УДК 540.145 DOI: 10.18698/1812-3368-2023-4-108-122

КВАНТОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ В 1D КВАНТОВОМ КОЛОДЦЕ В СЛУЧАЕ МГНОВЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ДВИЖЕНИИ СТЕНКИ И МИКРОЧАСТИЦЫ

Н.И. Юрасов yurasovni@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача о нахождении энергетических уровней в 1D квантовом колодце в случае изменения его ширины с нерелятивистской скоростью. Согласно выполненному обзору литературы, точное решение известно только в случае нерелятивистского движения стенки 1D квантового колодца с постоянной скоростью. Показано, что движение с постоянной скоростью физически реализовать невозможно. Поэтому необходимо найти хотя бы малые области решения уравнения Шредингера для более широкого спектра нерелятивистских изменений ширины 1D квантового колодца. Представленные в предлагаемом исследовании результаты анализа показали, что такие области существуют. Найденные области соответствуют мгновенным стационарным состояниям, для которых выполнено условие квантования Бора. В этом случае условие Дирихле выполняется и на движущейся стенке. Это означает, что энергия уровня с номером n также становится функцией второго квантового числа k, которое учитывает динамическое изменение ширины 1D квантового колодца. Найдены варианты спектра второго квантового числа k и спектра квантового уровня в различных случаях непрерывного движения стенки с нулевой начальной скоростью и конечным ускорением. В рамках использованного анализа получены формулы для изменения разности энергий двух произвольных уровней. Выполнен анализ для границ скорости движения стенки и ширины 1D квантового колодца при рассмотрении нерелятивистской задачи. Обсуждаются полученные результаты и их возможные применения, включая анализ задач, связанных с нанотехнологией

Ключевые слова

1D квантовый колодец, движущаяся стенка, специальная форма решения, квантование ширины колодца, мгновенное стационарное состояние

Поступила 20.12.2022
Принята 18.01.2023

Введение. Рассмотрим вопрос о качественном изменении энергетического спектра частицы в 1D квантовом колодце (КК). Этого изменения можно достигнуть, например, введением силового поля [1]. В задачах с 2D КК для этого используется вариация их геометрической формы с введением параметра, меняющего тип граничных условий без их изменения во времени [2]. Трехмерные задачи такого типа обсуждались в [3]. Можно предположить, что граница КК является нестационарной. Это предположение анализировалось в [4–11]. Для движения стенки с постоянной скоростью точное решение получено разными методами [4–7, 9]. Впервые задача об одномерном КК с одной движущейся стенкой рассмотрена в [4]. Решение задачи искалось в виде суперпозиции функций

$$\psi(x,t)=\sum_n b_n(t)\,u_n(x,t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'},$$

где

$$u_n(x,t)=\left(\frac{2}{L(t)}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L(t)}\right);\quad E_n(t)=\frac{(\pi\hbar n)^2}{2mL(t)^2},$$

$L(t)$ — текущая ширина КК, координата частицы; t — время; m — масса частицы; $\hbar$ — постоянная Дирака; E_n — энергия n-го состояния. Такой вид решения соответствует методу разложения по мгновенным собственным функциям [12] и обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий Дирихле. При выполнении условия $dL(t)/dt=\mathrm{const}$ в [4] получена следующая волновая функция:

$$\psi_n(x,t)=\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}\sin\frac{\pi n x}{L(t)}e^{\left(i\alpha\xi\left(x/L\right)^2-in^2\pi^2(1-1/\xi)\frac{1}{4\alpha}\right)},\tag{1}$$

где $\xi=L(t)/L(0)$, $L_0=L(0)$, $\alpha=\left(\dfrac{m}{2\hbar}\right)L_0\left(\dfrac{dL}{dt}\right)$ — безразмерный скоростной параметр. Здесь использованы обозначения, принятые в [4]. В работе [5] утверждалось, что точное решение может быть получено для трех различных зависимостей от времени:

$$L=\left(\left(\frac{1}{C_1}\right)\left(C_1t+C_2\right)^2-\frac{B^2}{4C_1}\right)^{1/2},\quad L=a+bt,\quad L=L_0+Q\sin\omega t,$$

$$Q<0,\ Q=0,\ Q>0.$$

Формулы для временной эволюции энергии n-го уровня в [4, 5] не представлены. Изменение волновой функции в зависимости от числа отражений от стенки исследовано в [6]. Рассмотрено движение с постоянной скоростью. Численному анализу зависимостей плотности вероятности и среднего значения энергии от скорости движения стенки посвящена работа [7], в которой утверждается, что точное решение возможно только для движения стенки с постоянной скоростью. Общий анализ проблемы граничных условий в направлении модификации гамильтониана и переходу к фиксированным граничным условиям выполнен в [8]. Получено скоростное уравнение для энергии частицы для двух случаев: 1) $L = L_0 + Vt$; 2) $L = L_0(1+\sin\omega t)$. Анализ временной зависимости энергии n-го квантового состояния не проводился. Для ширины КК в [4–8] и здесь использовано одинаковое обозначение. Независимо от предыдущих работ в [9] получена волновая функция n-го квантового состояния:

$$\psi_n\left(\xi,\tau\right)=\left(\frac{2}{\pi\eta}\right)^{1/2}\sin\frac{n\xi}{\eta}\,e^{i\left(\frac{1}{4\eta}\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)\xi^2-n^2\int\limits_0^\tau\frac{d\tau'}{\left(\eta(\tau')\right)^2}\right)}, \tag{2}$$

где ξ, τ — безразмерные координата и время, $\xi=\pi x/L_0$, $\tau=E_1\left(0\right)t/\hbar$, $E_1\left(0\right)=\left(\pi\hbar\right)^2/\left(2mL_0^2\right)$; $\eta=L\left(t\right)/L_0$. Для величины η используем термин безразмерная ширина 1D КК. Уравнение Шредингера для n-го состояния в рассматриваемых координатах имело вид: $\psi_{n,\tau}=i\psi_{n,\xi\xi}$, где ψ_n — волновая функция частицы; запятая в нижнем индексе обозначает обычное дифференцирование. Формула (2) получена в [9] в неявном виде, поэтому здесь она приведена полностью. Сравним этот результат с волновой функцией (1). В экспонентах уменьшаемые имеют идентичную квадратичную зависимость от координаты и времени, а для вычитаемых идентичность в зависимости от времени не является очевидной. Выполним проверку на идентичность частей экспонент в (1) и (2), которые не содержат квадратичную зависимость от координаты. Сравним их в (1) и (2):

$$-i\pi^2n^2\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{1}{4\alpha}\ [4]$$

и

$$-in^2\int\limits_0^\tau\frac{d\tau'}{\left(\eta\left(\tau'\right)\right)^2}\ [9].$$

Обратим внимание на обозначения

$$\xi = \frac{L(t)}{L_0} \ [4]$$

и

$$\eta = \frac{L(t)}{L_0} \ [9].$$

При равномерном движении стенки относительная ширина КК определяется формулой $\eta = 1 + \nu\tau$ и формулу для параметра скорости сжатия α можно преобразовать к виду $\alpha = \pi^2\nu / 4,$ так как этот параметр равен

$$\frac{m}{2\hbar} L_0{}^2 \frac{E_1(0)}{\hbar} \frac{d\eta}{d\tau}.$$

Тогда сравниваемые величины идентичны.

Рассмотрим решение задачи при больших значениях времени в случае значительного уменьшения ширины 1D. С одной стороны, имеет место формула

$$\nu = \frac{\hbar V}{E_1(0) L_0},$$

которая связывает скорость стенки V и ее безразмерный аналог. С другой стороны, имеем равенство

$$\alpha = \frac{m L_0 V}{2\hbar}.$$

После введения модуля импульса частицы в основном состоянии $p_1 = \pi\hbar / L_0$ получаем

$$\alpha = \frac{mc\beta}{2 p_1} \cup \beta = \frac{2 p_1 \alpha}{mc},$$

где β — релятивистский параметр (относительная скорость).

Теперь оценим максимальную скорость движения стенки, которой соответствовал безразмерный скоростной параметр α в [4]. При $\alpha = -4$ для $L_0 = 10^{-9}$ м (1 нм) имеем следующую оценку: $\beta = 9,7 \cdot 10^{-3} \cong 10^{-2}$. Таким образом, при рассмотрении состояний с номером n порядка 10 в 1D КК шириной менее 1 нм нерелятивистский анализ решения теряет физический смысл.

Очевидно, что волновая функция (2) при переходе к задаче о неподвижных стенках КК плавно переходит в волновую функцию стандартного решения. Форма волновой функции (2) существенно удобнее для исследования, поэтому далее в расчетах будет использоваться только волновая функция (2). Первое слагаемое в экспонентах означает, что энергия частицы в динамическом КК зависит от координаты частицы. Этого не было в статическом КК. Динамическая зависимость энергии от координаты соответствует хаотическому движению или квантовому хаосу [2]. Следует отметить независимость хаотической компоненты энергии от номера уровня, что позволяет исключить ее при рассмотрении разности энергий уровней.

Обобщены методы в [10], которые применены в [4–8] для анализа КК со стенками, движущимися с постоянной скоростью. Эти методы расширены на случай медленного ускорения стенок в рамках приближенного решения без анализа временной зависимости энергии. Авторы работы [11] рассмотрели два связанных состояния в КК, когда стенка совершает колебательное движение. Исследование изменения энергии квантовых состояний в зависимости от времени в [11] не проводилось.

Движение стенки с постоянной скоростью как особый случай движения и уточнение задачи. Равенство $\eta = 1 + \nu\tau$ использовано в [4, 9] и предположено, что в начальный момент времени при $\tau = 0$ скорость стенки равна нулю, а ранее стенка покоилась. Это означает, что зависимость скорости от времени есть функция Хэвисайда $\theta(\tau)$: $\eta_{,\tau} = \nu_m \theta(\tau)$, где ν_m — постоянная, имеющая смысл безразмерной скорости. Тогда $\eta_{,\tau\tau}$ — ускорение, определяемое дельта-функцией Дирака $\delta(\tau)$. При такой постановке задачи стенка не обладает инерцией. Здесь имеем нефизическую особенность. Поэтому результаты всех работ, в которых рассматривался этот случай, должны существенно отличаться от рассмотрения, в котором этот случай заведомо исключен. Рассмотрим модельную зависимость скорости стенки от времени, в которой можно получить этот особый случай асимптотически:

$$\eta_{,\tau} = \nu_m \left(1 - e^{-\tau/\tau_0}\right), \tag{3}$$

где τ_0 — характеристическое время, или время инерции стенки. При переходе к пределу $\tau_0 \to 0$ модельная зависимость (3) приводится к отмеченному особому случаю. При переходе к пределу $\tau \to \infty$ получаем асимптотическое значение скорости ν_m. Проинтегрируем зависимость (3). Получаем зависимость для безразмерной ширины 1D КК:

$$\eta = 1 + \nu_m \tau - \nu_m \tau_0 \left(1 - e^{-\tau/\tau_0}\right). \tag{4}$$

В этом случае ускорение

$$\eta_{,\tau\tau} = \frac{\nu_m}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} \tag{5}$$

и при $\tau_0 = 0$, а также при $\tau = 0$, согласно (5), ускорение равно бесконечности. В результате выполненного анализа для получения физически реализуемого случая следует решать задачу способом, отличным от примененного в работах, опиравшихся на решение с постоянной скоростью. Как показало дальнейшее рассмотрение, это возможно при анализе изменения энергетических уровней в случае, когда безразмерная ширина 1D КК $\eta(\tau)$ принадлежит множеству гладких функций времени и учитывается двукратное вырождение уровня. Как показал выполненный обзор литературы, точное решение известно только в случае нерелятивистского движения стенки 1D КК с постоянной скоростью. В связи с этим следует найти хотя бы малые области такого вида решения для более широкого спектра нерелятивистских изменений ширины 1D КК. Результаты анализа, представленные в настоящей работе, показали существование таких областей. Выбран специальный вид решения уравнения Шредингера с начальным условием, которому соответствует при $t = 0$ начало движения стенки 1D КК и конечное значение ускорения. Условие Дирихле выполнялось на обеих стенках, и это привело к нетривиальному квантованию энергии уровней и нахождению искомых областей точных решений.

Собственные значения оператора импульса и координатная зависимость волновой функции. Рассмотрим уравнение на собственные значения оператора импульса, когда обе стенки неподвижны. Это уравнение в принятых здесь обозначениях имеет вид

$$\psi_{0n\pm,\,\xi} = \pm in\psi_{0n\pm}, \tag{6}$$

где $\psi_{0n\pm}$ — волновая функция n-го состояния, которое вырождено двукратно. В стационарном случае (стенки неподвижны) это уравнение для координатной части волновой функции. С момента начала движения стенки собственное значение импульса испытывает изменение в соответствии с зависимостью $\pm n \to \pm n/\eta$. Эту зависимость можно рационально представить, используя относительное смещение движущейся стенки из начального положения $\mathrm{X}(\tau) = \eta - 1$:

$$\pm\frac{n}{\eta} = \pm\frac{n}{1 + \mathrm{X}(\tau)} \cup \mathrm{X}(0) = 0.$$

Подставляя безразмерный импульс в (6), получаем уравнение, учитывающее изменение ширины 1D КК с движением стенки

$$\psi_{n\pm,\xi} = \pm i \frac{n}{1+\mathrm{X}(\tau)} \psi_{n\pm}, \tag{7}$$

где ψ_n — эффективная координатная часть волновой функции (умножение обеих частей уравнения (7) на произвольную функцию времени не изменяет решения этого уравнения). Решение уравнения (4) имеет вид

$$\psi_{n\pm} = e^{\pm i \frac{n\xi}{1+\mathrm{X}(\tau)}}.$$

Здесь знак «±» обозначает знак проекции импульса на направление оси x или ξ. Поэтому эффективная координатная часть волновой функции двукратно вырожденного n-го состояния имеет представление

$$\psi_n = C_1 e^{i \frac{n\xi}{1+\mathrm{X}(\tau)}} + C_2 e^{-i \frac{n\xi}{1+\mathrm{X}(\tau)}},$$

где C_1, C_2 — постоянные. Применяя условие Дирихле на неподвижной стенке $(\xi = 0)$, получаем $C_1 = -C_2$. Следовательно,

$$\psi_n = 2iC_1 \sin \frac{n\xi}{1+\mathrm{X}(\tau)}.$$

Координата движущейся стенки $\xi = \pi(1+\mathrm{X}(\tau))$, поэтому получаем

$$\psi_n(n\xi) = 2iC_1 \sin \pi n = 0.$$

Следовательно, на обеих стенках выполняется условие Дирихле и оно не зависит от закона, по которому начала двигаться стенка. Итак, найдена эффективная координатная часть волновой функции.

Мгновенные стационарные состояния. Используя полученные выше результаты, запишем равенство, которое выполняется в фиксированные моменты времени:

$$\sin(\pi n(1+\mathrm{X}(\tau))) = \sin(\pi(n \pm k)), \tag{8}$$

где n, k — целые положительные числа. Из формулы (8) следует общая зависимость

$$\mathrm{X}(\tau) = \pm \frac{k}{n}. \tag{9}$$

Определим множество значений k в зависимости от знака $\mathrm{X}(\tau)$. Если $\mathrm{X}(\tau) < 0,$ то множество значений k задается условием

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \cup k < n \cup \mathrm{X}(\tau) < 0. \quad (10)$$

Если $\mathrm{X}(\tau) > 0,$ то множество значений k определяется условием

$$k = 1, 2, 3, \ldots, \infty \cup k > n \cup \mathrm{X}(\tau) > 0. \quad (11)$$

Предположим, что временная часть волновой функции не имеет зависимости от координат. Используя связь импульса и длины волны де Бройля $\lambda_{\mathrm{Br}} p = 2\pi\hbar,$ а также формулу связи импульса и ширины КК

$$p = \frac{\pi\hbar n}{L_0 \left(1 + \mathrm{X}(\tau)\right)},$$

получаем, что формуле (8) соответствует условие

$$n \frac{\lambda_{\mathrm{Br}}}{2} = L_0 \left(1 + \mathrm{X}(\tau)\right). \quad (12)$$

Условие (12) определяет квантовое состояние, которое является мгновенным стационарным состоянием (МСС). Для МСС можно использовать формулу для энергии n-го состояния (в принятых обозначениях):

$$E_n = \frac{E_1(0)}{\left(1 + \mathrm{X}(\tau)\right)^2} n^2. \quad (13)$$

Формула (13) с помощью условия (9) приводится к универсальному представлению

$$E_{nk} = E_1(0) \frac{n^2}{\left(1 \pm k/n\right)^2}. \quad (14)$$

Если выполняется условие (10), то при равенстве $k = n$ энергия n-го уровня обращается в бесконечность согласно (14). При выполнении условия (11) и равенства $k = \infty$ энергия n-го уровня обращается в нуль согласно (14). Однако эти значения k физически недостижимы.

Квантование разности энергий уровней. Особый интерес представляет изменение разности энергий уровней. Это изменение относится к непосредственно наблюдаемым величинам. Введем обозначения для искомых энергетических уровней E_{nk1}, E_{nk2} и для их разности $E_{nk21} = E_{nk2} - E_{nk1}$. Используя (11), для МСС получаем

$$E_{nk21} = \left[\frac{n_2^2}{\left(1 \pm k / n_2\right)^2} - \frac{n_1^2}{\left(1 \pm k / n_1\right)^2} \right] E_1\left(0\right). \qquad (15)$$

Следовательно, разность энергий двух уровней E_{nk21} становится функцией не двух $\left(n_2, n_1\right)$, а трех квантовых чисел $\left(n_2, n_1, k\right)$. В целях анализа формулы (15) подробно рассмотрим ее вид при выполнении условий (10) и (11). Для этого приведем дроби в квадратных скобках к общему знаменателю. Если выполняется условие (10), то

$$E_{nk21} =$$

$$= \frac{n_2^2 - n_1^2 - 2k\left[\left(n_2^2 / n_1\right) - \left(n_1^2 / n_2\right)\right] + k^2\left[\left(n_2 / n_1\right)^2 - \left(n_1 / n_2\right)^2\right]}{\left(1 - k / n_2\right)^2 \left(1 - k / n_1\right)^2} E_1\left(0\right). \qquad (16)$$

Особенность формулы (16) — второе слагаемое в числителе имеет знак, отличный от первого и третьего. При выполнении условия (11) получаем

$$E_{nk21} =$$

$$= \frac{n_2^2 - n_1^2 + 2k\left[\left(n_2^2 / n_1\right) - \left(n_1^2 / n_2\right)\right] + k^2\left[\left(n_2 / n_1\right)^2 - \left(n_1 / n_2\right)^2\right]}{\left(1 + k / n_2\right)^2 \left(1 + k / n_1\right)^2} E_1\left(0\right). \qquad (17)$$

В отличие от (16) все слагаемые в числителе формулы (17) одного знака. При больших значениях времени в случае значительного уменьшения ширины 1D КК формула (16) неприменима.

Поскольку n_2, n_1, k — целые числа, разность фиксированных энергетических уровней при переходе между МСС испытывает скачкообразные изменения. Следовательно, получены общие формулы в случае МСС для изменения энергетических уровней при движении одной из стенок 1D КК. Рассмотрим применение этих формул к конкретным законам движения стенки. Все законы движения должны удовлетворять физическим условиям, т. е. если $\tau = 0$, то скорость стенки точно равна нулю, а ускорение конечное и отличное от нуля.

Дискретные времена, соответствующие МСС. Мгновенным стационарным состояниям соответствуют определенные моменты времени τ_{nk}, которые зависят от квантовых чисел n и k. Согласно (9), имеем уравнение

$$\mathrm{X}\left(\tau_{nk}\right) \mp \frac{k}{n} = 0.$$

Рассмотрим два случая движения стенки:

1) с ускорением

$$X(\tau) = \gamma\tau^{\alpha}, \ \alpha > 1, \tag{18}$$

2) колебательное

$$X(\tau) = \pm\varepsilon(1 - \cos\Omega\tau), \tag{19}$$

где ε — безразмерный параметр, удовлетворяющий условию $0 < \varepsilon < 1$; $\Omega = \omega / \omega_0$, ω — круговая частота колебаний стенки, $\omega_0 = \pi^2\hbar / (2mL_0^2)$ — частота, соответствующая энергии $E_1(0)$. Знаки «±» соответствуют началу движения с увеличением ширины 1D КК (+) и с уменьшением ширины 1D КК (–).

Согласно зависимости (18), для ускоренного движения:

$$\tau_{nk} = \left(\frac{1}{\gamma}\left(\pm\frac{k}{n}\right)\right)^{1/\alpha},$$

где выражение, которое возводится в дробную степень, всегда положительно, так как знак «–» во внутренних скобках соответствует условию $\gamma < 0$.

Перейдем к случаю, когда стенка совершает гармоническое колебание (19). Для τ_{nk} имеем уравнение

$$\cos\Omega\tau_{nk} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{k}{n} - 1 = 0. \tag{20}$$

Структура уравнения (18) накладывает и другие ограничения на второе слагаемое. Проанализируем их. Значения первого слагаемого могут быть в интервале $-1 \le \cos\Omega\tau_{nk} \le 1$. Верхняя граница не достигается, так как второе слагаемое больше нуля, поэтому

$$0 < \frac{1}{\varepsilon}\frac{k}{n} \le 2 \cup 0 < \varepsilon < 1 \cup 0 < \frac{k}{n} < 1. \tag{21}$$

Учитывая (10), (11) и приведенные выше результаты анализа, приходим к выводу, что условия (21) являются совместными. Корни уравнения (20) определяются аналитически:

$$\tau_{nk} = \frac{1}{\Omega}\left(\pm\arccos\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{k}{n}\right) + 2\pi s\right), \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

Во всех случаях величины τ_{nk} образуют элементы матрицы фиксированных моментов времени.

Обсуждение. Предложенный вариант решения задачи о движении нерелятивистской частицы в 1D КК с движущейся стенкой позволил найти области, где на временной шкале возможно получить точное решение нестационарного уравнения Шредингера с выполнением условий Дирихле на обеих стенках. Этот вариант решения основан на использовании двукратного вырождения уровней и применении физически осуществимых начальных условий движения стенки. В ходе решения последовательно применен принцип суперпозиции. В результате найдены квантовые состояния, аналогичные стационарным, существующие в фиксированные моменты времени. Эти состояния названы МСС. Для МСС так же, как и для стационарных состояний, выполняются условия квантования Бора и ширина 1D КК измеряется целым числом половинок длин волн де Бройля. Мгновенные стационарные состояния в фиксированные моменты времени являются точными решениями нестационарного уравнения Шредингера. При выполнении условия (10) для фиксированных моментов времени имеем треугольную матрицу, а при выполнении условия (11) — квадратную. Следовательно, выделены наблюдаемые величины и решена поставленная задача.

Полученные результаты и предлагаемый метод могут быть использованы при решении нестационарной задачи для квантовых ящиков различной геометрической формы с широким спектром временных зависимостей изменяемого размера. Новые возможности открываются для исследований физических процессов в объектах нанотехнологии (химические нанореакторы [13]), при анализе поведения волновых пакетов в квантовых резонаторах [14]. Полученные результаты могут быть использованы для развития спектроскопии Раби, например, в недавно исследованной задаче о поведении ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле Земли [15].

Выводы. Рассмотрена задача о нахождении энергетических уровней в 1D КК в случае изменения его ширины с нерелятивистской скоростью. Найдены области по шкале времени, где при законе движения стенки 1D КК, описываемой гладкой функцией времени, существуют МСС. Мгновенное стационарное состояние искалось с использованием физических условий начального состояния стенки, а именно, нулевой начальной скорости и конечного ненулевого ускорения. Мгновенные стационарные состояния являются аналогами стационарных, т. е. между стенками 1D КК реализуется стоячая волна с узлами на стенках. Стоячая волна существует только в определенные моменты времени, для которых получена общая формула. Найденная формула конкретизирована для двух случаев законов движения: 1) ускоренного; 2) колебательного. В случае МСС энергия уровня с номером *n* также становится функцией второго квантового числа *k*, которое учитывает динамическое изменение ширины 1D КК. Найдены варианты спектра второго квантового числа *k* и энергии квантового уровня. Получена формула для разности энергий двух произвольных уровней, применимая как при уменьшении, так и при увеличении ширины 1D КК.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору Л.К. Мартинсону за сотрудничество.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Акулин В.М. Динамика сложных квантовых систем. М., ФИЗМАТЛИТ, 2009.

[2] Stöckmann H.-J. Quantum chaos. Cambridge Univ. Press, 2000.

[3] Мигдал А.Б. Качественные методы в квантовой теории. М., Наука, 1975.

[4] Doescher S.W., Rice M.H. Infinite square-well potential with a moving wall. *Am. J. Phys.*, 1969, vol. 37, iss. 12, pp. 1246–1249. DOI: https://doi.org/10.1119/1.1975291

[5] Makowski A.J., Dembiñski S.T. Exactly solvable models with time-dependent boundary conditions. *Phys. Lett. A*, 1991, vol. 154, iss. 5-6, pp. 217–220. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90809-M

[6] Dodonov V.V., Klimov A.B., Nikonov D.E. Quantum particle in a box with moving walls. *J. Math. Phys.,* 1993, vol. 34, iss. 8, pp. 3391–3404. DOI: https://doi.org/10.1063/1.530083

[7] Morales D.A., Parra Z., Almeida R. On the solution of the Schrödinger equation with time dependent boundary conditions. *Phys. Lett. A*, 1994, vol. 185, iss. 3, pp. 273–276. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90615-7

[8] Fojón O., Gadella M., Lara L.P. The quantum square well with moving boundaries: a numerical analysis. *Comput. Math. with Appl.*, 2010, vol. 59, iss. 2, pp. 964–976. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.09.011

[9] Юрасов Н.И., Мартинсон Л.К. Движение микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с подвижной стенкой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 6 (63), с. 40–45. DOI: http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2015-6-40-45

[10] Cooney K. The infinite potential well with moving walls. *arXiv:1703.05282.* DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.05282

[11] Corrasco S., Rogan J., Valdivia J.A. Controlling the quantum state with a true varying potential. *Sci. Rep*., 2017, vol. 7, no. 1, pp. 13217–13223. DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-017-13313-3

[12] Schiff L.I. Quantum mechanics. McGraw-Hill, 1968.

[13] Wang D.H. Photodetachment of the H^- ion in a quantum well with one expanding wall. *Phys. Rev. A*, 2018, vol. 98, iss. 5, art. 053419. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.053419

[14] Wang D.H. Wang H., Mu H-F., et al. Wave packet dynamics for a system in the quantum well with one moving wall. *J. Optoelectron. Adv. Mater*., 2019, vol. 21, no. 5-6, pp. 343–356.

[15] Pitschmann M., Abele H. Schrödinger equation for a non-relativistic particle in a gravitational field confined by two vibrating mirrors. *arXiv:1912.12236.*
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.12236

Юрасов Николай Ильич — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Юрасов Н.И. Квантование энергетических уровней в 1D квантовом колодце в случае мгновенных стационарных состояний при нерелятивистском движении стенки и микрочастицы. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 4 (109), с. 108–122.
DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-108-122

ENERGY LEVEL QUANTIZATION IN THE 1D QUANTUM WELL IN CASE OF INSTANTANEOUS STATIONARY STATE WITH THE NON-RELATIVISTIC WALL AND PARTICLE MOTION

N.I. Yurasov yurasovni@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers the problem of finding energy levels in the 1D quantum well in case of its width alteration at the nonrelativistic rate. According to the reviewed literature, the exact solution is known only in the case of nonrelativistic motion of the 1D quantum well wall at the constant rate. It is shown that motion with the constant rate is physically unrealizable. Therefore, it is necessary to find at least small areas of the Schrödinger equation solution for a wider range of nonrelativistic alterations in the 1D quantum well width. Analysis results presented in the study show existence of such areas. The found areas correspond to the instantaneous stationary states satisfying the Bohr quantization condition. In this case, the Dirichlet condition is also satisfied on the moving wall. It means

Keywords

1D quantum well, moving wall, special solution form, well width quantization, instantaneous stationary state

that in this case energy of the level with the n number also becomes a function of the k second quantum number, which takes into account dynamic alteration in the 1D quantum well width. Variants were found of the k second quantum number spectrum and of the quantum level spectrum in various cases of the wall continuous motion with zero initial speed and finite acceleration. Within the framework of the analysis used, formulas were obtained to change the difference between energies of the two arbitrary levels. An analysis was made for the boundaries of the wall speed and the 1D quantum well width in considering the non-relativistic problem. The obtained results and their possible applications are under discussion, including analysis of the problems related to nanotechnology

Received 20.12.2022
Accepted 18.01.2023

REFERENCES

[1] Akulin V.M. Coherent dynamics of complex quantum systems. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006.

[2] Stöckmann H.-J. Quantum chaos. Cambridge Univ. Press, 2000.

[3] Migdal A.B. Kachestvennye metody v kvantovoy teorii [Qualitative methods in quantum theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975.

[4] Doescher S.W., Rice M.H. Infinite square-well potential with a moving wall. *Am. J. Phys.*, 1969, vol. 37, iss. 12, pp. 1246–1249. DOI: https://doi.org/10.1119/1.1975291

[5] Makowski A.J., Dembiñski S.T. Exactly solvable models with time-dependent boundary conditions. *Phys. Lett. A*, 1991, vol. 154, iss. 5-6, pp. 217–220. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90809-M

[6] Dodonov V.V., Klimov A.B., Nikonov D.E. Quantum particle in a box with moving walls. *J. Math. Phys.*, 1993, vol. 34, iss. 8, pp. 3391–3404. DOI: https://doi.org/10.1063/1.530083

[7] Morales D.A., Parra Z., Almeida R. On the solution of the Schrödinger equation with time dependent boundary conditions. *Phys. Lett. A*, 1994, vol. 185, iss. 3, pp. 273–276. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90615-7

[8] Fojón O., Gadella M., Lara L.P. The quantum square well with moving boundaries: a numerical analysis. *Comput. Math. with Appl.*, 2010, vol. 59, iss. 2, pp. 964–976. DOI: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.09.011

[9] Yurasov N.I., Martinson L.K. Microparticle movement in one-dimensional square potential well with mobile wall. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2015, no. 6 (63), pp. 40–45 (in Russ.). DOI: http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2015-6-40-45

[10] Cooney K. The infinite potential well with moving walls. *arXiv:1703.05282*. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.05282

[11] Corrasco S., Rogan J., Valdivia J.A. Controlling the quantum state with a true varying potential. *Sci. Rep.*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 13217–13223.
DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-017-13313-3

[12] Schiff L.I. Quantum mechanics. McGraw-Hill, 1968.

[13] Wang D.H. Photodetachment of the H^- ion in a quantum well with one expanding wall. *Phys. Rev. A*, 2018, vol. 98, iss. 5, art. 053419.
DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.053419

[14] Wang D.H. Wang H., Mu H-F., et al. Wave packet dynamics for a system in the quantum well with one moving wall. *J. Optoelectron. Adv. Mater.*, 2019, vol. 21, no. 5-6, pp. 343–356.

[15] Pitschmann M., Abele H. Schrödinger equation for a non-relativistic particle in a gravitational field confined by two vibrating mirrors. *arXiv:1912.12236.*
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.12236

Yurasov N.I. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Yurasov N.I. Energy level quantization in the 1D quantum well in case of instantaneous stationary state with the non-relativistic wall and particle motion. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 4 (109), pp. 108–122 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-4-108-122