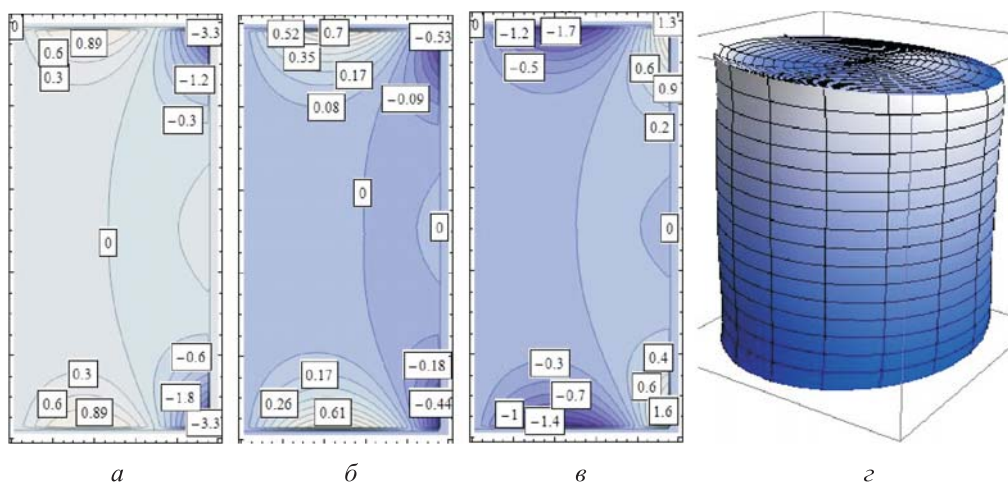


Рис. 4. Изолинии напряжений σ_{rr} (а), $\sigma_{\theta\theta}$ (б) и σ_{zz} (в), контур деформированного цилиндра (г)

Полученное упругое поле удовлетворяет всем уравнениям теории упругости для трансверсально-изотропного тела [18]. В случае когда заданные объемные силы зависят от $\sin(n\theta)$ или $\cos(n\theta)$, $n = 2, 3, \dots$, в (2), (7), (9) необходимо использовать пределы суммирования $a = b = n$.

Рассмотрим функцию, описывающую, например, объемную силу вида $R = r^m z^k p \cos(n\theta)$. Особенность решения при $n > 1$ заключается в том, что восстановленные объемные силы отличаются по амплитуде от заданных на некоторую константу — корректирующий коэффициент κ , который вычисляется через заданную (R) и восстановленную (R_0) компоненты объемных сил для фиксированных координат r и z :

$$\kappa = \frac{R}{R_0} \Big|_{r,z} .$$

Затем остальные характеристики полученного упругого поля умножаются на коэффициент κ , зависящий только от r .

Пусть задана объемная сила $\mathbf{X} = \{0, r^2 z \cos(3\theta), 0\}$. Базис формируется с помощью выражений (9), и для решения этой задачи используется 76 элементов базиса (коэффициенты Фурье не приведены). Результат представлен графически на рис. 5 (показаны значения объемных сил R, Q на поверхности $r = 1, z = 1$).

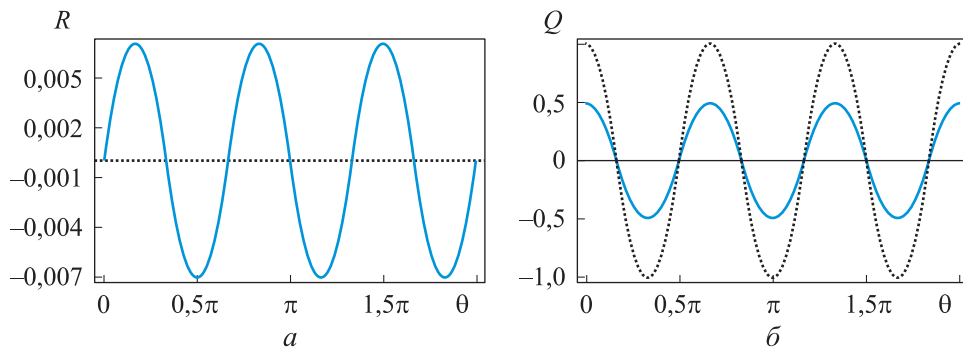


Рис. 5. Верификация объемных сил в задаче с коэффициентом κ :

$$a - r = 1, z = 1; \quad b - r = 1, z = 1$$

Восстановленные выражения для объемных сил:

$$R_0 = (0, 25r^2 z - 2r^4 z + 5, 4r^6 z - 6r^8 z + 2, 357r^{10} z) \sin(3\theta);$$

$$Q_0 = (0, 25r^2 z + 2r^4 z - 5, 4r^6 z + 6r^8 z - 2, 357r^{10} z) \cos(3\theta); \quad Z_0 = 0.$$

Корректирующий коэффициент

$$\kappa = r^2 / (0, 25r^2 + 2r^4 - 5, 4r^6 + 6r^8 - 2, 357r^{10}) .$$

Окончательно решение имеет вид $\xi = \kappa \xi_0$. При $r = z = 1$ коэффициент $\kappa = 2,029$ и погрешность для компоненты R увеличилась, однако результат по-прежнему удовлетворителен (максимальная погрешность 1,5 %).

Обсуждение полученных результатов. Решение задачи теории упругости от действия объемных сил строится следующим образом. Задается зависимость вектора перемещения плоского вспомогательного состояния от координат $y^\alpha z^\beta$ и на его основе определяется вектор перемещения пространственного состояния, зависящего от координат r, θ, z . По соотношению Коши для этого вектора находится тензор деформаций, из закона Гука — тензор напряжений, а из уравнения равновесия — объемные силы. На основе этого строится строгое частное решение задачи, соответствующее заданной в каждой точке тела функции перемещения. Перебирая $\alpha + \beta \leq n, n = 1, 2, 3, \dots$, строится множество строгих частных решений задачи линейной теории упругости: векторы перемещения \mathbf{u}_k , тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, тензоры напряжений $\boldsymbol{\sigma}_k$, векторы объемных сил \mathbf{X}_k . Среди этих решений оставляются только линейно независимые и осуществляется их ортогонализация в соответствии со скалярным произведением (4). Получается базис, по которому соответствующие векторы или тензоры разлагаются в ряды с одинаковыми коэффициентами (5). Поэтому изложенный подход позволяет сразу строить решение задачи с заданными объемными силами.

Выбор способа конструирования базиса зависит от вида заданной функции компоненты объемных сил. Для решения задач требуется довольно большой базис внутренних состояний, однако при формировании рядов число ненулевых коэффициентов Фурье невелико.

В задачах, когда все три компоненты заданного вектора объемных сил не равны нулю, требуется довольно большой «отрезок» базиса внутренних состояний. В этом случае целесообразно использовать принцип независимости действия сил и решить три отдельные задачи, в каждой из которых заданы $\mathbf{X} = \{R, 0, 0\}$, $\mathbf{X} = \{0, Q, 0\}$, $\mathbf{X} = \{0, 0, Z\}$, а полученные упругие поля сложить.

Заключение. Сформулирован подход решения задачи от действия стационарных объемных сил, заданных по циклическому закону. Компоненты упругого поля зависят от трех координат и носят неосесимметричный циклический характер.

Однако предложенный подход не является общим для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданных функций объемных сил.

Решение аналитическое и имеет полиномиальный вид, что позволяет легко анализировать полученные характеристики упругого поля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил. *ДАН*, 2015, т. 56, № 6, с. 59–69. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20150608>
- [2] Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения. *XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Казань, КФУ, 2015, с. 3951–3953.
- [3] Зайцев А.В., Фукалов А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики. *Математическое моделирование в естественных науках*, 2015, т. 1, № 1, с. 141–144.
- [4] Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела. *Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки*, 2013, т. 29, № 2, с. 39–45. DOI: <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2013-29-2-39-45>
- [5] Шарафутдинов Г.З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил. *ПММ*, 2009, т. 73, № 1, с. 69–87.
- [6] Стружанов В.В., Сагдуллаева Д.А. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций. *Математическое моделирование систем и процессов*, 2004, № 12, с. 89–100.
- [7] Кузьменко В.И., Кузьменко Н.В., Левина Л.В. и др. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении. *ПММ*, 2019, т. 83, № 1, с. 84–94. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032823519010053>
- [8] Пеньков В.Б., Левина Л.В., Новикова О.С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020, т. 24, № 1, с. 56–73. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1711>
- [9] Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2020, № 66, с. 96–111. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/66/8>
- [10] Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2019, № 61, с. 45–60. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/61/5>
- [11] Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами. *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019, № 2, с. 49–62. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05>

[12] Иванычев Д.А. Метод граничных состояний при решении смешанной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами. *Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2021, № 71, с. 63–77.

DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/71/6>

[13] Ivanychev D.A., Levina E.Yu. The solution of boundary value problems of various types with consideration of volume forces for anisotropic bodies of revolution. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-57-70>

[14] Ivanychev D.A., Levina E.Yu. Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, art. 012058. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012058>

[15] Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М., Наука, 1978.

[16] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1955.

[17] Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137.

[18] Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений. *Сб. тез. докл. науч. конф. студентов и аспирантов ЛГТУ*. Липецк, ЛГТУ, 2007, с. 130–131.

[19] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977.

[20] Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела. *Вестник ЛГТУ*, 2016, № 2, с. 16–24.

Иванычев Дмитрий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Общая механика» ЛГТУ (Российская Федерация, 398055, Липецк, ул. Московская, д. 30).

Левина Екатерина Юрьевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Иванычев Д.А., Левина Е.Ю. Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 4 (103), с. 22–38. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-22-38>

DESCRIBING NON-AXISYMMETRIC ELASTIC FIELDS GENERATED BY VOLUME FORCES IN ANISOTROPIC SOLIDS OF REVOLUTION

D.A. Ivanychev¹
E.Yu. Levina²

lsivdmal@mail.ru
hensi-l@yandex.ru

¹ Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

² Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper presents a technique for plotting elastic fields in transversely isotropic bodies bounded by coaxial surfaces of revolution, subjected to non-axisymmetric volume forces. Our theory uses the ideas of the boundary state method, which is based on state spaces describing a medium. Fundamental polynomials form the basis of the internal state space. A polynomial is placed in any displacement vector position in a planar auxiliary state, then transition formulas can be used to determine the spatial state. A set of such states forms a finite-dimensional basis that is used after orthogonalisation to expand the desired elastic field characteristics into Fourier series with identical coefficients. These series coefficients are dot products of given and base volume force vectors. The search for an elastic state is reduced to solving quadratures. We provide guidelines for constructing an internal state basis depending on the type of volume forces given by various cyclic functions (sine and cosine). We analysed a solution to a specific theory of elasticity problem concerning a transversely isotropic circular cylinder subjected to non-axisymmetric volume forces. We analysed the series convergence and graphically evaluated the solution accuracy

Keywords

Non-axisymmetric deformation, boundary state method, elastic stress state, volume forces, transversely isotropic bodies, state space

Received 09.11.2021

Accepted 24.03.2022

© Author(s), 2022

REFERENCES

- [1] Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 984–994. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894415060085>
- [2] Fukalov A.A. [Problems on elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under influence of mass forces and internal pressure, and their applications]. *XI Vseros. s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [XI Russ. Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Kazan, KFU Publ., 2015, pp. 3951–3953 (in Russ.).

- [3] Zaytsev A.V., Fukalov A.A. Accurate analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry located gravitational forces field and their applications to problems of geomechanics. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 141–144 (in Russ.).
- [4] Agakhanov E.K. About development of complex decision methods of the problems of deformable solid body mechanics. *Herald of Daghestan State Technical University. Technical Sciences*, 2013, vol. 29, no. 2, pp. 39–45 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2013-29-2-39-45>
- [5] Sharafutdinov G.Z. Functions of a complex variable in problems in the theory of elasticity with mass forces. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, iss. 1, pp. 48–62.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.008>
- [6] Struzhanov V.V., Sagdullaeva D.A. On solution of elasticity theory boundary problems using method of orthogonal projections. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2004, no. 12, pp. 89–100 (in Russ.).
- [7] Kuz'menko V.I., Kuz'menko N.V., Levina L.V., et al. A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation. *Mech. Solids.*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 741–749.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419050108>
- [8] Penkov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces: theoretical and algorithmic support. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1711>
- [9] Ivanychev D.A. A method of boundary states in a solution to the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, no. 66, pp. 96–111 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/66/8>
- [10] Ivanychev D.A. The method of boundary states in the solution of the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, no. 61, pp. 45–60 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/61/5>
- [11] Ivanychev D.A. The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 49–62 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.05>
- [12] Ivanychev D.A. A boundary state method for solving a mixed problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2021, no. 71, pp. 63–77 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/71/6>
- [13] Ivanychev D.A., Levina E.Yu. The solution of boundary value problems of various types with consideration of volume forces for anisotropic bodies of revolution. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-57-70>

- [14] Ivanychev D.A., Levina E.Yu. Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, art. 012058. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012058>
- [15] Aleksandrov A.Ya., Solovyev Yu.I. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti [Spatial problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1978.
- [16] Lurye A.I. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti [Spatial problems of elasticity theory]. Moscow, GITTL Publ., 1955.
- [17] Penkov V.B., Penkov V.V. Boundary conditions method for solving linear mechanics problems. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137 (in Russ.).
- [18] Satalkina L.V. [Basis expansion of the state space with severe limitations on computations energy consumption]. *Sb. tez. dokl. nauch. konf. studentov i aspirantov LGTU* [Abs. Sci. Conf. of Students and Postgraduates]. Lipetsk, LSTU Publ., 2007, pp. 130–131 (in Russ.).
- [19] Lekhnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Elasticity theory of an anisotropic body]. Moscow, Nauka Publ., 1977.
- [20] Levina L.V., Novikova O.S., Penkov V.B. Full parametrical solution of the problem of the elasticity theory of a simply connected finite body. *Vestnik LGTU* [Vestnik LSTU], 2016, no. 2 (28), pp. 16–24 (in Russ.).

Ivanychev D.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of General Mechanics, Lipetsk State Technical University (Moskovskaya ul. 30, Lipetsk, 398055 Russian Federation).

Levina E.Yu. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Ivanychev D.A., Levina E.Yu. Describing non-axisymmetric elastic fields generated by volume forces in anisotropic solids of revolution. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 4 (103), pp. 22–38 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-22-38>