

ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА В ЗАДАЧАХ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г.Н. Кувыркин

fn2@bmstu.ru

А.А. Соколов

zokolof@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

При моделировании конструкционных материалов приходится использовать модели, учитывающие структурные особенности на микроуровне. К таким моделям можно отнести модель нелокальной теории упругости Эрингена. Рассмотрено применение указанной модели в сравнении с классической моделью упругости. Главная особенность нелокальной модели состоит в том, что она учитывает дальние взаимодействия частиц сплошной среды, классическая постановка является ее частным случаем. При этом уравнения имеют интегродифференциальную форму, что в значительной степени усложняет получение аналитических решений. В связи с этим для поиска решений был применен метод конечных элементов с использованием изопараметрических конечных элементов. Здесь, как и в классической модели теории упругости, выполняются основные балансные соотношения. Однако полученные решения в значительной степени отличаются от классических, поскольку у таких решений проявляется кромочный эффект вблизи свободных границ области. Этот эффект, а также сохранение баланса сил продемонстрированы на примере выполнимости принципа Сен-Венана при растяжении прямоугольной пластины. Полученные в нелокальной постановке решения демонстрируют значительное снижение уровня растягивающего напряжения вблизи свободных границ и касательные напряжения в поперечном сечении

Ключевые слова

Нелокальная упругость, уравнения равновесия, кромочный эффект, метод конечных элементов, принцип Сен-Венана

Поступила 18.01.2023

Принята 02.03.2023

© Автор(ы), 2023

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект № FSN-2023-0012)

Введение. При работе с материалами, обладающими микро- и наноструктурой [1], приходится учитывать масштабные и кромочные эффекты, которые начинают в них преобладать [2, 3]. Особый интерес представляют модели, где классическая теория упругости является частным случаем. Одна из таких моделей — нелокальная модель Эрингена [4], обобщающая классические модели, с тем лишь различием, что уравнения вместо дифференциальной формы принимают интегродифференциальную форму, вследствие чего поиск аналитических решений становится весьма затруднительным. Возможности анализа математических моделей непрерывной среды могут быть расширены за счет применения вариационных методов [5, 6]. Существует множество подходов к построению численных решений такого рода уравнений [7–9], но в настоящей работе отдано предпочтение методу конечных элементов [10–12].

Классическая модель теории упругости является частным случаем нелокальной модели Эрингена [4], поэтому при изучении свойств нелокальной среды можно опираться на принципы классической теории. Одно из важнейших положений классической теории упругости — принцип Сен-Венана, согласно которому различные, но статически эквивалентные нагрузки вызывают в теле одинаковые напряженные состояния вдали от поверхности приложения нагрузки [13]. Это явление не доказано в общем случае, но подтверждено многими теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Цель работы — исследование полей напряжений, возникающих в пластине при ее растяжении различными видами нагрузок в нелокальной постановке, и сравнение полученных результатов с классическими.

Основные соотношения. В произвольной замкнутой области $S \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂S уравнение равновесия имеет вид [13]:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Здесь $\nabla = \partial / \partial x_j \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2$ — дифференциальный оператор Гамильтона, x_j — компоненты вектора \mathbf{x} , \mathbf{e}_j — единичные орты координатных осей; $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$ — вектор плотности объемных сил; $\hat{\sigma} = \sigma_{ji} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$ — тензор напряжений [4, 14],

$$\hat{\sigma} = p_1 \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + p_2 \iint_{S'(x) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dS'(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $p_1 > 0$, $p_2 \geq 0$ — весовые доли классического и нелокального законов упругости, такие, что $p_1 + p_2 = 1$; φ — функция нелокального влияния,

некоторая нормированная положительная функция в области нелокального влияния $S'(\mathbf{x})$; $\hat{\mathbf{C}} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ — тензор коэффициентов упругости, компоненты C_{ijkl} которого в случае линейно-упругого изотропного материала в плоском напряженном состоянии можно определить через коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E [13]:

$$C_{ijkl} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

δ_{ij} — дельта-функция Кронекера. Отметим, что для плоского деформированного состояния коэффициенты тензора упругости можно определить аналогично [13]:

$$C_{ijkl} = \frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Здесь $\nu_1 = \nu / (1 - \nu)$; $E_1 = E / (1 - \nu^2)$; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ — тензор малой деформации, компоненты ε_{ij} которого можно определить через соотношение Коши [13]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2,$$

где u_i — компоненты вектора перемещений \mathbf{u} .

Кинематические и силовые граничные условия [10]:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}|_{\Gamma_2} = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial S; \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset,$$

где $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = d_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ — функции, задающие перемещение и поверхностную нагрузку на границах Γ_1 и Γ_2 ; \mathbf{n} — внешняя нормаль области S .

Схема численного решения. В качестве численного метода решения уравнения (1) выбран метод конечных элементов [10, 11]. Для его применения на области S введем сетку конечно-элементной модели S_h , которая включает в себя множества номеров узлов и элементов. Каждый элемент $(e) \in S_h$ содержит наборы узлов $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I^{(e)}}$ и базисных функций $\{N_i^{(e)}\}_{i \in I^{(e)}}$, таких, что $N_i^{(e)}(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in I^{(e)}$; $\sum_{i \in I^{(e)}} N_i^{(e)}(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in S^{(e)}$, где $I^{(e)}$ — набор индексов узлов элемента (e) ; $S^{(e)}$ — область элемента (e) .

Для удобства интегрирования на каждом элементе (e) введем локальную систему координат $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$. Отображение из локальной системы координат $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$ в глобальную Ox_1x_2 будем строить следующим образом:

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_j} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi_j^{(e)}} \frac{\partial \xi_j^{(e)}}{\partial x_j},$$

где x_i — значение глобальных координат в узлах сетки. Тогда матрицу Якоби перехода из локальной системы координат в глобальную можно аппроксимировать как

$$\hat{\mathbf{J}}^{(e)} = \left(\frac{\partial \xi^{(e)}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^{(e)}} \right)^{-1} \approx \left(\mathbf{x}_i \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}} \right)^{-1}.$$

При интегрировании в локальных системах координат элементов получим следующие соотношения:

$$dS = dx_1 dx_2 = J^{(e)} d\xi_1^{(e)} d\xi_2^{(e)};$$

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_j} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi_j^{(e)}} \frac{\partial \xi_j^{(e)}}{\partial x_j}.$$

Здесь $J^{(e)} = \det \hat{\mathbf{J}}^{(e)}$ — якобиан перехода из глобальной системы координат Ox_1x_2 в локальную $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$.

Теперь умножим уравнение (1) на функцию формы $N_n^{(e)}$ и проинтегрируем по области S . После подстановки определяющего соотношения (2) и перехода к индексной форме записи запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} p_1 \iint_S N_{n,i}^{(e)} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS + p_2 \iint_S N_{n,i}^{(e)} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS'(\mathbf{x}) dS = \\ = \iint_S N_n^{(e)} b_j dS + \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_j d\Gamma, \quad i, j, k, l = 1, 2, n \in I^{(e)}, (e) \in S_h. \end{aligned}$$

После интегрирования получаем матрично-векторное уравнение [15, 16]:

$$\left(p_1 \hat{\mathbf{K}}^L + p_2 \hat{\mathbf{K}}^{NL} \right) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{B} + \mathbf{P},$$

где $\hat{\mathbf{K}}^L$, $\hat{\mathbf{K}}^{NL}$ — матрицы жесткости, полученные в локальном и нелокальном случаях; \mathbf{U} — вектор искомых узловых перемещений; \mathbf{P} , \mathbf{V} — дискретизированные плотности поверхностных и объемных сил. Интегрирование системы выполняется одной из квадратурных формул, где порядок квадратуры выбирается в соответствии с необходимой точностью и порядком элементов. В силу того, что матрицы $\hat{\mathbf{K}}^L$ и $\hat{\mathbf{K}}^{NL}$ имеют блочную структуру, для удобства дальнейшего изложения их удобно представить в виде аналогов (по числу индексов) тензоров четвертого ранга, где первые два индекса обозначают строку и столбец с указанием блока, а вторые — строку и столбец в блоке. Аналогично можно представить векторы \mathbf{U} , \mathbf{V} и \mathbf{P} как аналоги тензоров второго ранга, где первый индекс соответствует номеру узла, а второй — номеру координатной компоненты.

Определим блок $\mathbf{K}_{mn}^{(e)(e')}$ размерностью 2×2 , который располагается в m -й строке и n -м столбце матрицы жесткости:

$$\mathbf{K}_{mn}^{(e)(e')}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{np} \delta_{mq} C_{ijkl} N_{n,k}^{(e)}(\mathbf{x}) N_{m,l}^{(e')}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_p \otimes \mathbf{E}_q, \\ i, j, k, l = 1, 2; \quad n, m, p, q = \overline{1, L},$$

где \mathbf{E}_p — единичный вектор размерностью L ; L — число узлов в сетке S_h . Тогда аппроксимацию матрицы $\hat{\mathbf{K}}^L$ можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{K}}^L = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n, m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \mathbf{K}_{mn}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)},$$

где $Q^{(e)}$ — набор индексов квадратурных узлов элемента (e) ; \mathbf{x}_q — координата квадратурного узла q ; w_q — вес, соответствующий квадратурному узлу q ; $J_q^{(e)} = \left| \det \hat{\mathbf{J}}^{(e)}(\mathbf{x}_q) \right|$ — якобиан, вычисленный в квадратурной точке \mathbf{x}_q .

При аппроксимации матрицы $\hat{\mathbf{K}}^{NL}$ аппроксимацию S_h^q области нелокального влияния S_h следует проводить относительно каждого квадратурного узла. Таким образом, те элементы, квадратурные узлы которых хотя бы частично попали под область влияния, будут участвовать в расчете (рис. 1). Серым цветом на рисунке выделены элементы, аппрок-

симирующие область нелокального влияния, границы которой обозначены окружностью; точками обозначены квадратурные узлы, а крестом — квадратурный узел, относительно которого происходит аппроксимация. Следовательно, аппроксимацию матрицы $\hat{\mathbf{K}}^{NL}$ можно записать так:

$$\hat{\mathbf{K}}^{NL} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \sum_{(e') \in S_h^q} \sum_{n' \in I^{(e')}} \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \times \mathbf{K}_{mn'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}.$$

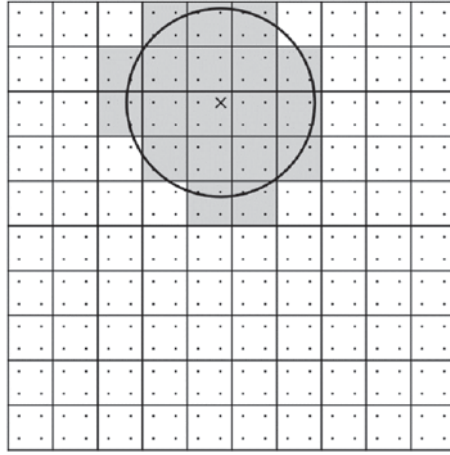


Рис. 1. Аппроксимация области нелокального влияния относительно квадратурного узла сетки

Аппроксимация векторов плотности поверхностных и объемных сил:

$$\mathbf{P} = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{p}(\mathbf{x}_q) J_q^{(be)},$$

$$\mathbf{B} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{b}(\mathbf{x}_q) J_q^{(e)},$$

где $\Gamma_h \subset S_h$ — конечно-элементная аппроксимация границы ∂S , состоящая из одномерных элементов, которые располагаются на ребрах двумерных элементов и имеют с ними общие узлы. Таким образом, для интегралов по границе якобиан можно выразить следующей формулой:

$$J_q^{(be)} = \sqrt{\sum_{j=1}^2 \left(x_{jn}^{(be)} \frac{\partial N_n^{(be)}}{\partial \xi^{(be)}} \right)^2}, \quad n \in I^{(be)}, \quad (be) \in \Gamma_h.$$

Отметим, что индекс оси $\xi^{(be)}$ отсутствует в силу того, что элемент одномерный.

Результаты расчетов. Дальнейшие расчеты будем проводить исключительно на равномерных сетках, состоящих из квадратичных серендиповых элементов [10]. Для проведения качественного анализа решений будем использовать безразмерные параметры и переменные, обозначая их чертой сверху. В качестве функции нелокального влияния выберем квадратичную параболу

$$\varphi(\bar{x}, \bar{x}') = \begin{cases} \frac{1}{\pi \bar{r}^2} \left(1 - \frac{|\bar{x} - \bar{x}'|^2}{\bar{r}^2} \right), & |\bar{x} - \bar{x}'| \leq \bar{r}, \\ 0, & |\bar{x} - \bar{x}'| > \bar{r}, \end{cases}$$

где \bar{r} — безразмерный радиус нелокальности, порождающий область нелокального влияния $S'(\bar{x})$.

Убедимся в выполнимости принципа Сен-Венана на примере растяжения прямоугольной пластины, занимающей область $S = \{\bar{x} \mid 0 \leq \bar{x}_1 \leq 10, 0 \leq \bar{x}_2 \leq 1\}$. Введем на области S сетку конечно-элементной модели S_h , состоящую из 64 000 элементов. Сформулируем следующие граничные условия:

$$\bar{\sigma}_{j_1 n_j} |_{\bar{x}_1=0} = -f(\bar{x}_2), \quad \bar{\sigma}_{j_1 n_j} |_{\bar{x}_1=10} = f(\bar{x}_2),$$

где $f(x)$ — некоторая функция нагружения. Для достижения единственности решения добавим два дополнительных геометрических условия вдоль осей симметрии

$$\bar{u}_1 |_{\bar{x}_1=5} = 0, \quad \bar{u}_1 |_{\bar{x}_2=0,5} = 0,$$

тем самым придав симметрию искомому решению. Отметим также, что в классической постановке можно обойтись рассмотрением лишь четверти области, однако в нелокальной постановке это недопустимо в силу необходимости учитывать процедуру поиска ближайших соседей среди элементов сетки, поскольку отсутствие соответствующих соседей вблизи осей симметрии приведет к искажениям искомого решения.

Рассмотрим три случая нагружения с одинаковой нормировкой (рис. 2):

$$1) f_1(x) = 1; \quad 2) f_2(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0,5, \\ 4-4x, & x > 0,5; \end{cases} \quad 3) f_3(x) = \begin{cases} 2-4x, & x \leq 0,5, \\ 4x-2, & x > 0,5. \end{cases}$$

Кривые напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ вдоль оси нагружения в различных сечениях приведены на рис. 3. При удалении от зоны приложения нагрузки

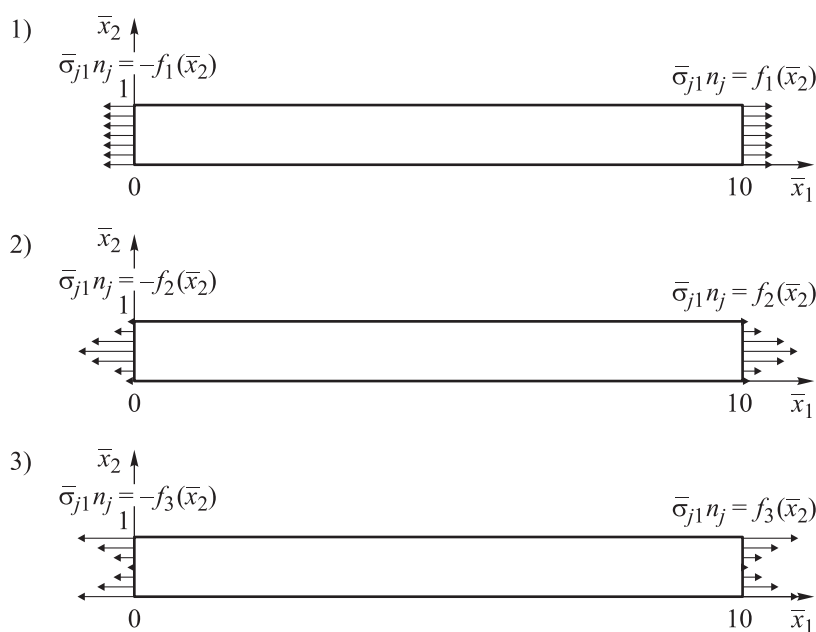


Рис. 2. Нагрузки, примененные к пластине

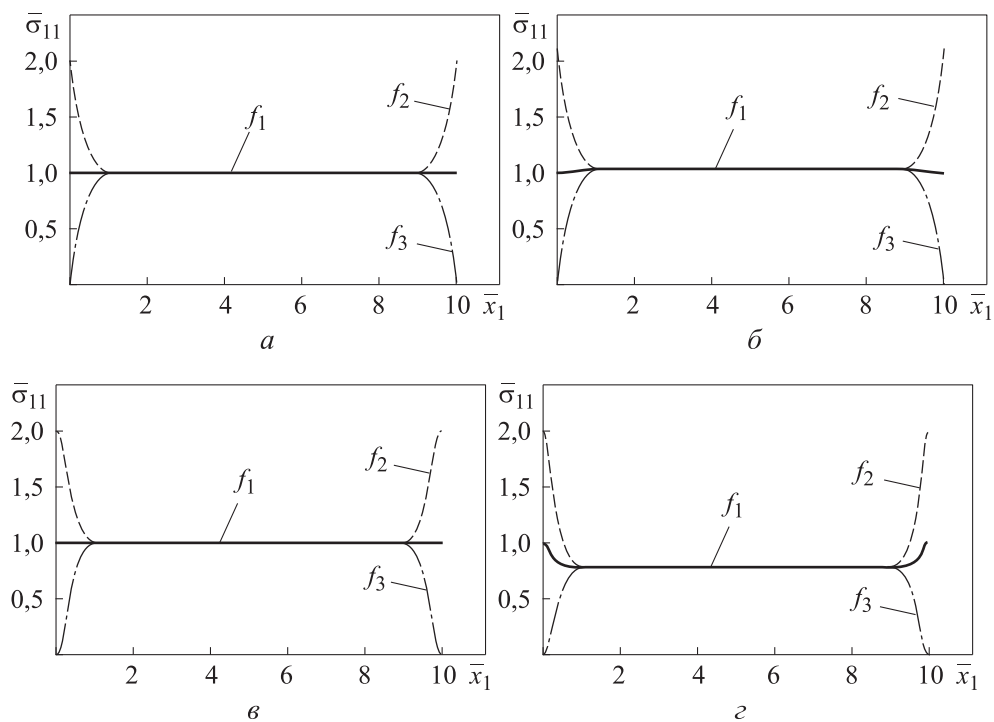


Рис. 3. Распределения напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ в сечениях $\bar{x}_2 = 0,5$ (а, б) и $\bar{x}_2 = 0$ (в, г)

при различных видах нагружения и параметрах модели:

а — $\bar{r} = 0$, $p_1 = 1,0$; б — $\bar{r} = 0,2$, $p_1 = 1/2$; в — $\bar{r} = 0$, $p_1 = 1,0$; г — $\bar{r} = 0,2$, $p_1 = 1/2$

кривизна решений перестает зависеть от вида приложенной нагрузки и все они сливаются в единую поверхность, однако, в отличие от классического случая, эта поверхность не является постоянной вдоль оси $O\bar{x}_2$ и обладает кромочным эффектом вблизи свободных границ области. Основные расчетные параметры модели и сечения даны на рис. 3.

При рассмотрении сечения вдоль другой оси можно убедиться в том, что в нелокальной постановке поверхность напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ имеет более сложную форму. От вариации радиуса нелокальности \bar{r} зависит размах кромочного эффекта, а от вариации весового параметра p_1 — отклонение нелокального решения от классического. Результаты расчетов приведены на рис. 4, где заметно, что при увеличении параметра \bar{r} кромочный эффект становится шире, а уменьшение параметра p_1 увеличивает отклонения от классического решения. Аналогичные результаты на свободных границах можно наблюдать и на областях со ступенчатыми переходами и эллиптическими вырезами [17].

Следует отметить, что, несмотря на сложную форму полученных решений, равнодействующая напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ одинакова во всех сечениях и равна приложенной нагрузке:

$$\int_0^1 \bar{\sigma}_{11} d\bar{x}_2 = \int_0^1 f_i d\bar{x}_2, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Это свидетельствует о выполнении принципа Сен-Венана и сохранении балансных соотношений.

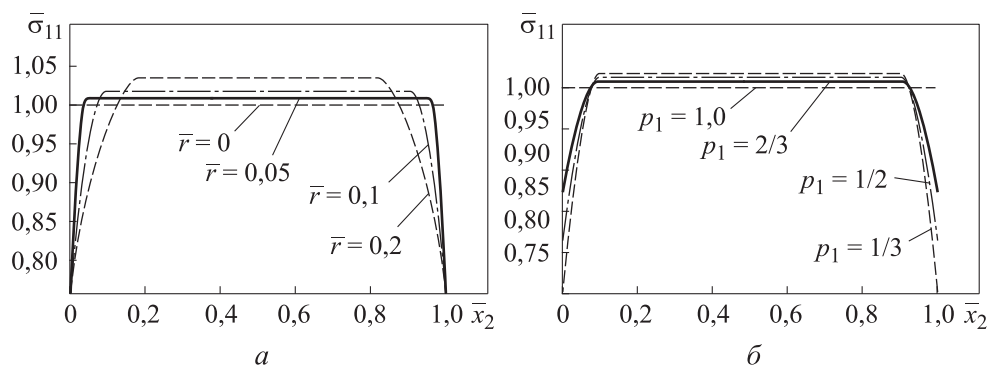


Рис. 4. Распределения напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ в сечении $\bar{x}_1 = 5$ при вариациях радиуса нелокального влияния (a , $p_1 = 1/2$) и весового параметра модели (b , $\bar{r} = 0,1$)

Важным отличием нелокального решения от классического также является возникновение касательного напряжения $\bar{\sigma}_{12}$. Его характер имеет весьма сложную, но в то же время симметричную структуру. Кривые

напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ в сечениях, отстоящих на радиус нелокального влияния, показаны на рис. 5. Как и на предыдущих рисунках, отклонение величины тем больше, чем больше вклад нелокального влияния. Схожие результаты получены в [8].

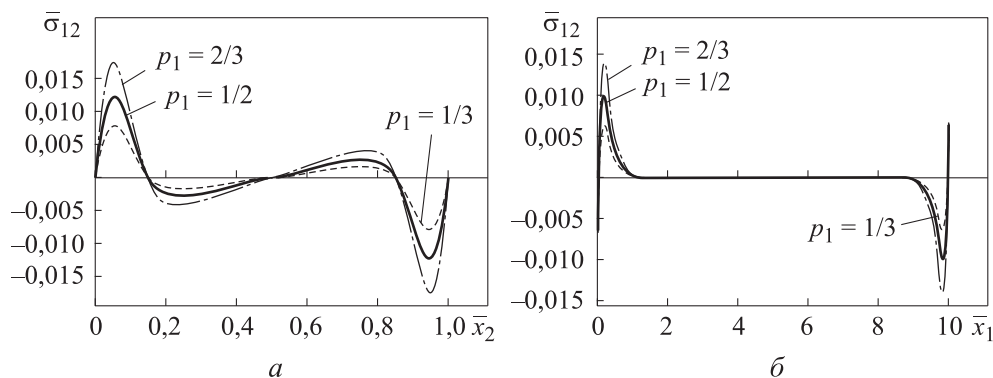


Рис. 5. Распределения напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ в сечениях $\bar{x}_1 = 0,1$, $\bar{r} = 0,1$ (а) и $\bar{x}_2 = 0,1$, $\bar{r} = 0,1$ (б) при различных весовых параметрах модели

Заключение. Исследования нелокальной модели упругости показали, что, несмотря на такую постановку задачи, здесь, как и в классическом случае, также выполняется принцип Сен-Венана и сохраняется баланс сил. Получаемые в нелокальной постановке решения имеют кромочный эффект, который характеризуется снижением уровня напряжения на свободных границах области и компенсирующим это снижение увеличением напряжения в ее центральной части.

Кроме основных особенностей решения, также исследовано влияние основных параметров модели на итоговые решения. Так, установлено, что увеличение радиуса нелокальности способствует увеличению отклонения решения от классического на свободных границах, а возрастание вклада нелокального влияния усиливает отклонения решений от классических.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Thagadurai T.D., Manjubaashini N., Thomas S., et al. Nanostructured materials. Springer, 2020.
- [2] Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М., Наука, 1975.
- [3] Gopalakrishnan S., Narendar S. Wave propagation in nanostructures In: NanoScience and Technology. Cham, Springer, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-01032-8>

- [4] Eringen A.C. (eds). Nonlocal continuum field theories. New York, NY, Springer, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-22643-9>
- [5] Савельева И.Ю. Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2 (101), с. 68–86. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-68-86>
- [6] Савельева И.Ю. Двойственная вариационная модель стационарного процесса теплопроводности, учитывающая пространственную нелокальность. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 5 (104), с. 45–61. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61>
- [7] Wen P.H., Huang X.J., Aliabadi M.H. Two dimensional nonlocal elasticity analysis by local integral equation method. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 2013, vol. 96, no. 3, pp. 199–225. DOI: <https://doi.org/10.3970/cmescs.2013.096.199>
- [8] Abdollahi R., Boroomand B. Benchmarks in nonlocal elasticity defined by Eringen's integral model. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, iss. 18, pp. 2758–2771. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.027>
- [9] Abdollahi R., Boroomand B. On using mesh-based and mesh-free methods in problems defined by Eringen's non-local integral model: issues and remedies. *Meccanica*, 2019, vol. 54, no. 11-12, pp. 1801–1822. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-019-01048-6>
- [10] Zienkiewicz O., Taylor R., Zhu J.Z. The finite element method. Elsevier, 2005.
- [11] Bathe K.-J. Finite element procedures. Klaus-Jürgen Bathe, 2014.
- [12] Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu., Sokolov A.A. Features of the software implementation of the numerical solution of stationary heat equation taking into account the effects of nonlocal finite element method. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1479, art. 012034. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012034>
- [13] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
- [14] Кувыркин Г.Н. Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Ч. 1. Определяющие уравнения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2013, № 1 (48), с. 26–33.
- [15] Polizzotto C. Nonlocal elasticity and related variational principles. *Int. J. Solids Struct.*, 2001, vol. 38, iss. 42-43, pp. 7359–7380. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00039-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00039-7)
- [16] Pisano A.A., Sofi A., Fuschi P. Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, iss. 21, pp. 3836–3849. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.07.009>
- [17] Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu., Sokolov A.A. 2D nonlocal elasticity: investigation of stress and strain fields in complex shape regions. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2023, vol. 103, iss. 3, art. e202200308. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202200308>

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Соколов Андрей Александрович — аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Кувыркин Г.Н., Соколов А.А. Принцип Сен-Венана в задачах нелокальной теории упругости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 4 (109), с. 4–17. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-4-17>

SAINT-VENANT PRINCIPLE ON PROBLEMS OF NONLOCAL ELASTICITY THEORY

G.N. Kuvyrkin

fn2@bmstu.ru

A.A. Sokolov

zokolof@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Simulating the modern structural materials requires introduction of a model that takes into account structural features at the micro-level. The Eringen's nonlocal elasticity theory model could be referred to such models. This model introduction was considered in comparison with the elasticity classical model. Main feature of the nonlocal model is that it takes into consideration the long-range interactions between the continuous medium particles; classical formulation is its special case. In this case, equations are having the integral differential form, which significantly complicates obtaining the analytical solutions. In this regard, the finite elements method was applied to find a solution using the isoparametric finite elements. Here, the main balance relations are satisfied, as in the classical elasticity theory model. However, the solutions obtained are differing to a larger extent from the classical solutions, since such solutions exhibit the edge effect in vicinity of the domain free boundaries. This effect, as well as preservation of the balance of forces, are demonstrated on the example of the Saint-Venant principle feasibility at stretching the rectangular plate. Solutions ob-

Keywords

Nonlocal elasticity, equilibrium equation, edge effect, finite element method, Saint-Venant principle

tained in the nonlocal formulation have a significant decrease in the tensile stress decrease near the free boundaries and shear stresses in the cross section

Received 18.01.2023

Accepted 02.03.2023

© Author(s), 2023

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSN-2023-0012)

REFERENCES

- [1] Thagadurai T.D., Manjubaashini N., Thomas S., et al. Nanostructured materials. Springer, 2020.
- [2] Kunin I.A. Teoriya uprugikh sred s mikrostrukturoy [Theory of elastic media with microstructure]. Moscow, Nauka Publ., 1975.
- [3] Gopalakrishnan S., Narendar S. Wave propagation in nanostructures In: NanoScience and Technology. Cham, Springer, 2013.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-01032-8>
- [4] Eringen A.C. (eds). Nonlocal continuum field theories. New York, NY, Springer, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-22643-9>
- [5] Savelyeva I.Yu. Variational formulation of the mathematical model of stationary heat conduction with account for spatial nonlocality. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 2 (101), pp. 68–86 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-68-86>
- [6] Savelyeva I.Yu. Dual variational model of a steady-state thermal conductivity process taking into account spatial non-locality. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 5 (104), pp. 45–61 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61>
- [7] Wen P.H., Huang X.J., Aliabadi M.H. Two dimensional nonlocal elasticity analysis by local integral equation method. *Comput. Model. Eng. Sci.*, 2013, vol. 96, no. 3, pp. 199–225. DOI: <https://doi.org/10.3970/cmescs.2013.096.199>
- [8] Abdollahi R., Boroomand B. Benchmarks in nonlocal elasticity defined by Eringen's integral model. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, iss. 18, pp. 2758–2771.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.027>
- [9] Abdollahi R., Boroomand B. On using mesh-based and mesh-free methods in problems defined by Eringen's non-local integral model: issues and remedies. *Meccanica*, 2019, vol. 54, no. 11-12, pp. 1801–1822.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-019-01048-6>
- [10] Zienkiewicz O., Taylor R., Zhu J.Z. The finite element method. Elsevier, 2005.
- [11] Bathe K.-J. Finite element procedures. Klaus-Jürgen Bathe, 2014.
- [12] Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu., Sokolov A.A. Features of the software implementation of the numerical solution of stationary heat equation taking into account the effects of nonlocal finite element method. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1479, art. 012034.
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012034>

[13] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous medium]. Moscow, BMSTU Publ., 2008.

[14] Kuvyrkin G.N. Mathematical model of non-local thermal viscoelastic medium. Part 1. Determining equations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2013, no. 1 (48), pp. 26–33 (in Russ.).

[15] Polizzotto C. Nonlocal elasticity and related variational principles. *Int. J. Solids Struct.*, 2001, vol. 38, iss. 42-43, pp. 7359–7380.

DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00039-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00039-7)

[16] Pisano A.A., Sofi A., Fuschi P. Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, iss. 21, pp. 3836–3849.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.07.009>

[17] Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Sokolov A.A. 2D nonlocal elasticity: investigation of stress and strain fields in complex shape regions. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2023, vol. 103, no. 3, art. e202200308. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202200308>

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Sokolov A.A. — Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kuvyrkin G.N., Sokolov A.A. Saint-Venant principle on problems of nonlocal elasticity theory. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 4 (109), pp. 4–17 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-4-17>