

**СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ  
ФУНКЦИИ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА  
ПРИ РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ  
С НЕЗАВИСИМОЙ ГРАНИЦЕЙ КОНТАКТА**

**М.П. Галанин**<sup>1,2</sup>

galan@keldysh.ru

**В.В. Лукин**<sup>1,2</sup>

vvlukin@gmail.com

**П.В. Соломенцева**<sup>1</sup>

gliznutsinapv@gmail.com

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

**Аннотация**

Рассмотрена контактная задача теории упругости в статической пространственно двумерной постановке без учета трения. Для дискретизации уравнений теории упругости применен метод конечных элементов с использованием треугольной неструктурированной сетки и линейных и квадратичных базисных функций. Для учета контактных граничных условий предложен модифицированный метод множителей Лагранжа с независимой границей контакта. Указанный метод подразумевает возможность строить границу контакта с необходимой для точности решения степенью гладкости и проводить независимую от сеток внутри контактирующих тел аппроксимацию функции множителей Лагранжа. Изучены различные виды аппроксимаций функции множителей Лагранжа — кусочно-постоянными, непрерывными кусочно-линейными функциями и кусочно-линейными функциями с разрывами на границах разностных ячеек. Проведены примеры тестовых расчетов как для задач с прямолинейной, так и с криволинейной границами контакта. В обоих случаях использование разрывных аппроксимаций функции множителей Лагранжа позволяет получить численное решение с меньшим числом искусственных осцилляций и более высокой скоростью сходимости при измельчении сетки. Показано, что точность численного решения может быть повышена путем более подробной дискретизации границы контакта без изменения сеток внутри контактирующих тел

**Ключевые слова**

*Контактная задача, метод множителей Лагранжа, независимая граница контакта, метод конечных элементов*

Поступила 13.04.2022

Принята 27.09.2022

© Автор(ы), 2022

---

*Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (грант № 22-21-00260)*

**Введение.** Решение контактных задач теории упругости — важная часть математического моделирования и исследования прочности инженерных конструкций, в связи с чем этот вопрос хорошо методически проработан [1–3]. В то же время обилие и разнообразие применяемых методов является следствием сложности задачи и неоднозначности путей ее численного решения. В частности, применение нашли методы множителей Лагранжа в различных модификациях [4, 5], метод штрафов [5], метод буферного слоя [6], метод Шварца [7, 8] и др. [9, 10].

Учет контактного взаимодействия тел состоит в выполнении двух фундаментальных условий (кинематического и силового): 1) непроникания тел друг в друга; 2) равенства силовых воздействий тел друг на друга. Более сложное для учета — второе условие, поскольку поверхностные напряжения зависят от производных решения и при численном решении точность их расчета невелика. Кроме того, проблематичен явный учет силовых условий, поэтому применение находят неявные методы типа множителей Лагранжа. Это связано в том числе с тем, что граница контакта заранее не известна и должна быть определена в процессе расчетов. Задача определения границы контакта осложняется тем, что тела представлены дискретными моделями — конечно-элементными сетками, чаще всего не имеющими общих узлов.

В этом случае один из распространенных подходов, описанный в [5] и использованный, например в [11–13], заключается в следующем: в паре контактирующих тел выбирается ведущее (master), сетка которого определяет границу контакта, и ведомое (slave), на поверхности которого ищутся сходственные к узлам тела master-точки. Получаемая так граница контакта не является гладкой и при этом учитывает деформирование прежде всего одного из тел — ведущего. Очевидно, такой подход является искусственным, например, в случае, когда тела близки по механическим свойствам.

В отличие от [11] в настоящей работе в качестве границы контакта (контактной поверхности или кривой) построена кривая между границами контактирующих тел. Ее можно получить различными способами, часть из которых описана в [14]. Введение независимой контактной поверхности также предполагает возможность использования различных способов аппроксимации функции множителей Лагранжа. Кусочно-постоянная аппроксимация рассмотрена в [14].

*Цель работы* — провести сравнение кусочно-постоянной аппроксимации функции множителей Лагранжа с кусочно-линейными непрерывной и разрывной аппроксимациями. Задачу контактного взаимодействия

упругих тел будем рассматривать в двумерной постановке. Для построения дискретной модели выберем метод конечных элементов (МКЭ) [15], а для учета контактных условий — метод множителей Лагранжа [5].

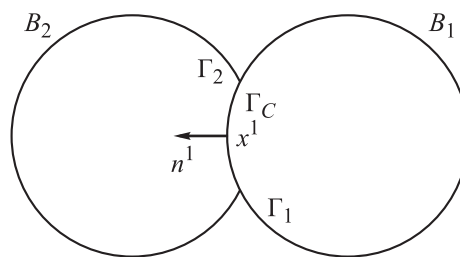
**Постановка задачи.** Рассмотрим контактную задачу теории упругости [5] для двух тел  $B_1$  и  $B_2$  (рис. 1). Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — части границ тел  $B_1$  и  $B_2$ , обращенные друг к другу. Зазор между точкой  $x^1$  на теле  $B_1$  и телом  $B_2$  есть  $g^1 = \min_{x^2 \in \Gamma^2} (x^1 - x^2) n^1$ , где  $n^1$  — внешняя нормаль к  $\Gamma_1$

в точке  $x^1$ . Условие непроникания тел друг в друга можно записать в виде

$$g^1 \geq 0 \quad \forall x^1 \in \Gamma_1. \quad (1)$$

Граница контакта  $\Gamma_C$  состоит из точек, для которых неравенство (1) превращается в равенство.

На поверхности  $\Gamma_C$  появляются дополнительные поверхностные силы  $t$ , причем справедливы условия (в случае отсутствия трения)  $t_n = t_n \leq 0$ ,  $t_\tau = 0$ , где  $t_n$  — нормальная компонента контактной силы;  $t_\tau$  — касательная компонента;  $n$ ,  $\tau$  — внешняя нормаль и касательная к контактной границе.



**Рис. 1.** Схема контакта упругих тел под действием внешней нагрузки

**Математическая модель.** Математическая модель двумерной контактной задачи теории упругости в статической плоскодеформированной постановке включает в себя следующие соотношения [11, 16].

1. Соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  — относительные удлинения;  $\gamma_{xy}$  — относительная деформация сдвига;  $u = (u_x(M), u_y(M))^T$  — вектор перемещений в точке  $M$ . Введя обозначение  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0,5\gamma_{xy}$ , можно определить тензор деформации в индексном виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2.$$

2. Обобщенный закон Гука (с учетом суммирования по повторяющимся индексам)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих коэффициентов. В случае плоских деформаций тензор упругих коэффициентов имеет вид

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

### 3. Дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $b_i$  — компоненты вектора объемных сил.

4. Кинематические и силовые граничные условия в различных комбинациях.

### 5. Условия на контактной границе

$$u_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = u_n^{(2)}|_{\Gamma_C}, \quad \sigma_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = \sigma_n^{(1)}|_{\Gamma_C},$$

где  $u_n^{(i)}$ ,  $\sigma_n^{(i)}$  — нормальные перемещения и нормальные напряжения точек  $i$ -го тела,  $i = 1, 2$ .

**Численный метод.** Для записи дискретизированных уравнений математической модели используем МКЭ на треугольной неструктурированной сетке с базисными функциями первого и второго порядков [15, 17] и принципом минимизации потенциальной энергии системы. Для начала запишем полную потенциальную энергию системы тел (при условии отсутствия массовых сил):

$$\Pi(u) = U(u) - W(u) = \frac{1}{2} \int_B \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} \{u\}^T \{t\} d\Gamma, \quad (2)$$

где  $U$  — потенциальная энергия деформации;  $W$  — потенциальная энергия внешних нагрузок;  $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x)^T$  — вектор деформаций;  $[C]$  — матрица упругих коэффициентов;  $\{u\}$  — поле возможных перемещений, удовлетворяющее граничным условиям;  $\{t\}$  — вектор поверхностных сил, соответствующих внешним нагрузкам.

Для учета контактных условий используем метод множителей Лагранжа [1, 5] и прибавим к потенциальной энергии системы (2) потенциал сил контактного взаимодействия

$$W_C = - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma, \quad (3)$$

где  $\Lambda$  — функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил;  $x^{(i)} = X^{(i)} + u^{(i)}$  — актуальные положения соответствующих сходственных точек тел на поверхности контакта,  $X^{(i)}$ ,  $u^{(i)}$  — исходные положения и перемещения сходственных точек,  $i = 1, 2$ .

Для вывода определяющей системы уравнений запишем условия минимума полученной модифицированной потенциальной энергии системы  $\Pi_M$ , равной сумме (2) и (3):

$$\begin{aligned} \delta \Pi_M = & \int_B \delta \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} \delta \{u\}^T \{t\} d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_C} \delta \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $u$  и  $\Lambda$  независимы, получим систему уравнений вида

$$\int_B \delta \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} \delta \{u\}^T \{t\} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma = 0, \quad (4)$$

$$- \int_{\Gamma_C} \delta \Lambda \cdot ((X^{(1)} + u^{(1)}) - (X^{(2)} + u^{(2)})) d\Gamma = 0. \quad (5)$$

Далее проведем стандартную аппроксимацию перемещений  $u$  в виде разложения по линейным или квадратичным базисным функциям на треугольной неструктурированной сетке [15]. Выберем некоторую аппроксимацию функции множителей Лагранжа

$$\Lambda \approx \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \psi_i(x), \quad (6)$$

где  $\lambda_i$  — коэффициенты разложения, входящие в итоговую систему линейных алгебраических уравнений в качестве неизвестных наравне с коэффициентами разложения  $u$  (здесь и далее будем называть их множителями Лагранжа);  $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{N_\lambda}$  — некоторый функциональный базис, заданный на поверхности контакта  $\Gamma_C$ .

Интеграл (3) можно аппроксимировать суммой

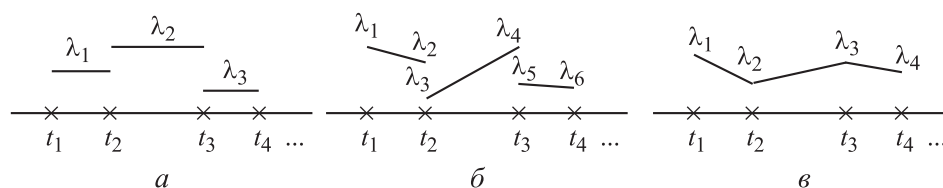
$$\tilde{W}_C = - \sum_{k=1}^{N_q} \sum_{i=1}^{N_\lambda} c_k \lambda_i \psi_i(x_k) (x^{(1)}(x_k) - x^{(2)}(x_k)). \quad (7)$$

Здесь  $N_q$  — число узлов квадратурной формулы;  $c_k$ ,  $x_k$  — ее веса и узлы;  $x^{(i)}(x_k)$ ,  $i = 1, 2$  — актуальные положения сходственных точек на контактирующих телах, соответствующие узлам квадратурной формулы.

Для вычисления (7) может быть выбрано произвольное приближение  $\tilde{\Gamma}_C$  к границе контакта. Несколько способов построения такой кривой приведено в [14]. Они основаны на построении кривой по облаку точек — граничных узлов сеток в телах  $B_1$  и  $B_2$ , проникающих внутрь другого тела на очередной итерации решения системы (4), (5). В качестве кривой выбирается фрагмент параметрически заданного кубического сплайна, коэффициенты которого можно найти решением задачи минимизации отклонения получаемой кривой  $\tilde{\Gamma}_C$  от выбранного облака точек. После построения  $\tilde{\Gamma}_C$  аппроксимацию  $\Lambda$  суммой (6) можно проводить любым удобным способом независимо от дискретизации тел  $B_1$ ,  $B_2$  и аппроксимации перемещений  $u$ .

**Варианты аппроксимации функции множителей Лагранжа.** Функция множителей Лагранжа  $\Lambda$  в (6) может быть задана различными способами. Для МКЭ стандартной является аппроксимация решения непрерывными кусочно-линейными функциями. В то же время, поскольку функция множителей Лагранжа имеет смысл распределения нормальных контактных напряжений, целесообразно аппроксимировать их в том пространстве, которому принадлежат производные решения (перемещений). В случае использования для расчета перемещений конечных элементов первого порядка это кусочно-постоянные функции, в случае элементов второго порядка — кусочно-линейные функции с разрывами на ребрах элементов.

Схематично виды аппроксимации функции множителей Лагранжа показаны на рис. 2. Здесь  $t$  — внутренний параметр кривой, представляющей границу контакта. Эта граница разбивается узлами  $t_i$  на отрезки. На каждый отрезок приходится один или два множителя Лагранжа в случае разрывной аппроксимации функции  $\Lambda$ . В случае непрерывной кусочно-линейной аппроксимации число множителей  $\lambda_i$  совпадает с числом узлов разбиения. Другие подробности реализации вычислительного алгоритма с независимой границей контакта описаны в [14].

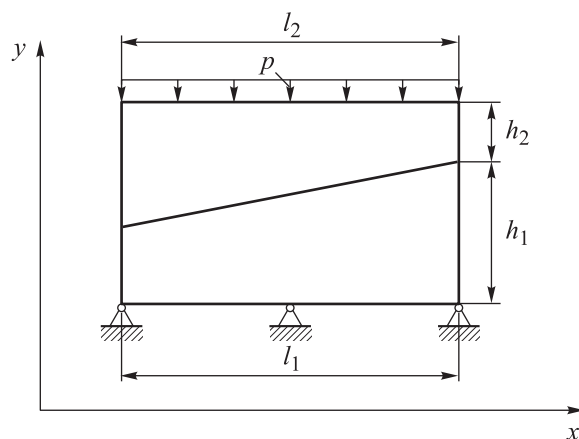


**Рис. 2.** Виды аппроксимаций функции множителей Лагранжа:

*a* — кусочно-постоянная; *б* — разрывная кусочно-линейная;  
*в* — непрерывная кусочно-линейная

**Тестирование алгоритма.** В целях демонстрации предложенного подхода для решения задач контактного взаимодействия рассмотрим несколько тестовых примеров.

*Пример 1. Процесс деформирования системы из двух брусьев с наклонной границей контакта.* Нижний брусок (рис. 3) лежит на гладком столе, на верхней границе верхнего бруска задана распределенная нагрузка  $p$ . Граница контакта в недеформированном состоянии прямолинейна и наклонена под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = 1/6$ . Левая граница брусьев закреплена по вертикали, правая — свободна. Тела имеют следующие безразмерные параметры: длины брусьев  $l_1 = l_2 = 6$ , высоты правого края  $h_1 = 4$ ,  $h_2 = 2$ , высота левого края нижнего бруска  $h_3 = 3$ . Материал обоих брусьев имеет упругие параметры  $\nu = 0,227$ ,  $E = 7000$ . Распределенная нагрузка  $p = 1$ .



**Рис. 3.** Система из двух брусьев с наклонной границей контакта

Для расчета использованы треугольные сетки, не совпадающие на границе контакта. Общее число ячеек обеих сеток 16 336. Расчеты проведены с использованием кусочно-постоянной и кусочно-линейной разрывной



и непрерывной аппроксимаций функции множителей Лагранжа. В первом случае использованы конечные элементы первого порядка, в остальных — второго. Распределения нормальных перемещений и напряжений в указанных случаях для различного числа отрезков разбиения границы контакта показаны на рис. 4. Во всех случаях перемещения сходятся при увеличении числа отрезков разбиения. В то же время при малом числе отрезков каждый раз заметны различия представленных графиков, что свидетельствует о приближенном выполнении кинематического контактного условия.

Наибольшую информацию о качестве аппроксимации решения дает сопоставление нормальных контактных напряжений  $\sigma_n$ , полученных различными методами. В углах брусков находятся концентраторы напряжений, что приводит к существенному различию напряжений на верхнем и нижнем телах на краях графиков.

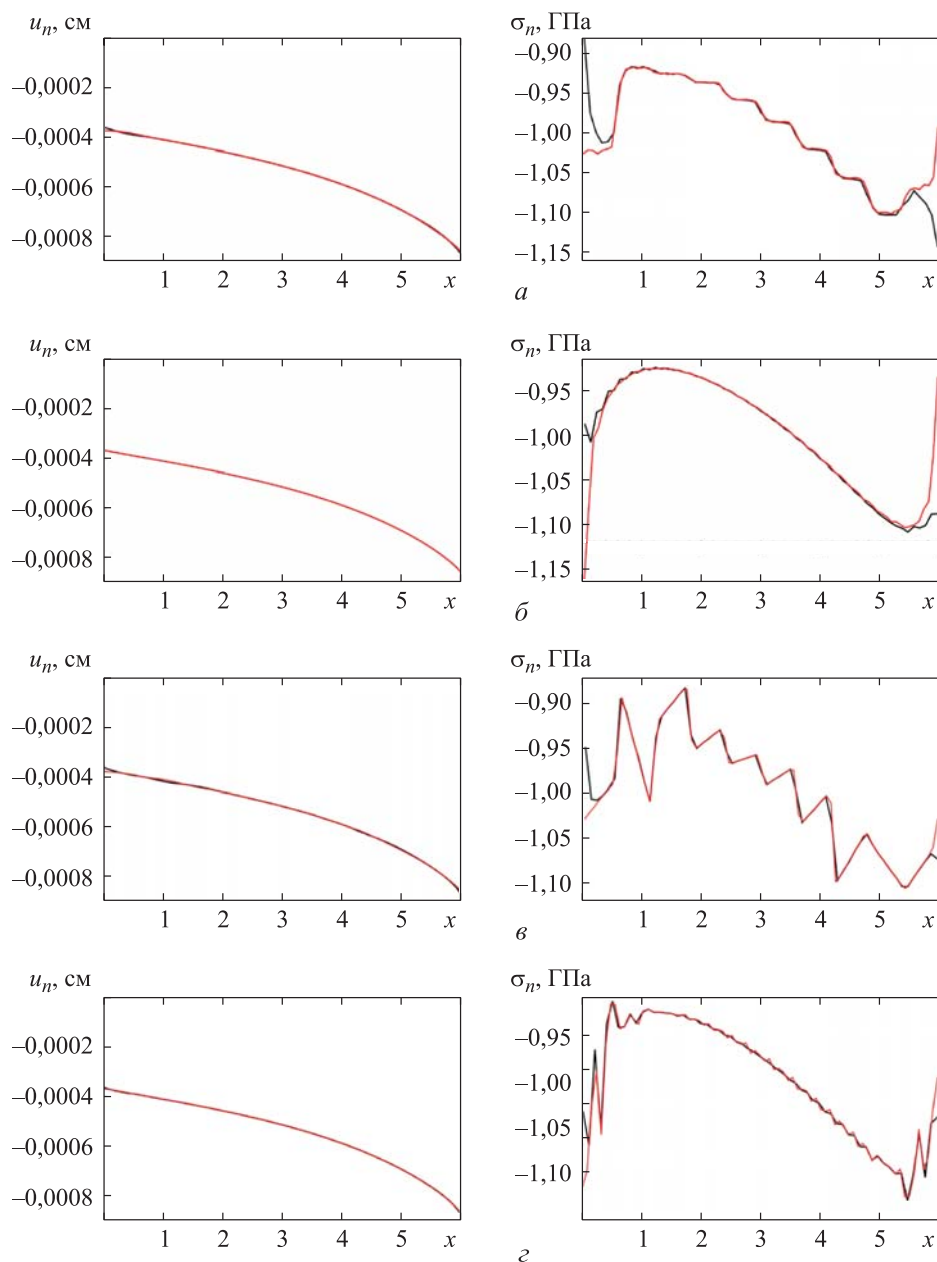
Напряжения в середине границы во всех случаях близки на верхнем и нижнем телах. При этом результаты, полученные с использованием непрерывной кусочно-линейной аппроксимации  $\Lambda$  (рис. 4, в), содержат осцилляции напряжений, которые не исчезают даже при увеличении числа множителей Лагранжа (рис. 4, з). В свою очередь, наличие разрывов на границах ячеек разбиения границы контакта позволяет свести область осцилляции напряжений к окрестности концентраторов напряжений (рис. 4, д) или избежать искусственных осцилляций (рис. 4, е).

Различие результатов, полученных с использованием кусочно-постоянной и кусочно-линейной разрывных аппроксимаций  $\Lambda$  (рис. 4, а–з), соответствует различиям порядков применяемых методов. В то же время оба метода избавлены от паразитных осцилляций нормальных напряжений в середине границы контакта, что указывает на важность применения именно разрывной аппроксимации функции множителей Лагранжа. Отметим, что и напряжения во внутренних ячейках сетки являются разрывными.

*Пример 2. Процесс деформирования брусков с нелинейной границей контакта.* Граница контакта представляет собой не отрезок прямой, а фрагмент параболы (рис. 5), заданной уравнением  $y(x) = 4 + x - 0,25x^2$ ,  $x \in [0; 4]$ .

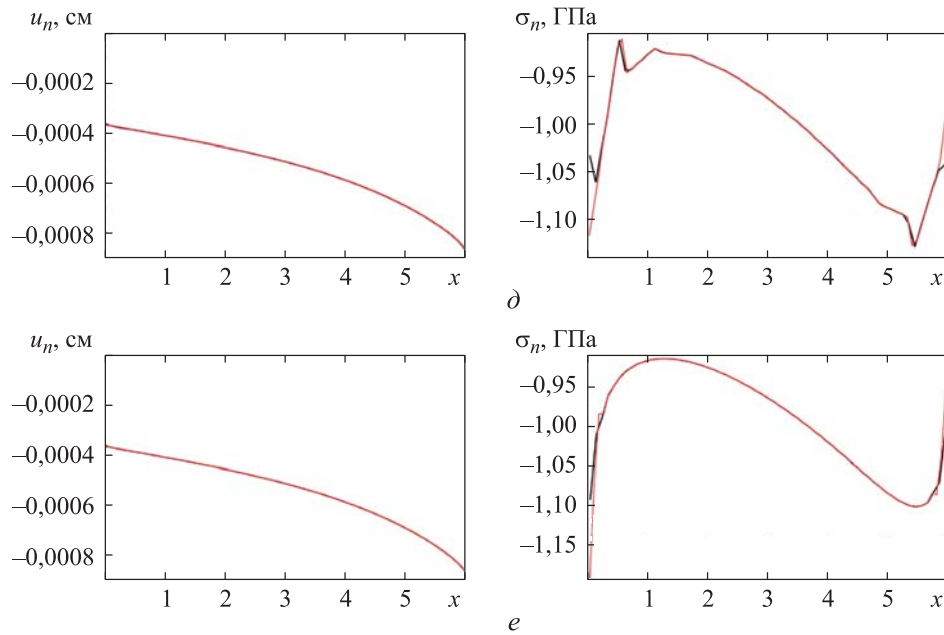
Длина брусков  $l_1 = l_2 = 6$ , высота левого и правого края брусков  $h_1 = h_2 = 4$ . Материал брусков и внешняя нагрузка те же, что и в предыдущем примере. Рассмотрен случай, когда сетки на границе контакта совпадают, общее число конечных элементов 46 990.





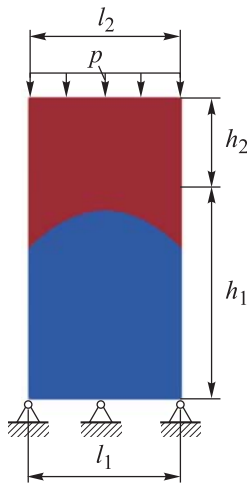
**Рис. 4 (начало).** Распределения нормальных к границе контакта компонентов вектора перемещений  $u_n$  и напряжений  $\sigma_n$ :

- $a, б$  — расчет с использованием кусочно-постоянной аппроксимации ( $a$  — 10 отрезков разбиения;  $б$  — 60 отрезков разбиения);  
 $в, г$  — расчет с использованием кусочно-линейной непрерывной аппроксимации ( $в$  — 10 отрезков разбиения;  $г$  — 30 отрезков разбиения)



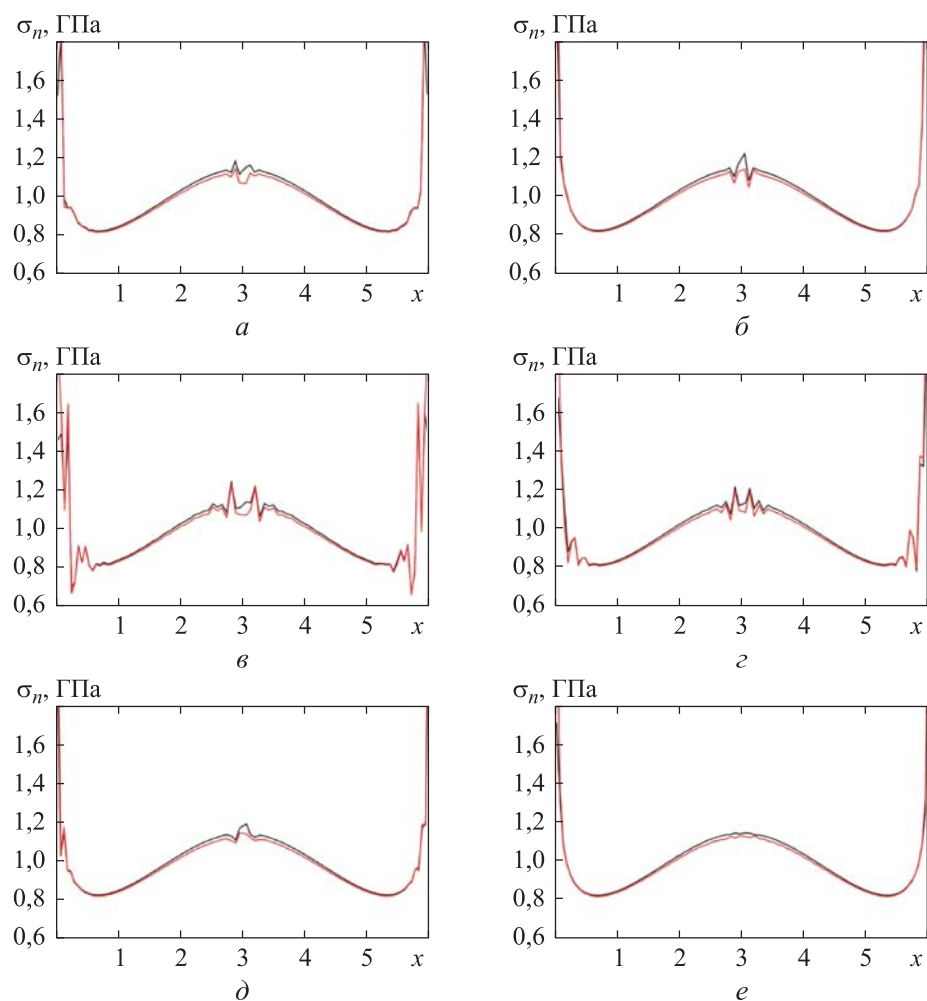
**Рис. 4 (окончание).** Распределения нормальных к границе контакта компонентов вектора перемещений  $u_n$  и напряжений  $\sigma_n$ :

$\delta, \epsilon$  — расчет с использованием кусочно-линейной разрывной аппроксимации ( $\delta$  — 10 контактных отрезков;  $\epsilon$  — 30 контактных отрезков); линии черного и красного цвета обозначают нижнее и верхнее тела



**Рис. 5.** Система из двух брусков с нелинейной границей контакта

Зависимости нормальных к границе контакта напряжений  $\sigma_n$  для различных аппроксимаций функции множителей Лагранжа и числа отрезков разбиения границы приведены на рис. 6. Во всех случаях численное решение испытывает трудности в окрестностях концентраторов напряжений и около вершины параболы, где кривизна границы контакта максимальна. В этих местах в большинстве расчетов наблюдаются паразитные осцилляции решения, причем измельчение разбиения контактной границы не приводит к их существенному уменьшению (рис. 6, а–г). Только кусочно-линейная разрывная аппроксимация функции множителей Лагранжа при большом числе отрезков разбиения позволяет принципиально уменьшить амплитуду этих осцилляций (рис. 6, д), но не приводит к полной ликвидации зазора между напряжениями на нижнем и верхнем телах (рис. 6, е).



**Рис. 6.** Распределения нормальных к границе контакта напряжений  $\sigma_n$  при использовании кусочно-постоянной (а, б), непрерывной кусочно-линейной (в, г) и разрывной кусочно-линейной (д, е) аппроксимаций:  
а, в, д — для 60 отрезков разбиения границы контакта;  
б, г, е — для 100 отрезков разбиения границы контакта;  
линии черного и красного цвета обозначают нижнее и верхнее тела

Отметим, что, как и в случае линейной границы, наибольшее число осцилляций испытывает решение, полученное с использованием кусочно-линейной непрерывной аппроксимации функции  $\Lambda$  (см. рис. 6, в, г), даже с учетом того, что задача упругости внутри тел решалась с использованием конечных элементов второго порядка. Этот результат подчеркивает важность отказа от непрерывной реконструкции  $\Lambda$  на отрезках разбиения контактной границы.

**Заключение.** Рассмотрена модификация метода множителей Лагранжа с использованием независимой от конечно-элементных сеток в контактирующих телах границы контакта. Алгоритм метода описан для случая двумерной пространственной постановки стационарной контактной задачи теории упругости без трения. Для решения уравнений теории упругости использован МКЭ на треугольной неструктурированной сетке с базисными функциями различных порядков. Независимая граница контакта может быть построена с учетом требований гладкости и позволяет использовать различные варианты аппроксимации функции множителей Лагранжа. Рассмотрены три варианта такой аппроксимации: 1) кусочно-постоянная; 2) непрерывная кусочно-линейная; 3) кусочно-линейная с разрывами на границах разностных ячеек.

Приведены тестовые примеры, причем в примере 1 для аппроксимации функции множителей Лагранжа при дискретизации уравнений теории упругости использован МКЭ первого порядка, а в двух других — второго порядка. Расчеты показали, что точность решения может быть повышена путем измельчения сетки на границе контакта без перестроения сеток в контактирующих телах. При этом наименьшие искусственные осцилляции и наиболее высокую скорость сходимости решения показал вариант с использованием разрывной кусочно-линейной аппроксимации функции множителей Лагранжа. К нему качественно близок вариант с кусочно-постоянной аппроксимацией, но он обладает меньшей скоростью сходимости. Вариант с использованием непрерывной (классической для МКЭ) кусочно-линейной аппроксимации в наибольшей степени подвержен развитию нефизических осцилляций нормальных контактных напряжений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск, СО РАН, 2000.
- [2] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., Мир, 1989.
- [3] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов. *Изв. РАН. МТТ*, 2005, № 1, с. 45–87.
- [4] Papadopoulos P., Solberg J.M. A Lagrange multiplier method for the finite element solution of frictionless contact problems. *Math. Comp. Model.*, 1998, vol. 28, iss. 4-8, pp. 373–384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00128-9](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00128-9)
- [5] Wriggers P. *Computational contact mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
- [6] Бабин А.П., Зернин М.В. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды. *Изв. РАН. МТТ*, 2009, № 4, с. 84–107.

- [7] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел. *Прикладная механика*, 1980, т. 16, № 1, с. 13–18.
- [8] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С. и др. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2015, т. 55, № 8, с. 1429–1443.  
DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915080104>
- [9] Neto A.G., Wriggers P. Computing pointwise contact between bodies: a class of formulations based on master–master approach. *Comput. Mech.*, 2019, vol. 64, no. 3, pp. 585–609. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-019-01680-9>
- [10] Neto A.G., Wriggers P. Numerical method for solution of pointwise contact between surfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2020, vol. 365, art. 112971.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112971>
- [11] Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В. и др. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2015, № 89.
- [12] Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В. и др. Сравнение вариантов метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017, № 5 (74), с. 35–48.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2017-5-35-48>
- [13] Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия элементов твёрдого тела с учетом ползучести на основе mortar-метода. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2020, № 110.  
DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-110>
- [14] Лукин В.В., Соломенцева П.В. Модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей для моделирования контакта упругих тел. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2020, № 70.  
DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-70>
- [15] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975.
- [16] Демидов С.П. Теория упругости. М., Высш. шк., 1979.
- [17] Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск, Удмуртский ун-т, 2011.

**Галанин Михаил Павлович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Лукин Владимир Владимирович** — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4); доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Соломенцева Полина Владимировна** — лаборант, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Галанин М.П., Лукин В.В., Соломенцева П.В. Сравнение способов аппроксимации функции множителей Лагранжа при решении контактных задач методом с независимой границей контакта. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 6 (105), с. 17–32. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-17-32>

**COMPARISON OF THE LAGRANGE MULTIPLIERS FUNCTION APPROXIMATION METHODS IN SOLVING CONTACT PROBLEMS BY THE INDEPENDENT CONTACT BOUNDARY TECHNIQUE**

**M.P. Galanin**<sup>1,2</sup>

galan@keldysh.ru

**V.V. Lukin**<sup>1,2</sup>

vvlukin@gmail.com

**P.V. Solomentseva**<sup>1</sup>

gliznutsinapv@gmail.com

<sup>1</sup>**Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation**

<sup>2</sup>**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

The paper considers the contact problem of the elasticity theory in a static spatial two-dimensional formulation without considering friction. For discretization of the elasticity theory equations, the finite element method was introduced using a triangular unstructured grid and linear and quadratic basis functions. To account for the contact boundary conditions, a modified method of Lagrange multipliers with independent contact boundary is proposed. This method implies the ability to construct a contact boundary with the smoothness degree required for the solution precision and to execute approximation of the Lagrange multiplier function independent of the grids inside the contacting bodies. Various types of the Lagrange multiplier function approximations were studied, including piecewise constant, continuous piecewise linear functions and piecewise linear functions with discontinuities at the difference cells boundaries. Examples of test calculations are provided both for problems with rectilinear and curvilinear contact boundaries. In both cases, the use of discontinuous approximations of the Lagrange multiplier function makes it possible to obtain a numerical solution with fewer artificial oscillations and higher rate of convergence at the grid refinement. It is shown that the

**Keywords**

*Contact problem, Lagrange multiplier method, independent contact boundary, finite element method*

numerical solution precision could be improved Received 13.04.2022  
by more detailed discretization of the contact boundary Accepted 27.09.2022  
without changing the grids inside the contacting bodies © Author(s), 2022

---

*The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation  
(grant no. 22-21-00260)*

## REFERENCES

- [1] Korobeynikov S.N. Nelineynoe deformirovanie tverdykh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2000.
- [2] Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge Univ. Press, 1985.
- [3] Burago N.G., Kukudzhanov V.N. A review of contact algorithms. *Mech. Solids*, 2005, vol. 40, no. 1, pp. 35–71.
- [4] Papadopoulos P., Solberg J.M. A Lagrange multiplier method for the finite element solution of frictionless contact problems. *Math. Comp. Model.*, 1998, vol. 28, iss. 4-8, pp. 373–384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00128-9](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00128-9)
- [5] Wriggers P. Computational contact mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
- [6] Babin A.P., Zernin M.V. Finite-element simulation of contact interaction with the use of concepts of contact pseudomedium mechanics. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no. 4, pp. 565–584. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654409040086>
- [7] Tsvik L.B. Priority principle in conjugating and contact problems of deformable bodies. *Prikladnaya mekhanika*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 13–18 (in Russ.).
- [8] Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S., et al. Application of the Schwarz alternating method for simulating the contact interaction of a system of bodies. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 8, pp. 1393–1406. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542515080102>
- [9] Neto A.G., Wriggers P. Computing pointwise contact between bodies: a class of formulations based on master–master approach. *Comput. Mech.*, 2019, vol. 64, no. 3, pp. 585–609. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-019-01680-9>
- [10] Neto A.G., Wriggers P. Numerical method for solution of pointwise contact between surfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2020, vol. 365, art. 112971. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112971>
- [11] Galanin M.P., Gliznutsina P.V., Lukin V.V., et al. Lagrange multiplier method implementations for two-dimensional contact problems. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2015, no. 89 (in Russ.).
- [12] Galanin M.P., Gliznutsina P.V., Lukin V.V., et al. Comparison of Lagrange multiplier method implementation for solving two-dimensional contact problems. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2017, no. 5 (74), pp. 35–48 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2017-5-35-48>



[13] Aronov P.S., Galanin M.P., Rodin A.S. Mathematical modeling of the contact interaction of the fuel element with creep using the mortar-method. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2020, no. 110 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-110>

[14] Lukin V.V., Solomentseva P.V. Modification of the Lagrange multiplier method with a detached contact boundary for modeling the contact of elastic bodies. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 2020, no. 70 (in Russ.).

DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-70>

[15] Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite elements method in physics]. Moscow, Mir Publ., 1975.

[16] Demidov S.P. Teoriya uprugosti [Elasticity theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979.

[17] Sagdeeva Yu.A., Kopysov S.P., Novikov A.K. Vvedenie v metod konechnykh elementov [Introduction to finite elements method]. Izhevsk, Udmurt Univ. Publ., 2011.

**Galanin M.P.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Leading Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miuskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Lukin V.V.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miuskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Solomentseva P.V.** — Laboratory Assistant, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miuskaya ploshchad 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Galanin M.P., Lukin V.V., Solomentseva P.V. Comparison of the Lagrange multipliers function approximation methods in solving contact problems by the independent contact boundary technique. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 6 (105), pp. 17–32 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-17-32>