УДК 517.984.46 DOI: 10.18698/1812-3368-2023-3-4-19

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ДВУМЯ РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ (СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ)

А.М. Головина amgolovina@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Лапласиан с парой разбегающихся возмущений исследован в двумерном пространстве. Под возмущениями понимаются вещественные финитные непрерывные потенциалы. Изучен дискретный спектр возмущенного лапласиана при увеличении расстояния между потенциалами. Рассмотрено наличие его собственных значений и собственных функций, которые им соответствуют, при различных случаях кратностях предельного собственного значения. Первым случаем рассматриваемой кратности является двукратное предельное собственное значение. Под этим понимается простое и изолированное собственное значение лапласиана с первым потенциалом, а также простое и изолированное собственное значение лапласиана со вторым потенциалом. Второй рассматриваемый случай — случай произвольной кратности предельного собственного значения. Под этим понимается собственное значение лапласиана с первым потенциалом произвольной кратности и собственное значение лапласиана со вторым потенциалом также произвольной кратности. В обоих случаях (кратности два и произвольной) построены первые члены формальных асимптотических разложений собственных значений и собственных функций возмущенного лапласиана, которые соответствуют данным собственным значениям. Продемонстрирована сложная экспоненциально-степенная структура построенных асимптотик. В указанных случаях показана симметрия относительно нуля первых поправок асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана

Ключевые слова

Лапласиан, разбегающиеся возмущения, асимптотика, собственные значения, собственные функции

Поступила 12.10.2022
Принята 13.12.2022

Введение. Задачи с разбегающимися возмущениями имеют давнюю историю и достаточно активно исследуются, см., например, [1–19]. Вначале внимание исследователей (см. [1–9]) было сконцентрировано на возмущении с использованием вещественных потенциалов оператора Шредингера. Постепенно задачи усложнялись. Вместо вещественных потенциалов в работах стали встречаться произвольные абстрактные операторы [10–15]. В более общей постановке задачи речь идет об эллиптических дифференциальных операторах четного порядка в произвольном пространстве [12, 13]. В упомянутых работах изучены резольвента, изолированные собственные значения и собственные функции, которые этим значениям соответствуют. Результаты работ подробно описаны в [14]. Объектами исследований также часто были собственные значения и резонансы, которые возникают из края существенного спектра предельного оператора (см. [8, 9, 15–17]). Описаны случаи существования подобного рода резонансов и собственных значений, построены асимптотики.

Возмущенный лапласиан в случае двукратного предельного собственного значения изучен в [5–7, 10–12, 18, 19]. Под двукратным собственным значением в [5–7, 12, 19] понималось следующее: простое и изолированное собственное значение лапласиана с первым потенциалом, а также простое и изолированное собственное значение лапласиана со вторым потенциалом. Лапласиан в [5] возмущался кулоновскими потенциалами, в [6, 7] — убывающими на бесконечности потенциалами, в [12, 13] — произвольными операторами, в [18, 19] — финитными потенциалами. Результатами перечисленных работ являются первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций, которые им соответствуют. Под двукратным предельным собственным значением в [12, 18] понималось совершенно другое. Предполагалось, что предельное собственное значение — это двукратное собственное значение лапласиана только с первым потенциалом. Представление для собственных значений возмущенного лапласиана и дифференциального оператора четного порядка, а также собственных функций, которые им соответствуют в виде равномерно сходящихся рядов, удалось получить в [5, 12]. Первые члены асимптотик возмущенного лапласиана на плоскости в случае двукратного предельного собственного значения (двукратное собственное значение лапласиана только с первым потенциалом) построены в [18]. Экспоненциальная и экспоненциально-степенная структуры асимптотик в зависимости от размерности пространства и распределения кратности в двукратном предельном собственном значении показаны в [18, 19]. Эффект симметрии первых поправок асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана относительно нуля также был установлен в [6, 10, 11, 18, 19].

В настоящей работе лапласиан с парой разбегающихся возмущений исследован в двумерном пространстве. Возмущается лапласиан с помощью финитных непрерывных потенциалов. Изучены собственные значения возмущенного лапласиана при увеличении расстояния между возмущающими потенциалами. Рассмотрено наличие собственных значений возмущенного лапласиана и собственных функций, которые им соответствуют в двух различных случаях кратности предельного собственного значения. Первый случай кратности — двукратное предельное собственное значение. Под этим понимается простое и изолированное собственное значение лапласиана с первым потенциалом, а также простое и изолированное собственное значение лапласиана со вторым потенциалом. Второй случай — случай произвольной кратности предельного собственного значения. Под ним понимается собственное значение лапласиана с первым потенциалом произвольной кратности и собственное значение лапласиана со вторым потенциалом также произвольной кратности. В обоих случаях кратности (два и произвольной) построены первые члены формальных асимптотических разложений собственных значений и собственных функций возмущенного лапласиана, которые соответствуют данным собственным значениям. Показана также симметрия относительно нуля первых поправок асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана. Продемонстрирована сложная экспоненциально-степенная структура построенных асимптотик. Аналогичная задача для случая двукратного предельного собственного значения рассмотрена в [18]. Однако под двукратным предельным собственным значением понималось двукратное собственное значение лапласиана только с первым потенциалом. Еще раз отметим, что в настоящей работе под двукратным предельным собственным значением подразумевается простое и изолированное собственное значение лапласиана с первым потенциалом, а также простое и изолированное собственное значение лапласиана со вторым потенциалом, которое в сумме дает кратность два предельному собственному значению. Такое распределение предельных собственных значений влияет на структуру асимптотик. Именно поэтому здесь и в [18] структура асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана и асимптотик соответствующих им собственных функций в двумерном пространстве значительно отличаются друг от друга.

Постановка задачи. В двумерном пространстве R^2 определим прямоугольные декартовы координаты $x = (x_1, x_2)$ и параметр $\ell = (\ell_1, \ell_2)$, для которого справедливо условие $|\ell| \to \infty$. Рассмотрим в пространстве $L_2(R^2)$ возмущенный оператор:

$$H_\ell = -\Delta + L_+(\cdot - \ell) + L_-(\cdot + \ell), \quad D(H_\ell) = W_2{}^2(R^2),$$

где $L_\pm$ — вещественные финитные непрерывные потенциалы. Введем еще пару операторов $H_\mp = -\Delta + L_\mp$, $D(H_\mp) = W_2{}^2(R^2)$ в пространстве $L_2(R^2)$. Последние операторы будем называть предельными, так как в [13] показано, что при увеличении расстояния между возмущениями оператор H_ℓ расщепляется на два оператора H_- и H_+.

Как уже было отмечено, здесь речь идет о собственных значениях возмущенного лапласиана в случае кратного предельного собственного значения. Рассмотрим случай двукратного предельного собственного значения.

Пусть λ_0 — простое и изолированное собственное значение каждого оператора H_- и H_+, $\psi_{0,\mp}(x)$ — собственные функции, соответствующие данному собственному значению. Рассмотрим уравнения на собственные значения предельных операторов $(H_\mp - \lambda_0)\psi_{0,\mp} = 0$. Перепишем эти уравнения в виде

$$(-\Delta - \lambda_0)\psi_{0,\mp} = -L_\mp \psi_{0,\mp}.$$

Эти уравнения являются уравнениями Гельмгольца с локализованной правой частью. Решение этих уравнений — функция

$$\psi_{0,\mp} = \int_{R^2} G(|x-y|)\, f_\mp(y) dy,$$

где $G(|x-y|)$ — функция Грина оператора Гельмгольца; $f_\mp(y) = -L_\mp \psi_{0,\mp}(y)$. В двумерном пространстве функцию Грина можно представить через функции Ханкеля в виде

$$G(|x-y|) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(i|x-y|),$$

где $H_0^{(1)}(i|x-y|)$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Этот факт доказан в [10]. Согласно [20, Дополнение II, часть I, 3.1], функция Ханкеля на бесконечности ведет себя следующим образом:

$$H_0^{(1)}(i|x-y|) = \sqrt{\frac{2}{\pi|x-y|}} e^{-i(|x-y|-\pi/4)} + O\left(|x-y|^{-1} e^{-|x-y|}\right).$$

Таким образом, собственные функции предельных операторов $H_\mp$ в двумерном пространстве на бесконечности имеют вид

$$\psi_{0,\mp}=C_0^{\mp}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|x|}|x|^{-1/2}\left(1+\frac{(x,\overrightarrow{A^{\mp}})}{|x|^2}\right)+O\left(|x|^{-1}e^{-|x|\sqrt{-\lambda_0}}\right), \tag{1}$$

где $C_0^{\mp}$ — некоторые константы; $|x|\to\infty$; $\overrightarrow{A^{\mp}}=\left(A_1^{\mp},A_2^{\mp}\right)$ — вектор, с компонентами $A_i^{\mp}=\int\limits_{Q_{\mp}}y_i f_{\mp}(y)dy$, $i=1, 2$, множества $Q_{\mp}$ — носители функций $f_{\mp}(y)$.

Цель работы — построение первых членов формального асимптотического разложения собственных значений и собственных функций, которые ему соответствуют, возмущенного лапласиана в случае кратного предельного собственного значения.

Основные результаты и их доказательство. Теорема 1. *При достаточно больших $|\ell|$ формальные асимптотики собственных значений, сходящихся к предельному собственному значению λ_0, и асимптотики собственных функций, которые ему соответствуют, возмущенного лапласиана в двумерном пространстве имеют вид:*

$$\lambda_\ell^{(j)}=\lambda_0+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}|\ell|^{-1/2}\,\Lambda_1^{(j)}(\ell)+\ldots; \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\psi_\ell^{(j)}={}&f_{0,-}^{(j)}\psi_{0,-}(\cdot+\ell)+f_{0,+}^{(j)}\psi_{0,+}(\cdot-\ell)+\\&+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}|\ell|^{-1/2}\left(\psi_{1,-}^{(j)}(\cdot+\ell)+\psi_{1,+}^{(j)}(\cdot-\ell)\right)+\\&+e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}|\ell|^{-1/2}\left(\psi_{2,-}^{(j)}(\cdot+\ell)+\psi_{2,+}^{(j)}(\cdot-\ell)\right)+\ldots,\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\Lambda_1^{(j)}(\ell)=\pm\sqrt{b_{12}b_{21}}; \tag{4}$$

$$\psi_{1,\mp}^{(j)}(x)=C_1^{(j)}C_0^{\mp}f_{0,\pm}^{(j)}(H_{\mp}-\lambda_0)^{-1}\left(L_{\pm}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}\frac{(x,\ell)}{2|\ell|^2}}\left(1+\frac{(\ell,\vec{A})}{2|\ell|^2}-\frac{(x,\ell)}{4|\ell|^2}\right)\right); \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\psi_{2,\mp}^{(j)}(x)={}&C_2^{(j)}C_0^{\mp}f_{0,\mp}^{(j)}(H_{\mp}-\lambda_0)^{-1}\times\\&\times\left(L_{\mp}(H_{\pm}-\lambda_0)^{-1}\left(L_{\pm}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}\frac{(x,\ell)}{2|\ell|^2}}\left(1+\frac{(\ell,\vec{A})}{2|\ell|^2}-\frac{(x,\ell)}{4|\ell|^2}\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $C_1^{(j)},\ C_2^{(j)}$ *— некоторые константы,* $j=1,2;$ *операторы* $(H_{\mp}-\lambda_0)^{-1}$ *действуют каждый в ортогональном дополнении к своей собственной функции* $\psi_{0,\mp}(x);$ $\Lambda_1^{(j)}(\ell)$ *— собственные значения матрицы*

$$B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

с собственным вектором

$$f_0^{(j)}=\begin{pmatrix} f_{0,-}^{(j)} \\ f_{0,+}^{(j)} \end{pmatrix};$$

$$b_{12}=$$

$$=C_0^{+}f_{0,+}^{(j)}\left(L_{-}(H_{+}-\lambda_0)^{-1}\left(L_{-}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}\frac{(x,\ell)}{2|\ell|^2}}\left(1+\frac{(\ell,\vec{A})}{2|\ell|^2}-\frac{(x,\ell)}{4|\ell|^2}\right)\right),\psi_{0,+}(x)\right)_{L_2(R^2)}; \tag{7}$$

$$b_{21}=$$

$$C_0^{-}f_{0,-}^{(j)}\left(L_{+}(H_{-}-\lambda_0)^{-1}\left(L_{+}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}\frac{(x,\ell)}{2|\ell|^2}}\left(1+\frac{(\ell,\vec{A})}{2|\ell|^2}-\frac{(x,\ell)}{4|\ell|^2}\right)\right),\psi_{0,-}(x)\right)_{L_2(R^2)}. \tag{8}$$

◄ Подставим равенства (2), (3) в уравнение $\mathrm{H}_{\ell}\psi_{\ell}^{(j)}=\lambda_{\ell}^{(j)}\psi_{\ell}^{(j)}$. Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые в точках ℓ и $-\ell$:

$$\ell: f_{0,-}^{(j)}L_{+}(x-\ell)\psi_{0,-}(x+\ell)+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\,L_{+}(x-\ell)\psi_{1,-}^{(j)}(x+\ell)+$$

$$+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\left(-\Delta+L_{+}(x-\ell)-\lambda_0\right)\psi_{1,+}^{(j)}(x-\ell)+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\times$$

$$\times L_{+}(x-\ell)\psi_{1,-}^{(j)}(x+\ell)+e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\left(-\Delta+L_{+}(x-\ell)-\lambda_0\right)\psi_{2,+}^{(j)}(x-\ell)-$$

$$-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\,f_{0,-}^{(j)}\Lambda_1^{(j)}\psi_{0,-}(x+\ell)-e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\,\Lambda_1^{(j)}\psi_{1,+}^{(j)}(x-\ell)-$$

$$-e^{-6\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\,\Lambda_1^{(j)}\psi_{2,+}^{(j)}(x-\ell)+e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}\times$$

$$\times\ L_{+}(x-\ell)\psi_{2,-}^{(j)}(x+\ell)=0;$$

$$-\ell: f_{0,+}^{(j)} L_-(x+\ell)\psi_{0,+}(x-\ell) + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}\, L_-(x+\ell)\psi_{1,+}^{(j)}(x-\ell) +$$

$$+ e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2} \left(-\Delta + L_-(x+\ell) - \lambda_0\right) \psi_{1,-}^{(j)}(x+\ell) +$$

$$+ e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}\, L_-(x+\ell)\psi_{1,+}^{(j)}(x-\ell) +$$

$$+ e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2} \left(-\Delta + L_-(x+\ell) - \lambda_0\right) \psi_{2,-}^{(j)}(x+\ell) -$$

$$- e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}\, f_{0,+}^{(j)} \Lambda_1^{(j)} \psi_{0,+}(x-\ell) -$$

$$- e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}\, \Lambda_1^{(j)} \psi_{1,-}^{(j)}(x+\ell) - e^{-6\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}\, \Lambda_1^{(j)} \psi_{2,-}^{(j)}(x+\ell) +$$

$$+ e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}\, L_-(x+\ell)\psi_{2,+}^{(j)}(x-\ell) = 0.$$

Рассмотрим выражения порядка $e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}$ в точках ℓ и $-\ell$:

$$e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2} \left(-\Delta + L_+(x-\ell) - \lambda_0\right) \psi_{1,+}^{(j)}(x-\ell) =$$
$$= -f_{0,-}^{(j)} L_+(x-\ell)\psi_{0,-}(x+\ell);$$

$$e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2} \left(-\Delta + L_-(x+\ell) - \lambda_0\right) \psi_{1,-}^{(j)}(x+\ell) =$$
$$= -f_{0,+}^{(j)} L_-(x+\ell)\psi_{0,+}(x+\ell).$$

Далее приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты в последних соотношениях, раскладывая $|\,x+\ell\,|$ в ряд Тейлора, а также учитывая (1), получаем равенство (5).

Рассмотрим выражения порядка $e^{-4\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} |\,\ell\,|^{-1/2}$ в точках ℓ и $-\ell$:

$$e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|} \left(H_\pm - \lambda_0\right) \psi_{2,\pm}^{(j)}(x) =$$

$$= -L_\pm \psi_{1,\mp}^{(j)}(x \pm 2\ell) + f_{0,\pm}^{(j)} \Lambda_1^{(j)} \psi_{0,\pm}(x). \tag{9}$$

Выписываем коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты и, учитывая поведение на бесконечности функции $\psi_{1,\mp}^{(j)}(x)$, из приведенных равенств запишем формулы (6).

Используем условие разрешимости, которое заключается в ортогональности правой части уравнения (9) собственной функции $\psi_{0,\mp}(x)$. В результате получим матричное уравнение

$$\left(B - \Lambda_1^{(j)} E\right) f_0^{(j)} = 0, \tag{10}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \left(L_{-}\psi_{1,+}^{(j)}(x-2\ell),\psi_{0,+}\right)_{L_2(R^2)} \\ \left(L_{+}\psi_{1,-}^{(j)}(x+2\ell),\psi_{0,-}\right)_{L_2(R^2)} & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица; E — единичная матрица размером 2×2; $f_0^{(j)}=\begin{pmatrix} f_{0,-}^{(j)} \\ f_{0,+}^{(j)} \end{pmatrix}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\Lambda_1^{(j)}(\ell)$, $j=1,2$. Используя поведение на бесконечности функций $\psi_{1,\mp}^{(j)}(x)$, доказываем справедливость равенств (7), (8), которые описывают поведение на бесконечности элементов матрицы B. Запишем условие разрешимости (10). Решим уравнение $\det\left(B-\Lambda_1^{(j)}E\right)=0$. Вычисляя последний определитель, приходим к (4). Отметим, что $\Lambda_1^{(j)}(\ell)$ получаются равными по модулю, но противоположными по знаку, т. е. симметричными относительно нуля. ►

Теорема 2. *При достаточно больших* $|\ell|$ *формальные асимптотики возмущенных собственных значений, сходящихся к предельному собственному значению* λ_0, *и асимптотики собственных функций, которые ему соответствуют, возмущенного лапласиана в двумерном пространстве имеют вид:*

$$\lambda_\ell^{(j)}=\lambda_0+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}|\ell|^{-1/2}\Lambda_1^{(j)}(\ell)+\ldots; \tag{11}$$

$$\psi_\ell^{(j)}(x)=\sum_{i=1}^{p} f_1^{(i)}\psi_{0,-}^{(i)}(x+\ell)+\sum_{i=1}^{q} f_2^{(i)}\psi_{0,+}^{(i)}(x-\ell)+$$
$$+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}|\ell|^{-1/2}\left(\psi_{1,-}^{(j)}(x+\ell)+\psi_{1,+}^{(j)}(x-\ell)\right)\ldots \tag{12}$$

Здесь

$$\psi_{1,-}^{(j)}=\left(H_{-}-\lambda_0\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\Lambda_1^{(j)}(\ell)\sum_{i=1}^{p} f_1^{(i)}\psi_{0,-}^{(i)}(x)-C_0^{+}\sum_{i=1}^{q} f_2^{(i)}L_{-}e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|x|}|x|^{-1/2}\left(1+\frac{\left(x,\overrightarrow{A^{+}}\right)}{|x|^2}\right)\right); \tag{13}$$

$$\psi_{1,+}^{(j)} = \left(H_+ - \lambda_0\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(\Lambda_1^{(j)}(\ell)\sum_{i=1}^{q} f_2^{(i)}\psi_{0,+}^{(i)}(x) - C_0^- \sum_{i=1}^{p} f_1^{(i)} L_+ e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|x|}\,|\,x\,|^{-1/2}\left(1+\frac{\left(x,\overrightarrow{A^-}\right)}{|\,x\,|^2}\right)\right); \tag{14}$$

$$\Lambda_1^{(j)}(\ell) = \pm\sqrt{\mu_j}, \tag{15}$$

μ_j *— собственные значения матрицы* $\tilde{B}\hat{B}$, $j=1,\ldots,t$, $t=p+q$, $\tilde{B}$ *— матрица размером* $p\times q$,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \left(L_+\psi_{0,-}^{(1)}(x+2\ell),\psi_{0,+}^{(1)}\right)_{L_2(R^2)} & \cdots & \left(L_+\psi_{0,-}^{(1)}(x+2\ell),\psi_{0,+}^{(q)}\right)_{L_2(R^2)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \left(L_+\psi_{0,-}^{(p)}(x+2\ell),\psi_{0,+}^{(1)}\right)_{L_2(R^2)} & \cdots & \left(L_+\psi_{0,-}^{(p)}(x+2\ell),\psi_{0,+}^{(q)}\right)_{L_2(R^2)} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$\hat{B}$ *— матрица размером* $q\times p$,

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \left(L_-\psi_{0,+}^{(1)}(x-2\ell),\psi_{0,-}^{(1)}\right)_{L_2(R^2)} & \cdots & \left(L_-\psi_{0,+}^{(1)}(x+2\ell),\psi_{0,-}^{(p)}\right)_{L_2(R^2)} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \left(L_-\psi_{0,+}^{(q)}(x-2\ell),\psi_{0,-}^{(1)}\right)_{L_2(R^2)} & \cdots & \left(L_-\psi_{0,+}^{(q)}(x+2\ell),\psi_{0,-}^{(p)}\right)_{L_2(R^2)} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$f_0^{(j)}$ *— собственный вектор, соответствующий собственным значениям* $\Lambda_1^{(j)}(\ell)$, *компонентами которого являются числа* $f_1^{(j)}$, $j=1,\ldots,p$, *и* $f_2^{(j)}$, $j=1,\ldots,q$;

$$b_{ij} = C_0^-\left(L_+ e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}\frac{(x,\ell)}{2|\ell|^2}}\left(1+\frac{\left(\ell,\overrightarrow{A^{(i)}}\right)}{2\,|\,\ell\,|^2}-\frac{(x,\ell)}{4\,|\,\ell\,|^2}\right),\psi_{0,+}^{(j)}(x)\right)_{L_2(R^2)}, \tag{18}$$

$$i=1,\ldots,p,\ \ j=1,\ldots,q;$$

$$b_{ij} = C_0^+\left(L_- e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}\frac{(x,\ell)}{2|\ell|^2}}\left(1+\frac{\left(\ell,\overrightarrow{A^{(i)}}\right)}{2\,|\,\ell\,|^2}-\frac{(x,\ell)}{4\,|\,\ell\,|^2}\right),\psi_{0,-}^{(j)}(x)\right)_{L_2(R^2)}, \tag{19}$$

$$i=1,\ldots,q,\ \ j=1,\ldots,p.$$

◂ По аналогии с теоремой 1 подставляем (11), (12) в уравнение на собственные значения $\mathrm{H}_{\ell}\psi_{\ell}^{(j)}=\lambda_{\ell}^{(j)}\psi_{\ell}^{(j)}$. Раскрываем скобки и выделяем члены одного порядка малости $e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}\,|\,\ell\,|^{-1/2}$ в точках ℓ и $-\ell$, переходим к равенствам вида

$$e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}(H_{-}-\lambda_0)\psi_{1,-}^{(j)}=\Lambda_1^{(j)}(\ell)\sum_{i=1}^{p}f_1^{(i)}\psi_{0,-}^{(i)}(x)-\sum_{i=1}^{q}f_2^{(i)}L_{-}\psi_{0,+}^{(i)}(x-2\ell);$$

$$e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda_0}|\ell|}(H_{+}-\lambda_0)\psi_{1,+}^{(j)}=\Lambda_1^{(j)}(\ell)\sum_{i=1}^{q}f_2^{(i)}\psi_{0,+}^{(i)}(x)-\sum_{i=1}^{p}f_1^{(i)}L_{+}\psi_{0,-}^{(i)}(x+2\ell).$$

Записываем коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты в этих уравнениях. Учитывая (1), а также раскладывая выражение $|\,x+\ell\,|$ в ряд Тейлора, переходим к (13), (14). Используя условие разрешимости, которое заключается в ортогональности правых частей каждого уравнения своей собственной функции $\psi_{0,-}^{(j)}(x)$, $i=1,\ldots,p$, и $\psi_{0,+}^{(j)}(x)$, $i=1,\ldots,q$, получаем матричное уравнение

$$\left(B-\Lambda_1^{(j)}E\right)f_0^{(j)}=0,\ B=\begin{pmatrix}0 & \tilde{B}\\ \hat{B} & 0\end{pmatrix},\ j=1,\ldots,t,\ t=p+q, \tag{20}$$

где $\tilde{B}$ — матрица размером $p\times q$ (16); $\hat{B}$ — матрица размером $q\times p$ (17); $f_0^{(j)}$ — собственный вектор, соответствующий собственным значениям $\Lambda_1^{(j)}(\ell)$, компонентами которого являются числа $f_1^{(j)}$, $j=1,\ldots,p$, и $f_2^{(j)}$, $j=1,\ldots,q$; E — единичная матрица размером $t\times t$. Для нахождения $\Lambda_1^{(j)}(\ell)$ запишем условие разрешимости уравнения (20), а также определитель $\det\left(B-\Lambda_1^{(j)}E\right)=0$ и приведем его к диагональному виду. Получаем равенство

$$\det\left(B-\Lambda_1^{(j)}E\right)=\left(\Lambda_1^{(j)}\right)^{q-p}\det\left(\left(\Lambda_1^{(t)}\right)^2E-\tilde{B}\hat{B}\right)=0,$$

из которого первые поправки у $q-p$ собственных значений возмущенного лапласиана равны нулю, а первые поправки у оставшихся $2p$ собственных значений вычисляются по формуле (15). Учитывая (1) и структуру каждой матрицы $\tilde{B}$, $\hat{B}$, получаем (18), (19). ▸

Обсуждение полученных результатов. Процесс построения асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана в случае произвольной кратности предельного собственного значения является достаточно громоздким и трудоемким. Прежде всего это связано с расщеплением возмущенных собственных значений, которое приводит к возникновению многочисленных частных случаев. Рассмотреть каждый случай невозможно. Именно поэтому здесь построены лишь первые поправки собственных значений возмущенного лапласиана с самым простым и наиболее типичным видом возмущений — финитными потенциалами. Случай двукратного собственного значения рассмотрен отдельно специально для того, чтобы проиллюстрировать отличие структуры асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана в настоящей работе от асимптотик, построенных в [18, 19]. Кроме того, выделение двукратного предельного собственного значения в отдельный случай позволило проследить за сохранением симметрии относительно нуля первых поправок собственных значений возмущенного лапласиана. В каждом рассмотренном случае кратности предельного собственного значения выявлена сложная экспоненциально-степенная структура асимптотик. Этого удалось добиться вследствие финитности рассматриваемых потенциалов.

Заключение. Продемонстрирована симметрия относительно нуля первых поправок асимптотик собственных значений возмущенного лапласиана в обоих случаях (двукратном и в случае произвольной кратности). Интересен тот факт, что первые поправки собственных значений возмущенного лапласиана в случае суммарной кратности $p+q$ группируются следующим образом. Первые поправки у $q-p$ собственных значений возмущенного лапласиана равны нулю. Следовательно, можно полагать, что они симметричны относительно нуля. У оставшихся $2p$ собственных значений возмущенного лапласиана первые поправки также симметричны относительно нуля — они равны по модулю, но противоположны по знаку.

Отметим, что до сих пор остается открытым вопрос о структуре полных асимптотических разложений в случае произвольной кратности предельного собственного значения с различного рода разбегающимися возмущениями. Можно ли представить асимптотики собственных значений и соответствующих им функций в виде равномерно сходящихся рядов? Будут ли эти ряды сходиться? Какими методами будут построены асимптотики? Это вопросы, которые требуют дополнительных исследований.

Отметим ограниченность практического применения рассмотренных здесь задач по сравнению с аналогичными постановками ввиду двумерности пространства. Однако эти задачи оставались нерешенными и являются основой для аналогичных исследований в многомерных волноводах, которые, в свою очередь, активно используются на практике (трубопроводы и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians. *Commun. Math. Phys.*, 1982, vol. 85, no. 3, pp. 471–479. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01208725

[2] Høegh-Krohn R., Mebknout M. The $1/r$ expansion for the critical multiple well problem. *Commun. Math. Phys.*, 1983, vol. 91, no. 1, pp. 66–73.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01206050

[3] Klaus M., Simon B. Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Ann. Phys.*, 1980, vol. 130, iss. 2, pp. 251–281. DOI: https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90338-3

[4] Morgan J.D. III, Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations. *Int. J. Quantum. Chem.,* 1980, vol. 17, iss. 6, pp. 1143–1166. DOI: https://doi.org/10.1002/qua.560170609

[5] Graffi S., Grecchi V., Harrell E.M. II, et al. The 1/R expansion for H_2^+ : analyticity, summability, and asymptotics. *Ann. Phys.*, 1985, vol. 165, iss. 2, pp. 441–483. DOI: https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90305-7

[6] Harrell E.M. Double wells. *Commun. Math. Phys.*, 1980, vol. 75, no. 3, pp. 239–261. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01212711

[7] Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* 1981, vol. 34, no. 4, pp. 405–417.

[8] Reity O.K. Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center problem. *Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 2002, vol. 43-2, pp. 672–675.

[9] Klaus M., Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* 1979, vol. 30, no. 2, pp. 83–87.

[10] Borisov D. Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbations. *Math. Phys. Anal. Geom.,* 2007, vol. 10, no. 2, pp. 155–196.
DOI: https://doi.org/10.1007/s11040-007-9028-1

[11] Borisov D. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space. *Ann. Henri Poincaré,* 2007, vol. 8, no. 7, pp. 1371–1399.
DOI: https://doi.org/10.1007/s00023-007-0338-4

[12] Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations. *J. Math. Sci.,* 2013, vol. 189, no. 3, pp. 342–364.
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1192-1

[13] Борисов Д.И., Головина А.М. О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями. *Уфимский математический журнал*, 2012, т. 4, № 2, с. 65–73.

[14] Головина А.М. Исследование спектральных свойств операторов с разбегающимися возмущениями (обзор). *Математика и математическое моделирование*, 2015, № 2, с. 1–22. DOI: 10.7463/mathm.0215.0776859

[15] Борисов Д.И., Головина А.М. О возникновении резонансов из кратного собственного значения оператора Шредингера в цилиндре с разбегающимися возмущениями. *Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*, 2019, т. 163, с. 3–14.

[16] Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н. О бесконечной системе резонансов и собственных значений с экспоненциальными асимптотиками, порожденных разбегающимися возмущениями. *Уфимский математический журнал*, 2020, т. 12, № 4, с. 3–18. DOI: http://dx.doi.org/10.13108/2020-12-4-3

[17] Borisov D.I., Golovina A.M. On finitely many resonances emerging under distant perturbations in multi-dimensional cylinders. *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, vol. 496, no. 2, art. 124809. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124809

[18] Головина А.М. О поведении дискретного спектра оператора Лапласа с двумя разбегающимися возмущениями на плоскости в случае двукратного предельного собственного значения. *Математика и математическое моделирование*, 2022, т. 2, с. 1–13. DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0222.0000301

[19] Головина А.М. Асимптотика собственных значений периодического оператора с двумя разбегающимися возмущениями на оси. *Математика и математическое моделирование*, 2022, т. 1, с. 21–30.
DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0122.0000300

[20] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 2004.

Головина Анастасия Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Головина А.М. Асимптотика собственных значений оператора Лапласа с двумя разбегающимися возмущениями на плоскости (случай произвольной кратности). *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 3 (108), с. 4–19. DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-3-4-19

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE EIGENVALUES OF THE LAPLACIAN WITH TWO DISTANT PERTURBATIONS ON THE PLANE (THE CASE OF ARBITRARY MULTIPLICITY)

A.M. Golovina amgolovina@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The Laplacian with a pair of distant perturbations is studied in two-dimensional space. Perturbations are understood as real finite continuous potentials. The discrete spectrum of the perturbed Laplacian is studied when the distance between the potentials increases. The presence of its eigenvalues and eigenfunctions that correspond to them is considered for various cases of multiplicities of the limiting eigenvalue. The first case of the considered multiplicity is the double limiting eigenvalue. By this we mean the simple and isolated Laplacian eigenvalue with the first potential, as well as the simple and isolated Laplacian eigenvalue with the second potential. The second case under consideration is the case of arbitrary multiplicity of the limiting eigenvalue. By this we mean the Laplacian eigenvalue with the first potential of arbitrary multiplicity and the Laplacian eigenvalue with the second potential also of arbitrary multiplicity. In both cases under consideration (of multiplicity two and arbitrary), the first terms of formal asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions of the perturbed Laplacian are constructed. A complex exponential-power structure of the constructed asymptotic is demonstrated. Also, in both cases under consideration, symmetry with respect to zero of the first corrections of the asymptotics of the eigenvalues of the perturbed Laplacian is shown

Keywords

Laplacian, distant perturbations, asymptotic, eigenvalues, eigenfunctions

Received 12.10.2022
Accepted 13.12.2022

REFERENCES

[1] Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians. *Commun. Math. Phys*., 1982, vol. 85, no. 3, pp. 471–479. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01208725

[2] Høegh-Krohn R., Mebknout M. The 1/*r* expansion for the critical multiple well problem. *Commun. Math. Phys*., 1983, vol. 91, no. 1, pp. 66–73.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01206050

[3] Klaus M., Simon B. Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Ann. Phys*., 1980, vol. 130, iss. 2, pp. 251–281. DOI: https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90338-3

[4] Morgan J.D. III, Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations. *Int. J. Quantum. Chem*., 1980, vol. 17, iss. 6, pp. 1143–1166.
DOI: https://doi.org/10.1002/qua.560170609

[5] Graffi S., Grecchi V., Harrell E.M. II, et al. The 1/R expansion for H_2^+ : analyticity, summability, and asymptotics. *Ann. Phys.*, 1985, vol. 165, iss. 2, pp. 441–483.
DOI: https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90305-7

[6] Harrell E.M. Double wells. *Commun. Math. Phys.*, 1980, vol. 75, no. 3, pp. 239–261.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01212711

[7] Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1981, vol. 34, no. 4, pp. 405–417.

[8] Reity O.K Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center problem. *Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 2002, vol. 43-2, pp. 672–675.

[9] Klaus M., Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1979, vol. 30, no. 2, pp. 83–87.

[10] Borisov D. Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbations. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 155–196.
DOI: https://doi.org/10.1007/s11040-007-9028-1

[11] Borisov D. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space. *Ann. Henri Poincaré*, 2007, vol. 8, no. 7, pp. 1371–1399.
DOI: https://doi.org/10.1007/s00023-007-0338-4

[12] Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 189, no. 3, pp. 342–364.
DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1192-1

[13] Borisov D.I., Golovina A.M. On the resolvents of periodic operators with distant perturbations. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2012, vol. 4, no. 2, pp. 65–73 (in Russ.).

[14] Golovina A.M. Investigations in the spectral properties of operators with distant perturbations (survey). *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2015, vol. 2, pp. 1–22 (in Russ.).
DOI: 10.7463/mathm.0215.0776859

[15] Borisov D.I., Golovina A.M. On occurrence of resonances from multiple eigenvalues of the Schrödinger operator in a cylinder with distant perturbations. *J. Math Sci.*, 2021, vol. 258, no. 1, pp. 1–12. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-021-05532-x

[16] Borisov D.I., Konyrkulzhaeva M.N. On infinite system of resonances and eigenvalues with exponential asymptotics generated by distant perturbations. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2020, vol. 12, no. 4, pp. 3–18 (in Russ.). DOI: http://dx.doi.org/10.13108/2020-12-4-3

[17] Borisov D.I., Golovina A.M. On finitely many resonances emerging under distant perturbations in multi-dimensional cylinders. *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, vol. 496, no. 2, art. 124809. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124809

[18] Golovina A.M. On Laplacian discrete spectrum behavior with two distant perturbations on the plane in the case of a double limiting eigenvalue. *Matematika i ma-*

tematicheskoe modelirovanie [Mathematics and Mathematical Modeling], 2022, vol. 2, pp. 1–13 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0222.0000301

[19] Golovina A.M. Asymptotic behavior of the eigenvalues of a periodic operator with two distant perturbations on the axis. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modeling], 2022, vol. 1, pp. 21–30 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.24108/mathm.0122.0000300

[20] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 2004.

Golovina A.M. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Golovina A.M. Asymptotic behavior of the eigenvalues of the Laplacian with two distant perturbations on the plane (the case of arbitrary multiplicity). *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 3 (108), pp. 4–19 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-3-4-19