

НОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Э.М. Карташов

professor.kartashov@gmail.com

РГУ МИРЭА, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Развиты обобщенные модельные представления локально-неравновесного теплопереноса в терминах теории нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа. Модель включает в себя одновременно три системы координат: 1) декартовы координаты–массивное тело, ограниченное плоской поверхностью (одномерный случай); 2) сферические координаты–массивное тело с внутренней сферической полостью (центральной симметрия); 3) цилиндрические координаты–массивное тело с внутренней цилиндрической полостью (радиальный поток теплоты). Рассмотрены три вида интенсивного нагрева (охлаждения): 1) температурный; 2) тепловой; 3) нагрев средой. Приведены примеры локально-неравновесного теплообмена, имеющего волновой характер, с учетом конечной скорости распространения теплоты. Волновой характер выражается наличием ступенчатой функции Хэвисайда в аналитическом решении базовых задач для частично ограниченных областей. Построены изохроны для температурных функций. Показано, что на поверхности фронта бегущей волны температурный профиль имеет разрыв. Это приводит к задерживанию оттока теплоты за границу разрыва — характерная особенность аналитических решений волновых уравнений. Приведены функциональные конструкции аналитических решений базовых задач локально-неравновесного теплообмена в области с движущейся во времени границей — практически новый случай в аналитической теплофизике. Представленные результаты имеют практическое применение

Ключевые слова

Обобщенные математические модели, локально-неравновесный теплообмен, области с подвижной границей

Поступила 25.01.2023

Принята 13.06.2023

© Автор(ы), 2023

Введение. В последние годы усилился интерес к изучению различных локально-неравновесных процессов, связанных с переносом энергии (теплоты, массы, импульса или их аналогов). С одной стороны, это связано с естественным направлением развития науки — от равновесных в целом систем к локально-равновесным и далее к локально-неравновесным. С другой стороны, интенсификация различного рода технологических процессов, использование материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), возможность получения сверхвысоких (или сверхнизких) температур и давлений объясняют с практической точки зрения необходимость математического описания систем и физических процессов в экстремальных, локально-неравновесных условиях. Изучение таких систем может быть основано на различных версиях локально-неравновесной термодинамики: кинетических, молекулярно-динамических, феноменологических. Наибольшее развитие получила феноменологическая теория Максвелла — Каттанео — Лыкова — Вернотта, учитывающая инерцию теплового потока, связанную с конечной скоростью распространения теплоты в твердых телах. С точки зрения модельных представлений эта теория приводит к краевым задачам для уравнений гиперболического типа. Математические модели в виде краевых задач для уравнений гиперболического типа называют краевыми задачами обобщенного типа, которые значительно отличаются от классических на основе феноменологии Фурье по сложности их решения. Их специфика заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудности решения в аналитически замкнутом виде. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении точных аналитических решений таких задач и в основном для частично ограниченной области в декартовой системе координат при граничных условиях первого рода (температурный нагрев). Наиболее приемлемый метод их решения — операционный, но он приводит к аналитическим решениям в пространстве изображений по Лапласу в виде сложных функциональных конструкций, оригиналы которых не содержатся в справочниках по операционному исчислению. На этом пути возникают серьезные трудности вычислительного характера.

Рассмотрена открытая проблема аналитической теплофизики в терминах обобщенной модели локально-неравновесного теплообмена. Исследована проблема тепловой реакции на нагрев (охлаждение) массивного тела, ограниченного изнутри плоской поверхностью (упругое полупространство в декартовой системе координат), цилиндрической поверхностью (упругое пространство в цилиндрической системе координат с внутренней цилиндрической

дрической полостью) или сферической поверхностью (упругое пространство в сферической системе координат с внутренней сферической полостью). Рассмотрены такие случаи интенсивного нагрева (охлаждения) границы тела (области), как температурный, тепловой, средой. Следует отметить, что развитие обобщенных гиперболических моделей, затрагивающих многочисленные практические приложения, — одно из направлений аналитической теории теплопроводности, которое не получило развития до настоящего времени. Рассмотрены принципиально новые случаи локально-неравновесного теплообмена в области с движущейся во времени границей, которые не были описаны в литературе.

Цель работы — описать функциональные конструкции в качестве аналитических решений обобщенных краевых задач нестационарного теплопереноса одновременно в трех системах координат и в условиях нагрева (охлаждения).

Обобщенные модельные представления для локально-неравновесного теплообмена. Классические модели аналитической теории переноса теплоты обязаны появлением линейно-градиентного соотношения

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t),$$

которое Ж.-Б. Фурье предложил в докладе «О распространении тепла в твердом теле» (Париж, 1807). Окончательно Фурье представил теорию в 1822 г. в работе «Аналитическая теория тепла», которую У. Кельвин назвал «великой математической моделью» [1]. Совместно с уравнением энергии для изотропных твердых тел

$$c_p \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{q}(M, t) + F(M, t)$$

закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса вида

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{c_p} F(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

и соответствующим для (1) краевым задачам с начальными и граничными условиями

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \beta_3 \varphi(M, t), \quad M \in S, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь D — конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x, y, z)$; S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; \bar{n} — внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный в точках S). Входящие в (1)–(3) параметры — теплофизические характеристики среды — постоянные величины в интервале значений температуры, не выходящих за точки перехода [2]. В литературе неоднократно отмечались некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (1)–(3):

– отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье ввиду неучета механизма переноса теплоты элементарными частицами вещества (электронами, молекулами, ионными решетками) и времени релаксации, связанного со временем свободного пробега микрочастиц и, как следствие, вытекающего из аналитических решений моделей (1)–(3) вывода о бесконечной скорости распространения теплоты;

– сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области $x > 0, t > 0$ при $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$).

Тем не менее перечисленные парадоксы не ограничивают область применения математических моделей (1)–(3), охватывая все новые содержательные объекты и все большее число самых разнообразных приложений [3–8]. В последние годы усилился интерес к изучению процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях, что обусловлено широкими возможностями их практического применения [9–12]: создание новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико-химическими свойствами (бинарные многокомпонентные металлические сплавы, полимерные материалы, металлические полупроводниковые стекла, наножидкости, коллоидные био- и криосистемы); оптимизация режимов лазерной обработки изделий; режимы интенсивного нагрева (охлаждения) компонентов наноэлектроники и нанотехники; нагрев, плавление и абляция вещества при воздействии сверхкоротких лазерных импульсов и др. Интенсификация тепловых процессов потребовала для их описания уточнения гипотезы Фурье, что и было сделано в рамках учета локальной неравновесности, заложенной в соотношении

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

которое учитывает конечную скорость распространения теплоты. Здесь τ_r — время, являющееся мерой инерции теплового потока, связанной со скоростью распространения теплоты соотношением $v_T = \sqrt{a / \tau_r}$. На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса теплоты (массы) указывали Дж. Максвелл в теории газодинамики [13],

А.В. Лыков при исследовании тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах [14], К. Каттанео [15] и П. Вернотт [16] в теории теплопроводности. Уравнение энергии и соотношение (4) приводят к уравнению переноса теплоты гиперболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \\ + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[\frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

и соответствующим краевым задачам нестационарной теплопроводности обобщенного типа. При математической постановке указанных задач следует применять соответствующие локально-неравновесные граничные условия. Использование стандартных локально-равновесных граничных условий (3) (довольно часто имеет место в публикациях по аналитической теплофизике) может привести к физически противоречивым результатам (например, к появлению отрицательных решений для температуры [10]). Эти вопросы детально рассмотрены в [17]. Сформулированы корректные обобщенные граничные условия на основе соотношения (4) в интегральной и эквивалентной дифференциальной формах. Так, в первом случае для условия теплового нагрева (охлаждения) граничное условие второго рода имеет вид

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \pm (q_0 / \lambda) S_+(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

В случае нагрева средой следует записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = h \left\{ T(M, t) \Big|_{M \in S} - [T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)] \right\}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

При $(1/h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow \infty$) из (7) имеем граничное условие при температурном нагреве

$$T(M, t) \Big|_{M \in S} = T_0 + S_+(t)(T_c - T_0), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Следует отметить, что гиперболическое уравнение (5) для описания локально-неравновесных процессов тепломассопереноса получено впервые в работах И.А. Фока [18] и Б.И. Давыдова [19] на основании предположения о конечном значении скорости частиц, переносящих энергию или массу. Уравнение (5) также получил А.С. Предводителев [20], исходя из анализа скоростей перемещения изотермических поверхностей с использованием представлений Римана, т. е. при полном отказе от релаксационной формулы (4).

Далее рассмотрим практические случаи нестационарного теплообмена, которые затем объединим в обобщенную модель.

В *первом случае* в декартовых координатах (x, y, z) рассмотрена область $z > R, t > 0$, ограниченная плоской поверхностью, температурное состояние которой описывается функцией $T_i(z, t)$ ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющей условиям нагрева (охлаждения):

$$\frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, \quad z > R, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad z \geq R, \quad |T_i(z, t)| < \infty, \quad z \geq R, \quad t \geq 0, \quad (11)$$

$$T_1(z, t)|_{z=R} = T_c, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \mp \frac{1}{\lambda} q_0, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z, t)|_{z=R} - T_c], \quad t > 0. \quad (14)$$

При $T_c > T_0$ происходит нагрев, при $T_c < T_0$ — охлаждение.

Во *втором случае* в сферических координатах (ρ, φ, θ) рассмотрена область $\rho > R, t > 0$ с внутренней сферической полостью при нагреве в условиях центральной симметрии $T_i = T_i(\rho, t)$:

$$\frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial \rho} \right) - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(\rho, t)}{\partial t^2}, \quad \rho > R, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$T_i(\rho, t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \rho \geq R, \quad |T_i(\rho, t)| < \infty, \quad \rho \geq R, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$T_1(\rho, t)|_{\rho=R} = T_c, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \mp \frac{1}{\lambda} q_0, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h \left[T_3(\rho, \tau) \Big|_{\rho=R} - T_c \right], \quad t > 0. \quad (19)$$

В *третьем случае* в цилиндрических координатах (r, φ, z) рассмотрена область $r > R, t > 0$ с внутренней цилиндрической полостью в условиях радиального изменения температуры $T_i = T_i(r, t)$:

$$\frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right) - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial t^2}, \quad r > R, \quad t > 0, \quad (20)$$

$$T_i(r, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad r \geq R, \quad \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad r \geq R, \quad |T_i(r, t)| < \infty, \quad r \geq R, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

$$T_1(r, t) \Big|_{r=R} = T_c, \quad t > 0,$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \mp \frac{1}{\lambda} q_0, \quad t > 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h \left[T_3(r, t) \Big|_{r=R} - T_c \right], \quad t > 0. \quad (23)$$

Подобные случаи интенсивного нагрева (охлаждения) поверхности области (реального тела) представляют значительный практический интерес [21]. Так, в случаях поверхностного диэлектрического нагрева, расчета термических напряжений в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания, в теории автоматических систем регулировки температуры, при исследовании области звуковых частот металлов при высоких или очень низких значениях температуры поверхности, в многочисленных случаях резкой смены температуры поверхности космических авиационных объектов, в машиностроительной отрасли при работе на различных экспериментальных установках для определения температурного состояния образцов и других представляет интерес охватить одновременно три случая во всех системах координат в рамках обобщенной модели. Это может представлять несомненную практическую значимость, например, в теории теплового удара. Во избежание излишней громоздкости введем следующие безразмерные переменные.

В области $z > R, t > 0$:

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad \text{Bi}^* = \frac{ha}{v_p},$$

$$W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(z, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3, \quad (24)$$

$$W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(z, t) - T_0}{(q_0/\lambda)(a/v_p)}, \quad i = 2.$$

Здесь $v_p = \sqrt{2G(1-\nu)/[\rho(1-2\nu)]}$ — скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

В области $\rho > R, t > 0$:

$$\xi = \frac{v_p \rho}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad \text{Bi}^* = \frac{ha}{v_p},$$

$$W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(\rho, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3, \quad (25)$$

$$W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(\rho, t) - T_0}{(q_0/\lambda)(a/v_p)}, \quad i = 2.$$

В области $r > R, t > 0$:

$$\xi = \frac{v_p r}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad \text{Bi}^* = \frac{ha}{v_p},$$

$$W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(r, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3, \quad (26)$$

$$W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(r, t) - T_0}{(q_0/\lambda)(a/v_p)}, \quad i = 2.$$

В (24)–(26) $\gamma = 0$ при нагреве, $\gamma = 1$ при охлаждении.

Обобщенная математическая модель задачи и ее аналитическое решение. Запишем обобщенную модель задачи, используя (10)–(26):

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\xi > \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (27)$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\gamma}{2\gamma-1}, \quad i = 1, 3, \quad \xi \geq \xi_0, \quad \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (28)$$

$$0, i = 2, \quad \xi \geq \xi_0, \quad |W_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq \xi_0, \quad \tau \geq 0, \quad (29)$$

$$W_1(\xi, \tau)|_{\xi=\xi_0} = \frac{1-\gamma}{1-2\gamma}, \quad \tau > 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} |_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \frac{1}{2\gamma-1}, \quad \tau > 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} |_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \\ & = \text{Vi}^* \left[W_3(\xi, \tau) |_{\xi=\xi_0} - \frac{1-\gamma}{1-2\gamma} \right], \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $i = 1$ при $m = -1/2$; $i = 2$ при $m = 1/2$; $i = 3$ при $m = 0$.

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^\infty W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau \quad (33)$$

решение тепловой задачи (27)–(32) имеет вид

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \frac{(\xi_0 / \xi)^m}{(1-2\gamma)} \bar{f}_i(\xi_0, p) K_m[\xi \bar{\mu}(p)] + \chi_i \frac{\gamma}{p(2\gamma-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (34)$$

где $\bar{\mu}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$; $\chi_1 = 1$; $\chi_2 = 0$; $\chi_3 = 1$;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}, \quad i = 1; \quad \bar{f}_i = \frac{\bar{\mu}(p)}{p^2 K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}, \quad i = 2; \\ & \frac{\text{Vi}^* \bar{\mu}(p)}{p \{ p K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)] + \text{Vi}^* \bar{\mu}(p) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \}}, \quad i = 3. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $K_m(z)$ — модифицированные функции Бесселя. Обратное преобразование в (34), (35) весьма трудоемко и приводит к сложным и трудно обозримым выражениям. Если учесть, что в практических задачах наибольший интерес представляет начальное время теплового процесса, при котором проявляются, например, инерционные эффекты (в соответствующих термических напряжениях), то в (34), (35) рассмотрим большие значения p , что соответствует в оригиналах малому значению времени τ . Для этого используем в (34), (35) асимптотическое представление цилиндрических функций для больших значений p :

$$K_\nu(p) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{p}} \exp(-p) \quad (\nu \geq 0).$$

В результате операционное решение обобщенной задачи примет вид

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \frac{(\xi_0/\xi)^{m+1/2}}{(1-2\gamma)} \bar{\Phi}_i(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)\beta] \sqrt{p \left(p + \frac{1}{\beta^2} \right)} + \chi_i \frac{\gamma}{p(2\gamma-1)}, \quad (36)$$

$$\bar{\Phi}_i(\xi_0, p) = \frac{1}{p}, \quad i=1, \quad \bar{\Phi}_i(\xi_0, p) = \frac{\sqrt{\beta^2 p^2 + p}}{p^2}, \quad i=2, \quad (37)$$

$$\bar{\Phi}_i(\xi_0, p) = \frac{\text{Bi}^* \bar{\mu}(p)}{p [p + \text{Bi}^* \bar{\mu}(p)]}, \quad i=3.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомые функциональные конструкции аналитических решений гиперболических задач локально-неравновесного теплообмена одновременно в трех системах координат в условиях нагрева (охлаждения):

$$W_1(\xi, \tau) = \frac{(\xi_0/\xi)^{m+1/2}}{(1-2\gamma)} \times \left\langle \exp \left[\frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \right] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp \left(-\frac{\tau'}{2\beta^2} \right) \frac{I_1 \left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2} \right)}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}} d\tau' \right\rangle \times \times \eta [\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \frac{\gamma}{2\gamma - 1}; \quad (38)$$

$$W_2(\xi, \tau) = \frac{(\xi_0/\xi)^{m+1/2}}{(1-2\gamma)} \times \left\langle f [\tau - (\xi - \xi_0)\beta] \exp \left[-\frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \right] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} f(\tau - \tau') \exp \left(-\frac{\tau'}{2\beta^2} \right) \frac{I_1 \left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2} \right)}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}} d\tau' \right\rangle \times \times \eta [\tau - (\xi - \xi_0)]; \quad (39)$$

$$f(\tau) = \beta \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) I_0\left(\frac{\tau}{2\beta^2}\right) + \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \exp\left(-\frac{\tau'}{2\beta^2}\right) I_0\left(\frac{\tau'}{2\beta^2}\right) d\tau';$$

$$W_3(\xi, \tau) = \frac{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}}{(1-2\gamma)} \left\langle f[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] \exp\left[-\frac{\xi - \xi_0}{2\beta}\right] + \right.$$

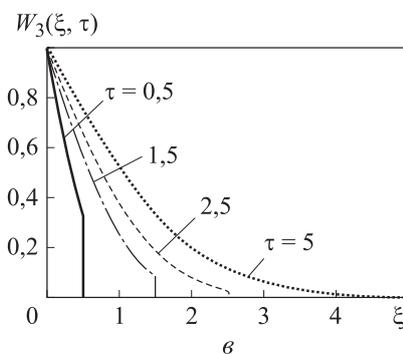
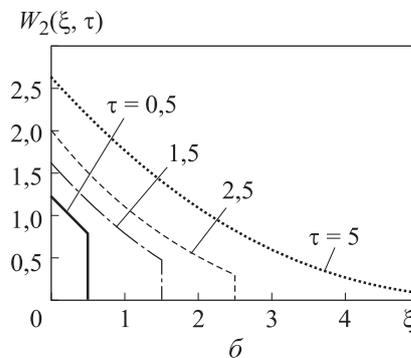
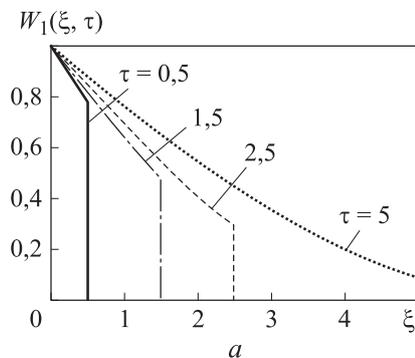
$$\left. + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^\tau f(\tau - \tau') \exp\left(-\frac{\tau'}{2\beta^2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}} d\tau' \right\rangle \times$$

$$\times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \frac{\gamma}{(2\gamma - 1)}; \quad (40)$$

$$f(\tau) = 1 - \frac{1}{\text{Bi}^{*2}} \int_0^\infty J_0(2\sqrt{\tau\tau'}) \left\{ \exp(-\beta^2\tau') \left[\frac{\text{Bi}^*}{\sqrt{\pi\tau'}} - \exp\left(\frac{\tau'}{\text{Bi}^{*2}}\right) \Phi^*\left(\frac{\sqrt{\tau'}}{\text{Bi}^*}\right) \right] \right\} d\tau'.$$

Здесь $I_\nu(z)$ ($\nu = 0, 1$) — модифицированные функции Бесселя; $J_0(z)$ — функция Бесселя; $\eta(z)$ — функция Хэвисайда; $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(z)$ — функция Лапласа.

Кривые температурного, теплового нагрева ($\gamma = 0$) и нагрева средой в сечении $\xi = 2$, рассчитанные по (38)–(40) при $m = -1/2$, $\xi_0 = 0$, $\beta = 1$, $\text{Bi}^* = 0,3$, приведены на рисунке.



Изохроны, рассчитанные по формулам (38) (а), (39) (б) и 40 (в), $\text{Bi}^* = 0,3$

Согласно аналитическим решениями (38)–(40), особенностью процесса теплопроводности в рамках математических моделей для уравнения (27) является волновой характер, что выражается наличием ступенчатой функции Хэвисайда в аналитическом решении задач. В любой момент времени существует область теплового следа $\xi < \tau$ и невозмущенная область $\xi > \tau$ (см. рисунок). В точках области $\xi \in (0, \infty)$, находящихся на расстоянии от границы более чем $\xi = \tau$, изменение температуры не происходит и ее значение равно начальному. На поверхности фронта распространяющейся волны $\xi = \tau$ и на фронте температурный профиль имеет разрыв, что приводит к задержанию оттока теплоты за границу разрыва. Амплитуда разрыва на фронте волны быстро затухает с увеличением времени нагрева, несмотря на это поступающий в область тепловой поток от границы увеличивается. В области за фронтом тепловой волны в направлении текущей пространственной переменной наблюдается существенное различие решений уравнений гиперболического и параболического типов: из решений (38)–(40) получаем начальное условие, а решения для параболического уравнения приводят к гладким решениям, существенно большим начального условия.

Аналитические решения гиперболических моделей переноса в нецилиндрических областях. Изложенные здесь вопросы относятся к числу новых в аналитической теплофизике и до настоящего времени практически не рассматривались. Здесь приведены гиперболические модели в области с движущейся во времени границей (нецилиндрические области). Вопросы, при рассмотрении которых приходится сталкиваться с краевыми задачами нестационарной теплопроводности в нецилиндрических областях типа $[0, y(t)]$, $t > 0$, или $[y(t), \infty]$, $t > 0$, где $y(t)$ — непрерывная функция, весьма много. Подобные вопросы возникают при теоретическом изучении процессов переноса энергии, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, в теории прочности, теории плотин, механике почв, термике нефтяных пластов, электродинамических задачах, в задачах фильтрации, в теории зонной очистки материалов, кинетической теории роста кристаллов, в термомеханике при изучении теплового удара и т. д. [3, 22, 23]. С математической точки зрения краевые задачи переноса в области с движущимися границами принципиально отличны от классических. Вследствие зависимости границы области от времени к этому типу задач неприменимы классические методы уравнений математической физики, так как, оставаясь в рамках этих методов, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности

с движением границы области. Этим объясняется тот факт, что в аналитической теплофизике к настоящему времени рассмотрены лишь простейшие случаи с равномерно движущейся границей или частично с корневой зависимостью и только для случаев на основе классической феноменологии Фурье.

Рассмотрим тепловые модели вида

$$\frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, \quad z > R + vt, \quad t > 0, \quad (41)$$

$$T_i(z, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq R, \quad i = 1, 2, 3, \quad (42)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, \quad z \geq R + vt, \quad t \geq 0, \quad (43)$$

$$T_1(z, t) \Big|_{z=R+vt} = T_c, \quad t > 0, \quad (44)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R+vt} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \mp \frac{1}{\lambda} q_0, \quad t > 0, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R+vt} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ & = h \left[T_3(z, t) \Big|_{z=R+vt} - T_c \right], \quad t > 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Последовательно проведем следующие преобразования. Введем безразмерные переменные

$$\eta = \frac{v_p z}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad \text{Bi}^* = \frac{ha}{v_p}, \quad v_0 = \frac{v}{v_p},$$

$$\Theta_i(\eta, \tau) = \frac{T_i(z, t) - [(1-\gamma)T_0 + \gamma T_c]}{(T_c - T_0)(1-2\gamma)}, \quad i = 1, 3,$$

$$\frac{T_2(z, t) - T_0}{(q_0/\lambda)(a/v_p)}, \quad i = 2.$$

Здесь $\gamma = 0$ при нагреве, $\gamma = 1$ при охлаждении. Далее введем подвижную систему координат $\xi = \eta - v_0 \tau$, полагая $\Theta_i(\eta, \tau) = W_i(\xi, \tau)$. Соотношения (41)–(46) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = (1 - v_0^2 \beta^2) \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + v_0 \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + 2v_0 \beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} -$$

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad \xi > \xi_0, \quad \tau > 0, \quad i=1, 2, 3, \quad (47)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\gamma}{2\gamma-1}, \quad i=1, 3, \quad \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq \xi_0, \quad (48)$$

$$0, \quad i=2, \quad W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{1-\gamma}{1-2\gamma}, \quad \tau > 0, \quad (49)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \frac{1}{2\gamma-1}, \quad \tau > 0, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \\ & = \text{Bi}^* \left[W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} - \frac{1-\gamma}{1-2\gamma} \right], \quad \tau > 0, \end{aligned} \quad (51)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq \xi_0, \quad \tau \geq 0. \quad (52)$$

Переходим в пространство изображений по Лапласу (33) и последовательно находим операционные решения модельных представлений (47)–(52):

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(\xi, p) &= \frac{1}{p(1-2\gamma)} \exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-\nu_0^2\beta^2} \sqrt{(p+2\alpha^*)(p+2\beta^*)}\right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\nu_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-\nu_0^2\beta^2} p\right] \exp\left[-\frac{(\nu_0/2)(\xi-\xi_0)}{1-\nu_0^2\beta^2}\right] + \frac{\gamma}{p(2\gamma-1)}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_2(\xi, p) &= \\ &= \frac{1}{(1-2\gamma)} \exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-\nu_0^2\beta^2} \sqrt{(p+2\alpha^*)(p+2\beta^*)}\right] \exp\left[-\frac{\nu_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-\nu_0^2\beta^2} p\right] \times \\ & \times \frac{(1+\beta^2 p)(1-\nu_0^2\beta^2)}{p \left[\beta \sqrt{(p+2\alpha^*)(p+2\beta^*)} + (\nu_0/2) + \nu_0\beta^2 p \right]} \exp\left[-\frac{(\nu_0/2)(\xi-\xi_0)}{1-\nu_0^2\beta^2}\right], \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_3(\xi, p) &= \\ &= \frac{\text{Bi}^*(1-\nu_0^2\beta^2)}{1-2\gamma} \exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-\nu_0^2\beta^2} \sqrt{(p+2\alpha^*)(p+2\beta^*)}\right] \exp\left[-\frac{\nu_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-\nu_0^2\beta^2} p\right] \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{(1 + \beta^2 p)}{p \left\{ \beta \sqrt{(p + 2\alpha^*)(p + 2\beta^*)} + (v_0/2) + v_0 \beta^2 p + \text{Bi}^*(1 + \beta^2 p)(1 - v_0^2 \beta^2) \right\}} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{(v_0/2)(\xi - \xi_0)}{1 - v_0^2 \beta^2} \right] + \frac{\gamma}{p(2\gamma - 1)}. \quad (55)$$

Здесь

$$\alpha^* = \frac{1 + \sqrt{1 - v_0^2 \beta^2}}{4\beta^2}; \quad \beta^* = \frac{1 - \sqrt{1 - v_0^2 \beta^2}}{4\beta^2}. \quad (56)$$

Переходим последовательно к оригиналам.

Температурный нагрев (охлаждение):

$$W_1(\xi, \tau) = \frac{1}{1 - 2\gamma} \exp \left[-\frac{(v_0/2)(\xi - \xi_0)}{(1 - v_0^2 \beta^2)} \right] \times \left\langle \exp \left[-\frac{(\xi - \xi_0)}{2\beta(1 - v_0^2 \beta^2)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta \sqrt{1 - v_0^2 \beta^2}} \int_{\frac{(\xi - \xi_0)\beta}{1 - v_0^2 \beta^2}}^{\tau - \frac{v_0 \beta^2 (\xi - \xi_0)}{1 - v_0^2 \beta^2}} \exp \left(-\frac{\tau'}{2\beta^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{I_1 \left(\frac{\sqrt{1 - v_0^2 \beta^2}}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2 - \frac{(\xi - \xi_0)^2 \beta^2}{(1 - v_0^2 \beta^2)^2}} \right)}{\sqrt{\tau'^2 - \frac{(\xi - \xi_0)^2 \beta^2}{(1 - v_0^2 \beta^2)^2}}} d\tau' \eta \left[\tau - \frac{(\xi - \xi_0)\beta}{1 - v_0 \beta} \right] - \gamma \right\rangle. \quad (57)$$

Тепловой нагрев (охлаждение):

$$W_2(\xi, \tau) = \frac{2\beta(1 - v_0\beta)}{(1 - 2\gamma)} \exp \left[-\frac{(v_0/2)(\xi - \xi_0)}{1 - v_0^2 \beta^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ f \left[\tau - \frac{(\xi - \xi_0)\beta}{1 + v_0\beta} \right] \exp \left[-\frac{(\xi - \xi_0)\beta}{2\beta(1 - v_0^2 \beta^2)} \right] + \frac{(\xi - \xi_0)}{2\beta \sqrt{1 - v_0^2 \beta^2}} \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-v_0^2\beta^2}}^{\tau-\frac{v_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-v_0^2\beta^2}} f\left[\tau-\frac{v_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-v_0^2\beta^2}-\tau'\right] \exp\left(\frac{-\tau'}{2\beta^2}\right) \times \\ & \times \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{1-v_0^2\beta^2}}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2-\frac{(\xi-\xi_0)^2\beta^2}{(1-v_0^2\beta^2)^2}}\right)}{\sqrt{\tau'^2-\frac{(\xi-\xi_0)^2\beta^2}{(1-v_0^2\beta^2)^2}}} d\tau' \left. \vphantom{\int} \right\} \eta\left[\tau-\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-v_0\beta}\right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $f(\tau) = 1 - (1/2) \exp(-\tau / (2\beta^2))$.

Нагрев (охлаждение) средой:

$$\begin{aligned} W_3(\xi, \tau) = & \frac{1}{1-2\gamma} \left\langle \left\langle f^*\left(\tau-\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1+v_0\beta}\right) \exp\left[-\frac{(\xi-\xi_0)}{2\beta(1-v_0^2\beta^2)}\right] + \right. \right. \\ & + \frac{\xi-\xi_0}{2\beta\sqrt{1-v_0^2\beta^2}} \int_{\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-v_0^2\beta^2}}^{\tau-\frac{v_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-v_0^2\beta^2}} f^*\left(\tau-\frac{v_0\beta^2(\xi-\xi_0)}{1-v_0^2\beta^2}-\tau'\right) \exp\left(\frac{-\tau'}{2\beta^2}\right) \times \\ & \left. \left. \times \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{1-v_0^2\beta^2}}{2\beta^2} \sqrt{\tau'^2-\frac{(\xi-\xi_0)^2\beta^2}{(1-v_0^2\beta^2)^2}}\right)}{\sqrt{\tau'^2-\frac{(\xi-\xi_0)^2\beta^2}{(1-v_0^2\beta^2)^2}}} d\tau' \right\rangle \eta\left(\tau-\frac{(\xi-\xi_0)\beta}{1-v_0\beta}\right) - \gamma \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь

$$f^*(\tau) = \frac{A_0}{1+A_0} + A_2 \exp\left(\frac{-\tau}{A_1}\right); \quad A_0 = 2\beta \text{Bi}^*(1-v_0\beta);$$

$$A_1 = \frac{(A_0+2)\beta^2}{1+A_0}; \quad A_2 = \frac{A_0}{1+A_0} \left(\frac{\beta^2}{A_1} - 1\right).$$

При нахождении оригиналов изображений (54), (55) использовано приближенное равенство $\sqrt{(p+2\alpha^*)(p+2\beta^*)} = \left[p/(2\beta^2)\right](2\beta^2+1/p)$.

В соответствии с соотношениями (57)–(59) в области с движущимися границами нахождение аналитических решений гиперболических моделей локально-неравновесного теплообмена предполагает длительную процедуру вычислений на основе операционного исчисления. При этом все преобразования доводятся до конца. Конечные результаты достаточно удобны для численных расчетов, учитывая хорошо развитое в настоящее время программное обеспечение. Здесь просматривается волновой характер распространения теплоты с задержкой начала процесса (о чем свидетельствует наличие функции Хэвисайда в аналитических решениях). Таким образом, функциональные конструкции (57)–(59) в качестве аналитических решений гиперболических краевых задач локально-неравновесного теплообмена могут быть использованы в качестве приложений для решения многих задач в науке и технике.

Заключение. Предложено решение проблемы по нахождению обобщенных аналитических решений краевых задач локально-неравновесного теплообмена в частично ограниченных областях в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат в условиях интенсивного температурного нагрева (охлаждения), теплового нагрева (охлаждения), нагрева (охлаждения) средой. Рассмотрена аналогичная проблема в нецилиндрической частично-ограниченной области с движущейся во времени границей. Описаны функциональные конструкции в качестве аналитических решений соответствующих краевых задач. Приведенные соотношения показывают, что аналитика гиперболических моделей переноса существенно отличается от классических моделей параболического типа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карташов Э.М. Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена. *Российский технологический журнал*, 2022, т. 10, № 1, с. 7–18. DOI: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>
- [2] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М., Высш. шк., 2001.
- [3] Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М., URSS, 2018.
- [4] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., Высш. шк., 1967.
- [5] Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М., Энергоатомиздат, 1983.
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.
- [7] Формалев В.Ф. Уравнения математической физики. М., URSS, 2021.

- [8] Sobolev S.L. On hyperbolic heat-mass transfer equation. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 122, pp. 629–630.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.022>
- [9] Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности. *Инженерно-физический журнал*, 2015, т. 88, № 2, с. 398–405.
- [10] Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности. *Теплофизика и аэромеханика*, 2017, № 6, с. 929–935.
- [11] Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю. Об измерении времени тепловой релаксации твердых тел. *Известия РАН. Энергетика*, 2015, № 1, с. 113–122.
- [12] Синкевич О.А., Семенов А.М. Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энского по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат. *Журнал технической физики*, 2003, т. 73, № 10, с. 1–5.
- [13] Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. Royal. Soc.*, 1967, vol. 157, no. 1, pp. 49–88. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
- [14] Лыков А.В. Теплопроводность и диффузия в производстве кожи, заменителей и других материалов. М., Гизлегпром, 1941.
- [15] Cattaneo C. Sulla Conduzione de Calore. *Atti del. Seminario Matematico e fisico dela Universita di Modena*, 1948, vol. 3, pp. 3–21.
- [16] Vernotte P. Les paradox de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *C. R. Acad. Sci.*, 1958, vol. 246, no. 22, pp. 3154–3155.
- [17] Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности. *Инженерно-физический журнал*, 2014, т. 87, № 5, с. 1072–1081.
- [18] Фок И.А. Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света. Л., ГОИ, 1926.
- [19] Давыдов Б.И. Диффузионное уравнение с учетом молекулярной скорости. *ДАН СССР*, 1935, № 2, с. 474–475.
- [20] Предводителей А.С. Проблемы тепло- и массопереноса. М., Энергия, 1970.
- [21] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М., ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- [22] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства с подвижной границей при локальном тепловом воздействии в условиях теплообмена с внешней средой. *Тепловые процессы в технике*, 2018, т. 10, № 1-2, с. 56–61.
- [23] Аттетков А.В., Беляков Н.С., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле твердого тела с цилиндрическим каналом в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2006, № 1 (20), с. 31–40.

Карташов Эдуард Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики ИТХТ им. М.В. Ломоносова РТУ МИРЭА (Российская Федерация, 119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Карташов Э.М. Новые соотношения для аналитических решений локально-неравновесного теплообмена. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 6 (111), с. 4–24. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-6-4-24>

**NEW RELATIONS FOR ANALYTICAL SOLUTION
OF THE LOCAL NON-EQUILIBRIUM HEAT TRANSFER**

E.M. Kartashov

professor.kartashov@gmail.com

RTU MIREA, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper develops generalized model representations of the locally non-equilibrium heat transfer in terms of the theory of non-stationary heat conduction for the hyperbolic type equations. The model simultaneously includes three coordinate systems: 1) Cartesian coordinates—a massive body bounded by a flat surface (one-dimensional case); 2) spherical coordinates—a massive body with an internal spherical cavity (central symmetry); 3) cylindrical coordinates—a massive body with an internal cylindrical cavity (radial heat flow). Three types of intensive heating (cooling) are considered: 1) temperature; 2) thermal; 3) media heating. Examples of locally non-equilibrium heat transfer of a wave nature are provided taking into account the finite speed of heat propagation. The wave character is expressed by the Heaviside step function in analytical solution to the basic problems for the partially bounded regions. Isochrones for the temperature functions were constructed. It is shown that the temperature profile is having discontinuity on the surface of the traveling wave front. This leads to a delay in the heat outflow beyond the discontinuity boundary, which is a characteristic feature in analytical solutions to the wave equations. Functional constructions of analytical solutions to basic problems of the locally non-

Keywords

Generalized mathematical models, locally non-equilibrium heat transfer, regions with a moving boundary

equilibrium heat transfer are presented in a region with the moving boundary, it is a practically new case in analytical thermophysics. The presented material has wide practical application

Received 25.01.2023

Accepted 13.06.2023

© Author(s), 2023

REFERENCES

- [1] Kartashov E.M. New operational relations for mathematical models of local nonequilibrium heat transfer. *Russian Technological Journal*, 2022, vol. 10, no. 1, pp. 7–18 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>
- [2] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods of heat conduction theory of solid body]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001.
- [3] Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozheniy* [Analytical methods of heat conduction theory and its applications]. Moscow, URSS Publ., 2018.
- [4] Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967.
- [5] Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving heat conduction problems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983.
- [6] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977.
- [7] Formalev V.F. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, URSS Publ., 2021.
- [8] Sobolev S.L. On hyperbolic heat-mass transfer equation. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 122, pp. 629–630.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.022>
- [9] Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88, no. 2, pp. 406–422.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1206-6>
- [10] Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.*, 2017, vol. 24, no. 6, pp. 901–907. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0869864317060087>
- [11] Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu. About measuring the thermal relaxation time of solid body. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2015, no. 1, pp. 113–122 (in Russ.).
- [12] Sinkevich O.A., Semenov A.M. Solution of the Boltzmann equation by expanding the distribution function with several time and coordinate scales in the Enskog series in Knudsen parameter. *Tech. Phys.*, 2003, vol. 48, no. 10, pp. 1221–1225.
DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1620111>

- [13] Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. Royal. Soc.*, 1967, vol. 157, no. 1, pp. 49–88. DOI: <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
- [14] Lykov A.V. *Teploprovodnost i diffuziya v proizvodstve kozhi, zameniteley i drugikh materialov* [Heat conduction and diffusion in the production of leather, substitutes and other materials]. Moscow, Gizlegprom Publ., 1941.
- [15] Cattaneo C. Sulla Conduzione de Calore. *Atti del. Seminario Matematico e fisico dela Universita di Modena*, 1948, vol. 3, pp. 3–21.
- [16] Vernotte P. Les paradox de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *C. R. Acad. Sci.*, 1958, vol. 246, no. 22, pp. 3154–3155.
- [17] Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1116–1125. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1113-2>
- [18] Fok I.A. Reshenie odnoy zadachi teorii diffuzii po metodu konechnykh raznostey i prilozhenie ego k diffuzii sveta [Solving the problem of diffusion theory by the finite difference method and its application to light scattering]. Leningrad, GOI Publ., 1926.
- [19] Davydov B.I. Diffusion equation with molecular velocity. *DAN SSSR*, 1935, no. 2, pp. 474–475 (in Russ.).
- [20] Predvoditelev A.S. *Problemy teplo- i massoperenosa* [Problems of heat and mass transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1970.
- [21] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli termomekhaniki* [Mathematical models of thermomechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2002.
- [22] Attekov A.V., Volkov I.K. Temperature field of anisotropic half-space with movable boundary at local thermal impact in conditions of heat exchange with outer ambient. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2018, vol. 10, no. 1-2, pp. 56–61 (in Russ.).
- [23] Attekov A.V., Belyakov N.S., Volkov I.K. Influence of boundary mobility on temperature field of solid body with cylindrical channel under non-stationary conditions of heat exchange with environment. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2006, no. 1 (20), pp. 31–40 (in Russ.).

Kartashov E.M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, RTU MIREA (Vernadskogo prospekt 78, Moscow, 119454 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kartashov E.M. New relations for analytical solution of the local non-equilibrium heat transfer. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 6 (111), pp. 4–24 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-6-4-24>