

ВОЛНОВОЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ

В.Ф. Формалев

formalev38@yandex.ru

Б.А. Гарибян

bagarib@yandex.ru

С.А. Колесник

sergey@oviont.com

МАИ, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Приведены математическая модель и метод аналитического решения задачи теплопереноса в тонкой анизотропной пластине, компоненты тензора теплопроводности в которой зависят от температуры (нелинейные среды) под действием точечного источника тепловой энергии. Подбором цепочки автомодельных переменных задача Коши для нелинейного уравнения теплопереноса в анизотропной пластине сведена к нелинейной задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Его аналитическое решение показало волновой характер теплопереноса, когда область с возмущенным температурным распределением ограничена нестационарно подвижными эллипсами. В точках этих эллипсов наблюдаются разрывы тепловых характеристик — температуры, градиентов температуры, тепловых потоков, производных температуры по пространственным переменным второго, третьего порядков и далее. Установлено, что в нелинейной среде на плоских фронтах тепловых волн, каждая точка которых перемещается в различных направлениях и с различными скоростями, непрерывны температуры и нелинейные тепловые потоки, но разрывны градиенты температуры и производные второго, третьего порядков и далее по пространственным переменным. Полученные результаты подтверждают выводы о том, что источником волнового теплопереноса является нелинейность среды, т. е. зависимость характеристик теплопереноса от температуры

Ключевые слова

Теплопроводность, волновой теплоперенос, нелинейные теплофизические характеристики, анизотропия, температура, автомодельные переменные, тензор теплопроводности, фронт тепловой волны

Поступила 28.12.2022

Принята 31.01.2023

© Автор(ы), 2023

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта
РНФ (проект РНФ № 22-21-00776)*

Введение. При высокоинтенсивном нагреве тел теплоперенос в последних не подчиняется классическому закону Фурье, так как не учитывает дискретность среды. Так, в условиях теплового и механического ударов при запуске ядерных реакторов, гиперзвуковом полете летательных аппаратов в плотных слоях атмосферы, в релятивистской механике тепловые потоки распространяются с конечной скоростью и, следовательно, описываются уравнениями гиперболического типа в отличие от уравнения теплопереноса параболического типа в линейной среде на основе закона Фурье. В последнее время волновой теплоперенос на основе закона Вернотта — Каттанео — Лыкова (ВКЛ) исследован во многих работах. Например, в [1–3] такой теплоперенос рассмотрен в локально-неравновесных средах, когда тепловой поток отстает от градиента температуры на время релаксации. При анализе теплопереноса в нелинейных средах на основе закона ВКЛ в [4] теоретическим путем обнаружены тепловые ударные волны. Физические основы в локально-неравновесных средах довольно полно описаны в [5, 6]. Математическое моделирование волнового теплопереноса в локально-неравновесных средах рассмотрено в [7–9]. Волновой теплоперенос в локально-неравновесных средах на основе закона ВКЛ при воздействии на полубесконечное и ограниченное тела периодических температурных и тепловых импульсов, изолированных по времени, которые распространяются в теле как изолированные по пространственной переменной импульсы (тепловые солитоны), изучен в [10].

Теоретические основы режимов с обострением в задачах для квазилинейных уравнений параболического типа описаны в [11]. Такие режимы характеризуют волновой теплоперенос за счет нелинейности среды, связанной или с зависимостью теплопроводности материала тела от температуры или с наличием нелинейного источника тепловой энергии (неоднородность дифференциального уравнения теплопроводности). Указанная задача в [12] решена аналитически, также исследован эффект поглощения тепловой волны с фронтом, разделяющим возмущенную и холодную (начальной температуры) области. Волновой перенос тепловых и механических напряжений с двухфазным запаздыванием исследован в [13]. Необходимо отметить работы [14, 15], в которых описаны источники мощных излучений, их энергий, непрерывного или дискретного действия. С помощью плазменного разряда и действующей на него интенсивной ультразвуковой кавитации в [16–18] изучены процессы, близкие к абляции и пиролизу, с образованием наночастиц металлов и керамики.

Цель работы — формирование математической модели и метода получения нового аналитического решения задачи о волновом теплопере-

носе в анизотропной пластине с нелинейными свойствами под действием точечного источника тепловой энергии, определение геометрических и кинематических характеристик фронтов тепловых волн, анализ разрывов или непрерывностей тепловых характеристик (температуры, тепловых потоков, градиентов температуры и вторых производных температуры по пространственным переменным) на основе исследования аналитического решения и численных экспериментов.

Постановка задачи. Сформулируем задачу теплопереноса в анизотропной пластине толщиной δ , компоненты тензора теплопроводности которой

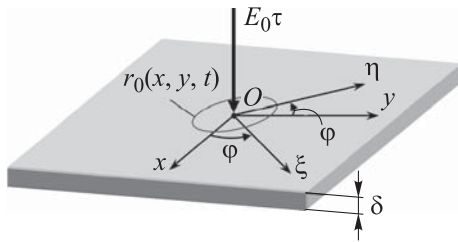


Рис. 1. Расчетная схема

являются степенными функциями температуры. Пластина находится под действием точечного источника тепловой энергии $E_0\tau$, приложенного в начале координат (рис. 1). Внутренняя граница пластины теплоизолирована, вследствие чего в нормальном к поверхности пластины направлении (по толщине пластины) температура постоянна. Теплота распространяется вдоль осей Ox , Oy декартовой системы координат.

Предположим, что вся поступающая в пластину тепловая энергия $E_0\tau$ аккумулируется в ней и является постоянной величиной (не изменяющейся во времени).

В соответствии с этими допущениями математическая формулировка задачи относительно температуры $T(x, y, t)$ имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$\{x, y\} \in (-\infty, \infty), \quad t > 0; \tag{1}$$

$$c\rho\delta \iint_S T(x, y, t) dx dy = E_0\tau \delta(x-0) \delta(y-0) \delta(t-0) = \text{const}, \tag{2}$$

$$T(x, y, 0) = 0, \quad \{x, y\} \in (-\infty, \infty), \quad t = 0. \tag{3}$$

Здесь c — теплоемкость; ρ — плотность; t — время; λ_{xx} , λ_{xy} , λ_{yx} , λ_{yy} — компоненты тензора теплопроводности; δ — толщина пластины; S —

площадь поверхности пластины; E_0 — мощность, подведенная к пластине в течение малого промежутка времени τ так, что $E_0\tau$ — подводимая энергия (Дж); $\delta(x-0)$, $\delta(y-0)$, $\delta(t-0)$ — дельта-функции Дирака.

Компоненты $\lambda_{xx}(T)$, $\lambda_{xy}(T)$, $\lambda_{yx}(T)$, $\lambda_{yy}(T)$ тензора теплопроводности в декартовой системе координат определяются через его главные компоненты $\lambda_\xi(T)$, $\lambda_\eta(T)$ и угол φ ориентации главных осей $O\xi$, $O\eta$ относительно осей Ox , Oy следующим образом [1]:

$$\begin{aligned}\lambda_{xx}(T) &= \lambda_\xi(T) \cos^2 \varphi + \lambda_\eta(T) \sin^2 \varphi, \\ \lambda_{xy}(T) &= \lambda_{yx}(T) = (\lambda_\xi(T) - \lambda_\eta(T)) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \lambda_{yy}(T) &= \lambda_\xi(T) \sin^2 \varphi + \lambda_\eta(T) \cos^2 \varphi.\end{aligned}\tag{4}$$

В соответствии с тем, что тензор теплопроводности симметричен $\lambda_{xy}(T) = \lambda_{yx}(T)$, смешанные производные в (1) равны между собой.

Представим главные компоненты тензора теплопроводности в виде

$$\lambda_\xi = k_\xi T^\sigma, \quad \lambda_\eta = k_\eta T^\sigma,\tag{5}$$

где k_ξ , k_η — постоянные величины, Вт/(м · К $^{\sigma+1}$), σ — показатель степени.

Метод решения. Для исключения смешанных производных в задаче (1)–(5) используем преобразование поворота декартовой системы координат вокруг центра O на угол φ :

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ \eta &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi\end{aligned}\tag{6}$$

с дальнейшей подстановкой (6) в соотношения (1)–(3), тогда получим (дельта-функции опущены):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k_\xi T^\sigma \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k_\eta T^\sigma \frac{\partial T}{\partial \eta} \right), \quad \{\xi, \eta\} \in (-\infty, \infty), \quad t > 0;\tag{7}$$

$$\iint_S T(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = \frac{E_0\tau}{c\rho\delta} = \text{const}, \quad (\xi, \eta) \in (-\infty, \infty), \quad t > 0;\tag{8}$$

$$T(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \{\xi, \eta\} \in (-\infty, \infty), \quad t = 0.\tag{9}$$

Введем новую пространственную систему координат:

$$x_1 = \xi (L/k_\xi)^{1/2}, \quad x_2 = \eta (L/k_\eta)^{1/2},\tag{10}$$

L — любое значение нелинейной теплопроводности (например, $L = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}^{\sigma+1})$), из (7)–(9) получим задачу для изотропного тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + a \frac{\partial}{\partial x_2} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x_2} \right), \quad \{x_1, x_2\} \in (-\infty, \infty), \quad t > 0; \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \iint_S T(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}, \quad \{x_1, x_2\} \in (-\infty, \infty), \quad t > 0, \quad (12)$$

где $a = L / (c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/(\text{с} \cdot \text{К}^\sigma)$;

$$T(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \{x_1, x_2\} \in (-\infty, \infty), \quad t = 0. \quad (13)$$

Решение задачи будем искать в автомодельном виде

$$T(x_1, x_2, t) = t^\alpha \theta(q_1, q_2), \quad (14)$$

где $\theta(q_1, q_2)$ — функция автомодельных переменных $q_1, q_2, \text{К}/\text{с}^\alpha$,

$$q_1 = \frac{x_1}{t^\beta}; \quad q_2 = \frac{x_2}{t^\beta}. \quad (15)$$

В выражениях (14), (15) показатели α, β определим подстановкой (14), (15) в задачу (11)–(13):

$$\begin{aligned} & t^{\alpha-1} \left[\alpha \theta(q_1, q_2) - \beta \left(q_1 \frac{\partial \theta}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) \right] = \\ & = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta} a \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\theta^\alpha \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\theta^\alpha \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) \right], \\ & \{q_1, q_2\} \in (-\infty, \infty), \quad t > 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$t^{\alpha+2\beta} \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \iint_S \theta(q_1, q_2) dq_1 dq_2 = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}, \quad \{q_1, q_2\} \in (-\infty, \infty), \quad t > 0; \quad (17)$$

$$\theta(q_1, q_2) = 0, \quad \{q_1, q_2\} \in (-\infty, \infty). \quad (18)$$

Из (16) и (7) формируются два линейных относительно α, β уравнения

$$\alpha - 1 = \alpha(\sigma + 1) - 2\beta, \quad \alpha + 2\beta = 0,$$

из которых следует

$$\alpha = -\frac{1}{\sigma+1}; \quad \beta = \frac{1}{2(\sigma+1)}. \quad (19)$$

Таким образом, из (16)–(19) получаем стационарную нелинейную задачу теплопроводности относительно функции $\theta(q_1, q_2)$:

$$a \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + a \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{2(\sigma+1)} \left(q_1 \frac{\partial \theta}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{\sigma+1} \theta = 0, \\ \{q_1, q_2\} \in (-\infty, \infty); \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \iint_S \theta(q_1, q_2) dq_1 dq_2 = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}, \quad \{q_1, q_2\} \in (-\infty, \infty). \quad (21)$$

Пусть функция $\theta(q_1, q_2)$ — центрально симметрична относительно центра $O(0, 0)$ (см. рис. 1), т. е. зависит от одной пространственной переменной. Следовательно, в полярных координатах

$$q_1 = r \cos \gamma, \quad q_2 = r \sin \gamma, \quad r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \varphi = \arctg(q_2 / q_1) \quad (22)$$

производные первого порядка в уравнении (20) исчезают, и задача (20), (21) трансформируется в задачу Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка относительно функции $\theta(r)$:

$$\frac{a}{r} \frac{d}{dr} \left(r \theta^\sigma \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{r}{2(\sigma+1)} \frac{d\theta}{dr} + \frac{1}{\sigma+1} \theta = 0, \quad r \in (0, \infty); \quad (23)$$

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \int_r r \theta(r) dr = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}, \quad r \in (0, \infty). \quad (24)$$

При переходе в интеграле (21) к полярным координатам (22) якобиан перехода равен r , интеграл по γ — 2π .

Функция $\theta(q_1, q_2)$ является центрально симметричной и трансформируется в функцию $\theta(r)$, тогда в уравнении (23) при $r=0$ должно выполняться условие симметрии

$$\theta^\sigma \frac{d\theta(0)}{dr} = 0, \quad r = 0, \quad (25)$$

т. е. задачу (23), (24) можно представить как

$$\left(r \theta^\sigma \theta'(r) \right)' + \frac{1}{2a(\sigma+1)} \left(\theta r^2 \right)' = 0; \quad (26)$$

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \int_r r \theta(r) dr = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}; \quad (27)$$

$$\theta^\sigma \theta'(r) = 0. \quad (28)$$

Первый интеграл уравнения (26) равен

$$r\theta^\sigma \theta'(r) + \frac{1}{2a(\sigma+1)} r^2 \theta = C_1,$$

где $C_1 = 0$ в силу условия (28) при $r = 0$.

Следовательно, из (26)–(28) получим задачу

$$r\theta^\sigma \theta'(r) + \frac{r^2 \theta}{2a(\sigma+1)} = 0, \quad (29)$$

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \int_r r \theta(r) dr = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta} = \text{const}. \quad (30)$$

Решение ОДУ с разделяющимися переменными (29) имеет вид

$$\theta(r) = \left(\frac{\sigma}{4a(1+\sigma)} (r_0^2 - r^2) \right)^{1/\sigma}, \quad (31)$$

где

$$\frac{r_0^2}{4a} \frac{\sigma}{1+\sigma}$$

— постоянная интегрирования; r_0 может быть определено из условия постоянства энергии (30).

Из (30) и (31) следует, что

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \left(\frac{\sigma}{4a(1+\sigma)} \right)^{1/\sigma} \int_r (r_0^2 - r^2)^{1/\sigma} dr = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}, \quad r \in (0, \infty). \quad (32)$$

Интеграл в левой части выражения (32) вычисляется в квадратурах, для чего он преобразуется к виду (r/r_0 изменяется от 0 до 1):

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{L} \left(\frac{1}{4a} \frac{\sigma}{1+\sigma} \right)^{1/\sigma} (r_0^2)^{(\sigma+1)/\sigma} \int_0^1 \left(\frac{r}{r_0} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{1/\sigma} d\left(\frac{r}{r_0} \right) = \frac{E_0 \tau}{c\rho\delta}, \quad (33)$$

тогда

$$\int_0^1 \left(\frac{r}{r_0} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{1/\sigma} d \left(\frac{r}{r_0} \right) = \frac{\sigma/2}{1+\sigma}, \quad (34)$$

где $1 + 1/\sigma > 0$.

Объединяя (33) и (34), находим

$$r_0^2 = a \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right) \left(\frac{4^{1/\sigma} E_0 \tau}{\pi \delta \sqrt{k_\xi k_\eta}} \right)^{\sigma/(\sigma+1)}. \quad (35)$$

Таким образом, выражения (31) и (35) определяют решение задачи (26)–(28), а через (14) — решение задачи (11), (12). Возвращаясь к декартовым координатам, с учетом выражений (6), (10), получаем решение искомой задачи (1)–(3):

$$T(x, y, t) = \frac{1}{t^{1/(\sigma+1)}} \left(\frac{\sigma}{4a(1+\sigma)} \right)^{1/\sigma} \times \left\{ r_0^2 - \left[\frac{(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2}{\left(t^{1/(2\sigma+2)} \sqrt{k_\xi / L} \right)^2} + \frac{(-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2}{\left(t^{1/(2\sigma+2)} \sqrt{k_\eta / L} \right)^2} \right] \right\}^{1/\sigma}. \quad (36)$$

Если выражение в фигурных скобках в (36) равно нулю, то $T(x, y, t) = 0$ и кривая

$$\frac{(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2}{l_\xi^2} + \frac{(-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2}{l_\eta^2} = 1, \quad (37)$$

где

$$l_\xi = r_0 t^{1/(2\sigma+2)} \sqrt{\frac{k_\xi}{L}}; \quad l_\eta = r_0 t^{1/(2\sigma+2)} \sqrt{\frac{k_\eta}{L}} \quad (38)$$

определяют фронт $r_0(x, y, t)$, разделяющий области пластины с ненулевой температурой и нулевой температурой. Эти области ограничены эллипсами с полуосями (38) вдоль главных осей $O\xi$, $O\eta$.

Из (34), (35) следует, что $\sigma \neq -1$, $\sigma \neq 0$ для нелинейной задачи, так как $\sigma = 0$ — случай линейной исходной задачи. Кроме того, из условия $1 + 1/\sigma > 0$ следует $\sigma \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

Результаты анализа. Согласно результатам анализа выражения (36), на фронте бегущей тепловой волны в точках с координатами x, y, t , расположенных на эллипсах с полуосями l_ξ, l_η (38), температура непрерывна, производные первого порядка по пространственным переменным

разрывны, плотности тепловых потоков за счет наличия множителя T^σ непрерывны, а вторые производные температуры по пространственным переменным — разрывны.

Распределения температуры вдоль каждой координатной оси при трех фиксированных моментах времени, полученные по (35), (36), показаны на рис. 2. Входные данные для расчета: $\sigma = 1,0$, $\sigma = 1,2$, $\sigma = 1,5$; $\varphi = 0$; $k_\xi = 5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}^{\sigma+1})$; $k_\eta = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}^{\sigma+1})$; $c\rho = 10^7 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$; $\delta = 2 \text{ мм}$; $E_0\tau = 1 \text{ кДж}$. Результаты приведены в плоскостях сечений $y=0$ и $x=0$. При этом $E_0\tau / (c\rho)$ в соответствии с (35) входит в выражение для r_0^2 , характеризующего координаты границы фронта тепловой волны.

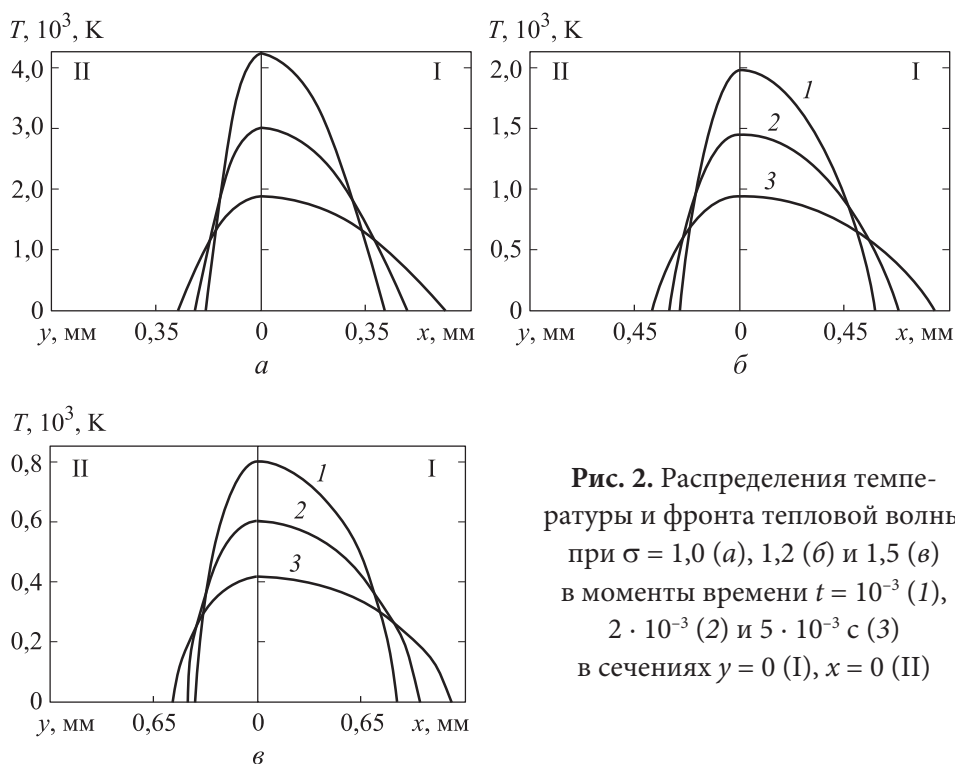


Рис. 2. Распределения температуры и фронта тепловой волны при $\sigma = 1,0$ (а), $1,2$ (б) и $1,5$ (в) в моменты времени $t = 10^{-3}$ (1), $2 \cdot 10^{-3}$ (2) и $5 \cdot 10^{-3}$ с (3) в сечениях $y = 0$ (I), $x = 0$ (II)

Зависимости подтверждают волновой характер распределения температуры с фронтом тепловой волны на изотермах $T(x, y, t) = 0$, описываемых эллипсами с полуосями (38). При $t \rightarrow +0$ решение (36) стремится к дельта-функции.

Согласно зависимостям на рис. 2, областями ненулевого решения в различные моменты времени являются области, ограниченные эллипсами с разными скоростями распространения тепловых волн в различных направлениях.

Для любого угла φ из выражения (36) находим координаты x фронта тепловой волны при $y=0$ и координаты y при $x=0$, когда $T(x, y, t) = 0$:

$$x = r_0 t^{1/(2\sigma+2)} \left(\frac{L}{k_\xi} \cos^2 \varphi + \frac{L}{k_\eta} \sin^2 \varphi \right)^{-1/2},$$

$$y = r_0 t^{1/(2\sigma+2)} \left(\frac{L}{k_\xi} \sin^2 \varphi + \frac{L}{k_\eta} \cos^2 \varphi \right)^{-1/2},$$

откуда определяются скорости движения точек фронта тепловой волны:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{r_0}{2\sigma+2} \left(\frac{L}{k_\xi} \cos^2 \varphi + \frac{L}{k_\eta} \sin^2 \varphi \right)^{-1/2} t^{-(2\sigma+1)/(2\sigma+2)},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{r_0}{2\sigma+2} \left(\frac{L}{k_\xi} \sin^2 \varphi + \frac{L}{k_\eta} \cos^2 \varphi \right)^{-1/2} t^{-(2\sigma+1)/(2\sigma+2)}.$$

Результаты показывают, что чем ближе время к начальному моменту времени, тем выше температура, которая резко снижается с увеличением времени. Так, для $\sigma = 1,0$ в момент времени $t = 10^{-3}$ с температура в начале координат составляет примерно 4000 К, а при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с — около 2000 К. При миллисекундных длительностях температура в начале координат может значительно превышать температуру фазовых переходов любых материалов. При возрастании σ она резко снижается, так как с увеличением теплопроводности тепловая энергия интенсивнее отводится на периферию от места приложения источника энергии. Так, для $\sigma = 1,2$ при $t = 10^{-3}$ с температура в начале координат составляет примерно 2000 К, при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с — около 1000 К, а для $\sigma = 1,5$ примерно 800 и 400 К соответственно.

Выводы. Рассмотрены постановка и метод получения аналитического решения задач теплопроводности с нелинейными теплофизическими характеристиками в анизотропном пространстве от импульсного источника тепловой энергии.

Установлено, что процесс теплопереноса носит волновой характер, определяемый теплопроводностью в виде степенной функции температуры, с четко выраженным фронтом тепловой волны, нестационарно продвигающемуся по холодному пространству. В соответствии с анизотропным характером теплопереноса в двумерном случае фронты тепловых волн нестационарно подвижны и имеют форму эллипсов.

На фронтах тепловых волн температура непрерывна, а первые и вторые производные температуры по пространственным переменным разрывны, тогда как плотности тепловых потоков непрерывны вследствие наличия сомножителя T^σ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Формалев В.Ф., Карташов Э.М., Колесник С.А. Моделирование неравновесного теплопереноса в анизотропном полупространстве под воздействием точечного источника теплоты. *Инженерно-физический журнал*, 2019, т. 92, № 6, с. 2585–2594.
- [2] Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: application to size-dependent thermal conductivity in nano-films. *J. Heat Mass Transf.*, 2017, vol. 108, part A, pp. 933–939. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.051>
- [3] Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., et al. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space–time nonlocality. *Combust. Explos. Shock Waves*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 649–653. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508218060035>
- [4] Формалев В.Ф., Гарибян Б.А., Колесник С.А. Математическое моделирование динамики тепловых ударных волн в нелинейных локально-неравновесных средах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 4 (103), с. 80–94. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-80-94>
- [5] Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *УФН*, 1997, т. 167, № 10, с. 1095–1106. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>
- [6] Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. М., URSS, 2004.
- [7] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии. *ТВТ*, 2003, т. 41, № 2, с. 300–309.
- [8] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Волновой теплоперенос в ортотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии. *ТВТ*, 2018, т. 56, № 5, с. 756–760. DOI: <https://doi.org/10.31857/s004036440003371-2>
- [9] Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., et al. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200-201, pp. 231–241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>
- [10] Формалев В.Ф., Карташов Э.М., Колесник С.А. О динамике движения и отражения температурных солитонов при волновом теплопереносе в ограниченных областях. *ИФЖ*, 2020, т. 93, № 1, с. 11–17.
- [11] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987.

[12] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 5 (86), с. 35–49.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>

[13] Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Оценки температурных напряжений в моделях динамической термоупругости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 1 (100), с. 88–106.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-88-106>

[14] Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical simulation of pulsed jets of a high-current pulsed surface discharge. *Comput. Therm. Sci.*, 2021, vol. 13, iss. 2, pp. 45–56.

DOI: <https://doi.org/10.1615/ComputThermalScien.2020034742>

[15] Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. The qualitative and quantitative study of radiation sources with a model configuration of the electrode system. *Symmetry*, 2021, vol. 13, iss. 6, art. 927. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13060927>

[16] Bulychev N.A. Preparation of stable suspensions ZnO nanoparticles with ultrasonically assisted low-temperature plasma. *Nanosci. Technol.*, 2021, vol. 12, iss. 3, pp. 91–97.

DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2021038033>

[17] Bulychev N.A. Obtaining of gaseous hydrogen and silver nanoparticles by decomposition of hydrocarbons in ultrasonically stimulated low-temperature plasma. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 50, pp. 21323–21328.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.04.288>

[18] Bulychev N.A. Synthesis of gaseous hydrogen and nanoparticles of silicon and silica by pyrolysis of tetraethoxysilane in an electric discharge under the ultrasonic action. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 84, pp. 35581–35587.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.08.163>

Формалев Владимир Федорович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4).

Гарибян Борис Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Колесник Сергей Александрович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Формалев В.Ф., Гарибян Б.А., Колесник С.А. Волновой теплоперенос в анизотропной пластине под действием точечного источника тепловой энергии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 5 (110), с. 48–62. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-5-48-62>

**WAVE HEAT TRANSFER IN AN ANISOTROPIC PLATE
UNDER ACTION OF THE THERMAL ENERGY POINT SOURCE**

V.F. Formalev

formalev38@yandex.ru

B.A. Garibyan

bagarib@yandex.ru

S.A. Kolesnik

sergey@oviont.com

**Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper presents mathematical model and method for analytical solution of the heat transfer problem in a thin anisotropic plate, which thermal conductivity tensor components depend on the temperature (non-linear media) and exposed to action of the thermal energy point source. By selecting a chain of self-similar variables, the Cauchy problem for nonlinear heat transfer equation in the anisotropic plate was reduced to the nonlinear Cauchy problem for the ordinary differential equation. Its analytical solution showed the heat transfer wave nature, when the region with perturbed temperature distribution was bounded by the non-stationary moving ellipses. Discontinuities in thermal characteristics were observed at points of those ellipses, including temperature, temperature gradients, heat fluxes and temperature derivatives with respect to spatial variables of the second and third orders and above. It was established that temperature and non-linear heat fluxes were not disrupted in the nonlinear medium in the thermal wave plane fronts, where each point was moving in different directions and with different velocities, but temperature gradients and derivatives of the second, third orders and further were disruptive in space variables. The results obtained confirm conclusions that the wave heat transfer source is the medium nonlinearity, i.e., the heat transfer characteristics dependence on the temperature

Keywords

Thermal conductivity, wave heat transfer, nonlinear thermal characteristics, anisotropy, temperature, self-similar variables, thermal conductivity tensor, thermal wave front

Received 28.12.2022

Accepted 31.01.2023

© Author(s), 2023

The work was carried out with the state financial support of the Russian Foundation for Basic Research (RFBR project no. 22-21-00776)

REFERENCES

- [1] Formalev V.F., Kartashov É.M., Kolesnik S.A. Simulation of nonequilibrium heat transfer in an anisotropic semispace under the action of a point heat source. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2019, vol. 92, no. 6, pp. 1537–1547.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02074-7>
- [2] Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: application to size-dependent thermal conductivity in nano-films. *J. Heat Mass Transf.*, 2017, vol. 108, part A, pp. 933–939. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.051>
- [3] Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., et al. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space–time nonlocality. *Combust. Explos. Shock Waves*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 649–653.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010508218060035>
- [4] Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A. Mathematical simulation of thermal shock wave dynamics in nonlinear local non-equilibrium media. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 4 (103), pp. 80–94 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-4-80-94>
- [5] Sobolev S.L. Local non-equilibrium transport models. *Phys.-Usp.*, 1997, vol. 40, no. 10, pp. 1043–1053. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292>
- [6] Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovskiy S.Yu. *Volnovye yavleniya teploprovodnosti* [Wave phenomena of heat conduction]. Moscow, URSS Publ., 2004.
- [7] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes under intense thermal effect. *High Temp.*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 257–265.
DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023390021091>
- [8] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Wave heat transfer in the orthotropic half-space under the action of a nonstationary point source of thermal energy. *High Temp.*, 2018, vol. 56, no. 5, pp. 727–731.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X18050073>
- [9] Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., et al. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 200–201, pp. 231–241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>
- [10] Formalev V.F., Kartashov É.M., Kolesnik S.A. On the dynamics of motion and reflection of temperature solitons in wave heat transfer in limited regions. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2020, vol. 93, no. 1, pp. 10–15.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02085-9>
- [11] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., et al. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Blow-up regimes in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987.
- [12] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Herald of the Bauman Mos-*

cow State Technical University, Series Natural Sciences, 2019, no. 5 (86), pp. 35–49 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>

[13] Nenakhov E.V., Kartashov E.M. Estimates of thermal stresses in models of dynamic thermoelasticity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 1 (100), pp. 88–106 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-88-106>

[14] Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical simulation of pulsed jets of a high-current pulsed surface discharge. *Comput. Therm. Sci.*, 2021, vol. 13, iss. 2, pp. 45–56.

DOI: <https://doi.org/10.1615/ComputThermalScien.2020034742>

[15] Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. The qualitative and quantitative study of radiation sources with a model configuration of the electrode system. *Symmetry*, 2021, vol. 13, iss. 6, art. 927. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13060927>

[16] Bulychev N.A. Preparation of stable suspensions ZnO nanoparticles with ultrasonically assisted low-temperature plasma. *Nanosci. Technol.*, 2021, vol. 12, iss. 3, pp. 91–97.

DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2021038033>

[17] Bulychev N.A. Obtaining of gaseous hydrogen and silver nanoparticles by decomposition of hydrocarbons in ultrasonically stimulated low-temperature plasma. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 50, pp. 21323–21328.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.04.288>

[18] Bulychev N.A. Synthesis of gaseous hydrogen and nanoparticles of silicon and silica by pyrolysis of tetraethoxysilane in an electric discharge under the ultrasonic action. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 84, pp. 35581–35587.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.08.163>

Formalev V.F. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Garibyan B.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Kolesnik S.A. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A. Wave heat transfer in an anisotropic plate under action of the thermal energy point source. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 5 (110), pp. 48–62 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-5-48-62>