

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, СТЕНКИ КОТОРОГО ИМЕЮТ ДРОБНУЮ ФИЗИЧЕСКУЮ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Л.И. Могилевич<sup>1</sup>

mogilevichli@gmail.com

Е.В. Попова<sup>1</sup>

elizaveta.popova.97@bk.ru

М.В. Попова<sup>2</sup>

mari.popova.2004@internet.ru

<sup>1</sup> СГТУ имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация

<sup>2</sup> СГУ, Саратов, Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложена математическая модель и выполнено моделирование процесса распространения продольных нелинейных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью постоянной плотности. Стенки канала рассматриваются как две бесконечно длинные цилиндрические оболочки, продольные оси симметрии которых совпадают. Изучен случай, когда материал оболочек имеет дробную физическую нелинейность. В рамках разработанной модели оценено влияние инерции движения жидкости и ее вязкости на волновой процесс. Проведен асимптотический анализ разрешающих уравнений гидроупругости стенок канала методом возмущений и осуществлен переход к системе двух обобщенных уравнений Шамеля, описывающих эволюцию продольных нелинейных волн деформации в стенках рассматриваемого канала. Для частного случая найдено точное решение этой системы солитонного вида и показано, что в общем случае система требует численного исследования. Для реализации вычислительного эксперимента предложены новые разностные схемы, подобные схеме Кранка — Николсона для исследования распространения теплоты. Моделирование показало, что с течением времени скорость и амплитуда волн деформации остаются неизменными, а скорость волн является сверхзвуковой. При рассмотрении в качестве начальных условий точного решения расчеты показали совпадение численного решения

### Ключевые слова

*Моделирование, волны деформации, кольцевой канал, дробная нелинейность, вязкая жидкость, метод возмущений, обобщенное уравнение Шамеля*

с точным. Это подтверждает адекватность предложенной разностной схемы для обобщенных уравнений Шамеля. Показано, что уединенные волны деформации в стенках канала являются солитонами

Поступила 25.01.2023

Принята 22.06.2023

© Автор(ы), 2024

---

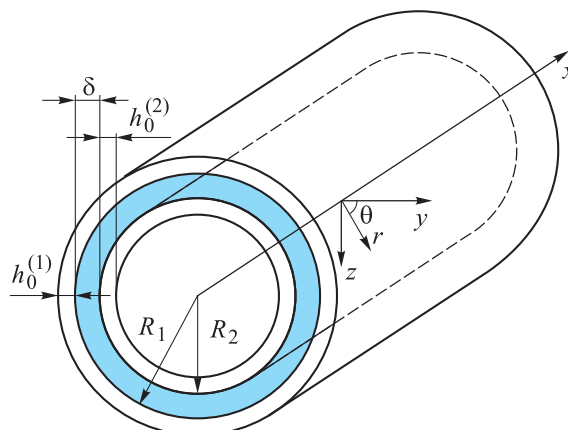
*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 23-29-00140)*

**Введение.** Фундаментальный задел в вопросах распространения волн в сплошных средах [1] стимулирует развитие волновых технологий, которые находят все большее применение в науке, медицине и промышленности. Например, волновые технологии используются в приборостроении [2, 3], применяются для неразрушающих методов диагностики поверхности [4], контроля состояния упругих конструкций, таких как элементы зданий, сооружений и различных изделий, в том числе стенок трубопроводов [5]. Однако появление современных материалов с существенно нелинейными механическими свойствами требует развития подходов нелинейной волновой динамики, которая активно развивается в настоящее время [6]. Среди первых работ, посвященных исследованию распространения нелинейных волн в стержнях и пластинах, можно указать работы [7, 8]. Достаточно содержательный обзор состояния исследований по нелинейной волновой динамике в стержнях, пластинах и оболочках на начало этого столетия приведен в [9]. Вопросы распространения нелинейных волн деформации в цилиндрической оболочке с конструкционной анизотропией и физической кубической нелинейностью ее материала рассмотрены в [10]. Влияние нелинейности упругой среды, окружающей цилиндрическую оболочку, на волны деформации в оболочке изучено в [11, 12]. Распространение продольных нелинейных волн деформации в бесконечно длинной цилиндрической оболочке с конструкционной анизотропией описано в [13]. Рассмотрена оболочка, выполненная из материала с физически нелинейным законом общего вида, связывающим компоненты тензора напряжения с интенсивностью деформаций, в том числе и в дробной степени. В указанной работе получено обобщенное уравнение Шамеля, описывающее волновой процесс в оболочке, и найдено точное солитонное решение с использованием метода геометрического ряда. Однако в перечисленных работах не изучено влияние на волновой процесс в оболочке жидкости, которая может находиться внутри нее. Различные аспекты проблем гидроупругости пластин и оболочек, взаимодействующих с идеальной жидкостью, рассмотрены в [14, 15]. Взаимодействие оболочки с идеальной жидкостью, но вне волновых процессов, численно исследовано в [16]. Математическое модели-

рование распространения нелинейных волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с учетом их геометрической нелинейности, содержащих вязкую жидкость между ними и окруженных нелинейно-упругой средой, выполнено в [17]. В этой работе рассмотрен узкий кольцевой канал с ползущим течением и исследован случай окружающей упругой среды с жесткой кубической нелинейностью в продольном направлении. Нелинейные волны деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью, с учетом сил инерции жидкости и кубической физической нелинейности материала оболочек изучены в [18]. Проведенные исследования показали, что в случае содержащих жидкость оболочек использование методов качественного анализа для аналитического исследования нелинейных волн деформации вызывает значительные трудности. Поэтому для этих случаев необходимо проведение вычислительных экспериментов [19]. В предлагаемой работе методом двухмасштабных асимптотических разложений получена система разрешающих уравнений для продольных волн деформации в двух бесконечно длинных цилиндрических оболочках, образующих кольцевой канал, с учетом вязкости жидкости, инерции ее движения и дробной физической нелинейности материала оболочек. Найдено частное точное решение солитонного типа и проведено численное исследование эволюции нелинейных волн деформации в оболочках-стенках кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью.

**Вывод уравнений динамики оболочек и постановка задачи гидроупругости.** Рассмотрим кольцевой канал (рис. 1). Полагаем, что он бесконечно длинный, а его стенки образованы двумя цилиндрическими оболочками, продольные оси симметрии которых совпадают. Введем в рассмотрение декартову  $(xyz)$  и соответствующую ей цилиндрическую  $(r\theta x)$  системы координат. Ось  $x$  совпадает с продольной осью симметрии оболочек, а ось  $z$  направлена по нормали к срединной поверхности оболочек. Толщина слоя жидкости в канале  $\delta = R_1 - R_2$ , где  $R_1$  — радиус внутренней поверхности внешней оболочки;  $R_2$  — радиус внешней поверхности внутренней оболочки.

Полагаем, что оболочки выполнены из одного и того же материала с модулем Юнга  $E$ , плотностью  $\rho_0$ , коэффициентом Пуассона  $\mu_0$ , и обозначаем индексом  $i = 1$  параметры внешней оболочки, а  $i = 2$  — параметры внутренней оболочки. Тогда  $h_0^{(i)}$  — толщина  $i$ -й оболочки,  $R^{(i)}$  — радиус срединной поверхности  $i$ -й оболочки. Исследуем эволюцию продольных волн деформаций в материале оболочек, предположим, что



**Рис. 1.** Схема кольцевого канала, полностью заполненного вязкой жидкостью с постоянной плотностью

они вызваны некоторым начальным возмущением, изучим осесимметричную постановку задачи гидроупругости.

Материал, из которого выполнены оболочки, рассмотрим в рамках нелинейной теории упругости [20], задавая связь между компонентами тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_\theta$ , компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$  и интенсивностью деформаций  $\varepsilon_u$  согласно деформационной теории пластичности Илюшина [21, 22] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E(\mu_0 \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_x^{(i)}) [1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E]}{1 - \mu_0^2}; \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E(\varepsilon_\theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)}) [1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E]}{1 - \mu_0^2}; \\ \varepsilon_u^{(i)} &= \frac{2(\mu_1 [(\varepsilon_\theta^{(i)})^2 + (\varepsilon_x^{(i)})^2] - \mu_2 \varepsilon_\theta^{(i)} \varepsilon_x^{(i)})^{1/2}}{\sqrt{3}}; \\ \mu_1 &= \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right]; \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{2\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m$  — константа материала, определяемая эмпирически при проведении испытания на растяжение или сжатие.

Согласно (1), физический закон, связывающий напряжения и деформации в материале оболочки, имеет дробную степень, т. е. дробную нелинейность (нелинейность Шамеля).

Компоненты тензора деформаций и упругих перемещений для элемента  $i$ -й оболочки связаны между собой следующим образом:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \quad \text{при} \quad -\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2}. \quad (2)$$

Здесь  $U^{(i)}$  — продольное упругое перемещение  $i$ -й оболочки;  $z$  — нормальная координата в  $i$ -й оболочке ( $z = 0$  соответствует срединной поверхности рассматриваемой оболочки);  $W^{(i)}$  — прогиб  $i$ -й оболочки, направленный к центру ее кривизны.

Учитывая (2) в (1), получаем связь напряжений и упругих перемещений для  $i$ -й оболочки в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} - \mu_0 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right) \times \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left\{ \mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_1 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right)^2 + \mu_2 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\}^{1/4} \right]; \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \times \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left\{ \mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_1 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right)^2 + \mu_2 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\}^{1/4} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

При изучении продольных волн деформации в оболочке в [18] проведен асимптотический анализ, который показал, что интенсивность деформаций, т. е. выражения в фигурных скобках формул (3), можно рассматривать на срединной поверхности при  $z = 0$ . С учетом изложенного представим (3) как

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} - \mu_0 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right) \times \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left\{ \mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\}^{1/4} \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta}^{(i)} = \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \times \left[ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left\{ \mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\}^{1/4} \right]. \quad (4)$$

Тогда по (4) усилия и момент в элементе срединной поверхности  $i$ -й оболочки определяются формулами:

$$N_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz = \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \left( 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right);$$

$$N_{\theta}^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_{\theta}^{(i)} dz = \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left( \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \left( 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right);$$

$$M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz = -\frac{E h_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \times \left( 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right).$$

В выражении для момента второе слагаемое в квадратных скобках значительно меньше, чем первое, и его можно опустить, учитывая, что момент  $M_x$  значительно меньше усилия  $N_x$  [18]. Поэтому далее будем рассматривать выражение для момента без данного слагаемого.

Уравнения динамики оболочек запишем в усилиях и моментах с учетом даламберовых сил инерции и напряжений со стороны жидкости в канале:

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}};$$

$$\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_{\theta}^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - (-1)^{i-1} q_n \Big|_{R^{(i)}}. \quad (6)$$

Здесь  $q_x^{(i)}, q_n$  — касательное и нормальное напряжение жидкости;  $t$  — время.

С учетом полученных выражений (5) и сделанных замечаний запишем в перемещениях уравнения (6):

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left\{ \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right\} \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}}; \\
& \frac{Eh_0^{(i)}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle -\frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\rangle + \\
& + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left\{ \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right\} \right] \right\rangle + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \\
& \quad + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left\{ \left[ \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{1/4} \right\} \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - (-1)^{i-1} q_n \Big|_{R^{(i)}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Совместно с уравнениями динамики оболочек необходимо рассмотреть уравнения динамики находящейся между ними вязкой несжимаемой жидкости, которые для осесимметричного течения имеют вид [23]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = v \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right); \\
& \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) дополним краевыми условиями на границах контакта жидкости с оболочками, которые состоят в условиях совпадения скоростей движения жидкости и ограничивающих ее границ:

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad (9)$$

при  $r = R_i - W^{(i)}$ .

Здесь  $V_x, V_r$  — проекции скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат.

Напряжения жидкости в уравнениях динамики оболочек (7) определяются соотношениями

$$q_n = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r};$$

$$q_x^{(i)} = -\rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \quad \text{при } r = R^{(i)}, \quad (10)$$

где  $p$  — давление жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

**Асимптотический анализ сформулированной задачи гидроупругости.** Для изучения волнового процесса в стенках канала перейдем к рассмотрению безразмерной задачи гидроупругости и введем характерные малые параметры рассматриваемой задачи. Используем следующие безразмерные переменные для уравнений оболочек:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t,$$

$$r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, \quad w_m = h_0, \quad u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}}, \quad (11)$$

где  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0^2)}}$  — скорость звука в материале оболочки;  $l$  — длина волны, принимаемая за характерный линейный размер.

Согласно рассматриваемой постановке, полагаем

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1),$$

$$\frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1), \quad \frac{m}{E} = O(1), \quad (12)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр задачи.



Учитывая (11), (12), запишем (7) в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
& \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \frac{h_0^{(i)} l}{R^{(i)}} \left( \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} - \mu_0 u_3^{(i)} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left\{ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_1 u_3^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} u_3^{(i)} \right] \right]^{1/4} \right\} \right\rangle = \\
& = \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} \frac{h_0^{(i)} l}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^{*2}} - q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}} ; \\
& \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left\langle - \frac{h_0^2}{12l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left( \frac{h_0^{(i)}}{l^2} \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial x^{*2}} + \mu_0 \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)2}} u_3^{(i)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \frac{h_0^{(i)}}{l} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial x^*} \left\{ \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \left( \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} - \mu_0 u_3^{(i)} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left\{ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_1 u_3^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} u_3^{(i)} \right] \right]^{1/4} \right\} \right\} \right\} + \\
& + \frac{1}{R^{(i)}} \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \left( \mu_0 \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} - u_3^{(i)} \right) \times \\
& \times \left. \left\{ 1 + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \right] \right]^{1/4} \mu_1 u_3^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x^*} u_3^{(i)} \right\} \right\rangle = \\
& = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{c_0^2}{l^2} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial t^{*2}} - (-1)^{i-1} q_n \Big|_{R^{(i)}} .
\end{aligned} \tag{13}$$

Проведем анализ уравнений методом двухмасштабных разложений [24], представляя зависимые переменные в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{31}^{(i)} + \dots \tag{14}$$

и вводя независимые переменные

$$\xi = x^* - \sqrt{1 - \mu_0^2} t^*, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t^*, \tag{15}$$

где  $\tau$  — «медленное» время.

Подставляя (14), (15) в (13), для первых двух членов разложения получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} \left( \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{31}^{(i)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{30}^{(i)} \right) \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_1 u_{30}^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} u_{30}^{(i)} \right]^{1/4} \right\rangle = \\ & = (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{11}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{l}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \varepsilon} q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}} ; \\ & \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} \left( \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \varepsilon^{1/2} \left( \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{30}^{(i)} \right) \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_1 u_{30}^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} u_{30}^{(i)} \right]^{1/4} = \\ & = (1 - \mu_0^2) \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{30}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \frac{R^{(i)}}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \varepsilon} (-1)^{i-1} q_n \Big|_{R^{(i)}} . \end{aligned} \quad (16)$$

В нулевом приближении по  $\varepsilon$  из (16) запишем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30} \right\rangle &= (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} , \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{30}^{(i)} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно второму уравнению системы (17), прогиб выражается через продольную деформацию:

$$u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} . \quad (18)$$

Первое уравнение системы (17) обращается в тождество, следовательно, продольное перемещение  $u_{10}^{(i)}$  является произвольной функцией.

В следующем приближении по  $\varepsilon$  с учетом связи (18) получим систему уравнений для первого приближения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \mu_0 \left( \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[ \left( \mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2 \right) \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/4} \right\rangle + \\
& \quad + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} = - \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}}; \quad (19) \\
& \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} - \mu_0 (1 - \mu_0^2) \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} = \\
& \quad = - \frac{R^{(i)}}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (-1)^{i-1} q_n \Big|_{R^{(i)}}.
\end{aligned}$$

Исключая из (19)  $u_{11}$ ,  $u_{31}$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2 \right)^{1/4} \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \times \\
& \quad \times \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\
& \quad = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ q_x^{(i)} - \mu_0 \varepsilon^{1/4} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right] \Big|_{R^{(i)}}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Уравнения системы (20) представляют собой обобщенные уравнения Шамеля для продольной деформации оболочек  $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$ . В случае исключения жидкости из рассмотрения правая часть системы (20) должна быть принята равной нулю. В этом случае есть два независимых уравнения Шамеля для каждой оболочки.

Далее проведем анализ уравнений гидродинамики для определения правых частей уравнений системы (20), для чего введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned}
V_r &= h_0^{(i)} \frac{c_0}{l} v_r; \quad V_x = h_0^{(i)} \frac{c_0}{\delta} v_x; \quad r^* = \frac{r - R^{(2)}}{\delta}; \quad t^* = \frac{c_0}{l} t; \\
x^* &= \frac{x}{l}; \quad p = \frac{\rho v c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P_0; \quad \psi = \frac{\delta}{R^{(2)}} = \varepsilon^{1/2}; \\
\lambda &= \frac{h_0^{(i)}}{\delta} = \varepsilon^{1/2}; \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon; \quad \frac{h_0^{(i)}}{l} = \varepsilon^{5/4}; \quad \frac{\delta}{l} = \varepsilon^{3/4}.
\end{aligned} \quad (21)$$

Подставим переменные (21) в уравнения (8) и граничные условия (9). Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\varepsilon^{1/2}$

$$P = P^0 + \varepsilon^{1/2}P^1 + \dots; \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon^{1/2}v_r^1 + \dots; \quad v_x = v_x^0 + \varepsilon^{1/2}v_x^1 + \dots, \quad (22)$$

для первых членов разложения (22) запишем уравнения динамики жидкости

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \quad \text{Re} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}; \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (23)$$

и соответствующие им граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad (24)$$

$$v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0, \quad \text{Re} = \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{v}.$$

Подставляя (21) в выражения для напряжений жидкости, действующих на оболочки (10), с точностью до  $\psi$  определяем

$$q_x^{(i)} = -\rho v \frac{h_0^{(i)} c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_{x^*}^0}{\partial r^*} \quad \text{при} \quad r^* = 1 \quad (\text{для} \quad i = 1) \quad \text{или} \quad r^* = 0 \quad (\text{для} \quad i = 2),$$

$$q_n = -\frac{\rho v c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P^0. \quad (25)$$

Проведем решение (23), (24) методом итерации. На первой итерации исключаем из (23) инерционный член, т. е.  $\text{Re} = 0$ , как принято в гидродинамической теории смазки [23]. В результате

$$P^0 = 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*; \quad (26)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - r^*) 6 \int \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*.$$

На второй итерации подставляем в инерционный член найденное выражение  $\partial v_x^0 / \partial t^*$  и, решая полученные уравнения, находим

$$P^0 = \iint \left[ 12 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} \text{Re} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*; \quad (27)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \int \left[ 6 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{10} \text{Re} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*.$$

Учитывая введенные переменные (15) и разложение (14), при  $\varepsilon \ll 1$  имеем

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \int \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \operatorname{Re}(1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi; \\
 \frac{\partial P^0}{\partial \xi} &= \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \operatorname{Re}(1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= (2r^* - 1) \left[ 6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\operatorname{Re}}{10} (1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \quad (28) \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= 6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\operatorname{Re}}{10} (1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right); \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} &= - \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}.
 \end{aligned}$$

С учетом (28),  $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 w_m R^{(i)} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$  и в силу малости  $\psi$ ,  $\lambda$ , полагая  $R^{(1)} = R^{(2)} \approx R$ ,  $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} \approx h_0$ , запишем правую часть первого уравнения (20), т. е. для  $i = 1$ , в виде:

$$\begin{aligned}
 & -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \times \\
 & \times \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \operatorname{Re} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

а правую часть второго уравнения (20), т. е. для  $i = 2$ , — в виде

$$\begin{aligned}
 & -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \times \\
 & \times \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \operatorname{Re} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right]. \quad (30)
 \end{aligned}$$

**Разрешающие уравнения эволюции волн в оболочках и их исследование.** Подставляя найденные выражения правых частей (29), (30) в систему (20), получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \times \\
 & \times \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \times \\
 & \times \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \operatorname{Re} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \right]; \\
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \times \quad (31) \\
 & \times \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \times \\
 & \times \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \operatorname{Re} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 u_{10\xi}^{(1)} &= c_3 \varphi^{(1)}; \quad u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \varphi^{(2)}; \quad \eta = c_1 \xi; \quad t = c_2 \tau; \quad c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{v}{\delta c_0 \varepsilon^{3/4}}; \\
 c_1 &= \left( 2c_2 / \left( \mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2} \right) \right)^{1/3}; \\
 c_3 &= \left[ 6 \frac{c_2}{c_1} \frac{E}{m} \frac{4}{3\sqrt{1-\mu_0^2} (2/\sqrt{3})^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4}} \right]^2; \\
 \sigma_1 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2}.
 \end{aligned} \quad (32)$$

С учетом (32) и (31) получаем систему разрешающих уравнений для исследования нелинейных продольных волн деформации в оболочках, образующих стенки рассматриваемого кольцевого канала:

$$\begin{aligned}
 \varphi_t^{(1)} + 6 \left| \varphi^{(1)} \right|^{1/2} \varphi_{\eta}^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} - \sigma_1 \left( \varphi_{\eta}^{(1)} - \varphi_{\eta}^{(2)} \right) &= 0; \\
 \varphi_t^{(2)} + 6 \left| \varphi^{(2)} \right|^{1/2} \varphi_{\eta}^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma_1 \left( \varphi_{\eta}^{(2)} - \varphi_{\eta}^{(1)} \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (33)$$

В (32), (33) нижний буквенный индекс обозначает соответствующую частную производную.

Система уравнений (33) имеет частное точное решение:

$$\varphi^{(1)}(t, \eta) = \varphi^{(2)}(t, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \operatorname{ch} k(\eta - 4k^2 t)\right)^{-2}, \quad (34)$$

но для общего случая необходимо численное исследование этой системы. При реализации численного решения системы (33) будем использовать начальные условия при  $t = 0$  в виде решения (34), когда волна деформации возбуждается в каждой оболочке

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \operatorname{ch} k\eta\right)^{-2} \quad (35)$$

или когда волна деформации возбуждается в одной оболочке

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \frac{25}{4} k^4 \left(1 + \operatorname{ch} k\eta\right)^{-2}, \quad \varphi^{(2)}(0, \eta) = 0. \quad (36)$$

Для моделирования волнового процесса на основе численного решения нелинейной системы (33) разработана разностная схема по аналогии со схемой из [17, 25] в подходе, схожем с построением разностной схемы Кранка — Николсона при моделировании распространения теплоты:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + 4 \frac{\left(u_{j+1}^{(1)3/2n+1} - u_{j-1}^{(1)3/2n+1}\right) + \left(u_{j+1}^{(1)3/2n} - u_{j-1}^{(1)3/2n}\right)}{4h} + \\ & + \frac{\left(u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1}\right)}{4h^3} + \\ & + \frac{\left(u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n}\right)}{4h^3} + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \\ & - \sigma_1 \left( \frac{\left(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1}\right) + \left(u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n}\right)}{4h} - \right. \\ & \left. - \frac{\left(u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1}\right) + \left(u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n}\right)}{4h} \right) = 0; \quad (37) \\ & \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + 4 \frac{\left(u_{j+1}^{(2)3/2n+1} - u_{j-1}^{(2)3/2n+1}\right) + \left(u_{j+1}^{(2)3/2n} - u_{j-1}^{(2)3/2n}\right)}{4h} + \\ & + \frac{\left(u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1}\right)}{4h^3} + \\ & + \frac{\left(u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n}\right)}{4h^3} + \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_1 \left( \frac{\left( u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h} - \right. \\
 & \left. - \frac{\left( u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h} \right) = 0; \quad (37) \\
 & \tau = t_{n+1} - t_n, \quad h = \eta_{j+1} - \eta_j,
 \end{aligned}$$

где  $u_j^{(1)n} = \varphi^{(1)}(t_n, \eta_j)$ ,  $u_j^{(2)n} = \varphi^{(2)}(t_n, \eta_j)$  — дискретные сеточные функции.

Присутствие в (37) нелинейности в виде степени 3/2 для последующего момента времени разрешается путем линеаризации следующим образом:

$$\begin{aligned}
 v_{k+1}^{3/2} &= v_{k+1}^{3/2} - v_k^{3/2} + v_k^{3/2} = (v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2})(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k) + v_k^{3/2} = \\
 &= \left( v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2} \right) \frac{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}}{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}} \left( v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2}v_k^{1/2} + v_k \right) + v_k^{3/2} \approx \\
 &\approx (v_{k+1} - v_k) \frac{3}{2} v_k^{1/2} + v_k^{3/2} = \frac{3}{2} v_k^{1/2} v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^{3/2}.
 \end{aligned}$$

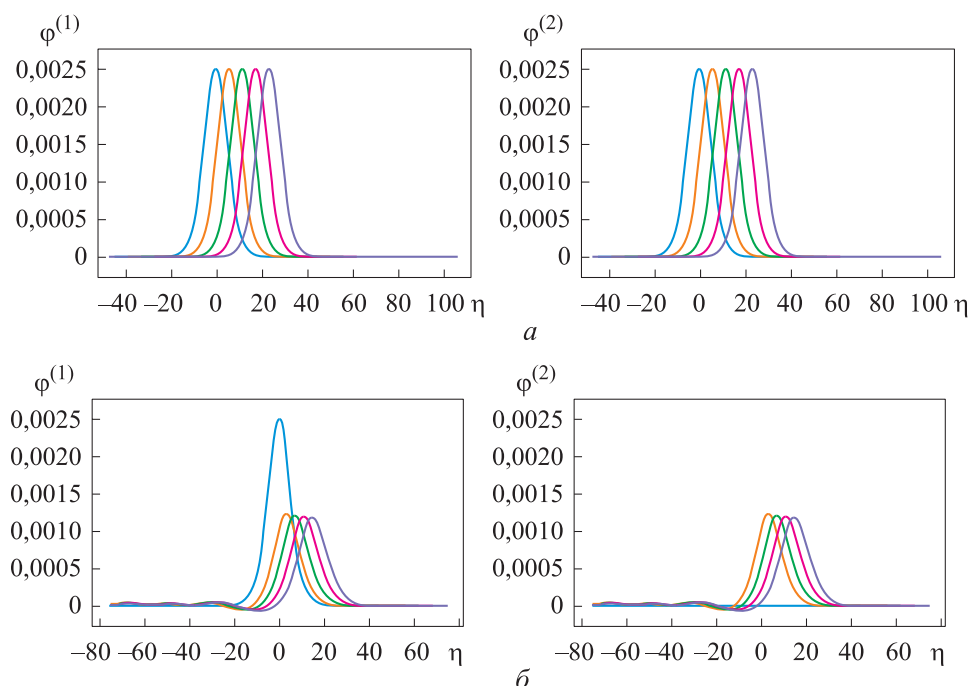
С использованием разностной схемы (37) проведены вычислительные эксперименты с начальными условиями вида (35) и (36). Результаты численного моделирования волнового процесса при реализации разностной схемы (37) с  $\sigma_1 = 0$  (без учета влияния инерции жидкости) и задании в начальных условиях  $k = 0,2$  представлены на рис. 2.

Результаты численного моделирования эволюции волн деформации в оболочках с учетом влияния инерции движения жидкости при  $\sigma_1 = 0,2$  и начальных условия вида (35) и (36) при  $k = 0,2$  представлены на рис. 3.

Кроме того, представлены результаты численного моделирования для случая, когда в начальный момент времени в оболочках создается возмущение в виде двух волн (35) с различными амплитудами и скоростями, принимая  $k = 0,225$  для первой волны и  $k = 0,2$  для второй. Результаты расчетов приведены на рис. 4.

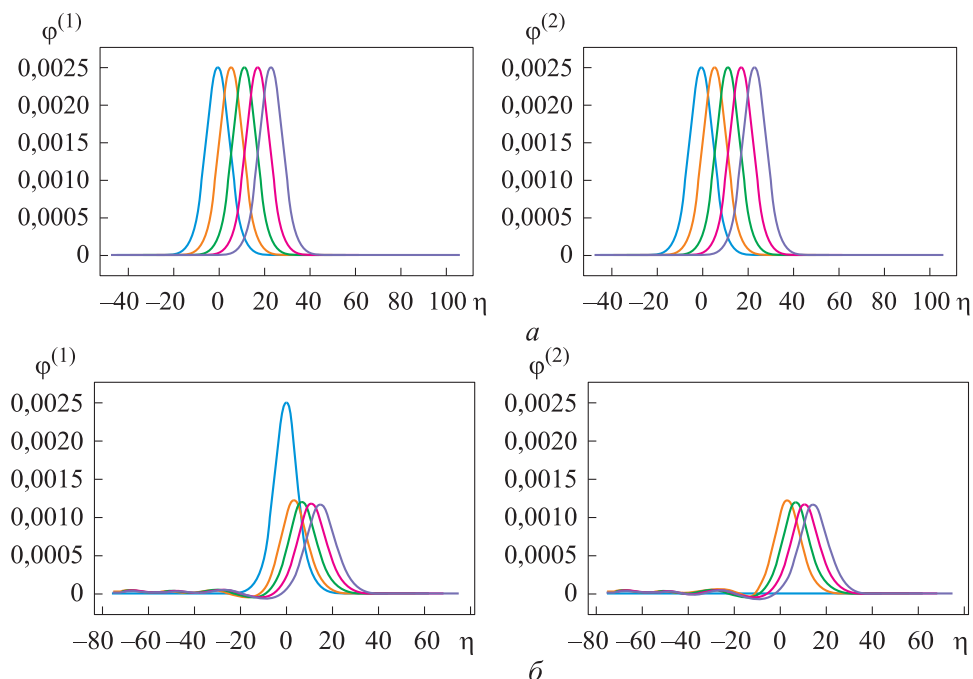
**Обсуждение результатов.** Согласно расчетам, представленным на рис. 2, а, нелинейные уединенные волны деформации распространяются без изменения скорости и амплитуды. При этом они перемещаются вправо, т. е. их эволюция совпадает с положительным направлением оси  $x$ , что указывает на их сверхзвуковую скорость. Численное решение совпадает с аналитическим решением (32), что подтверждает адекватность



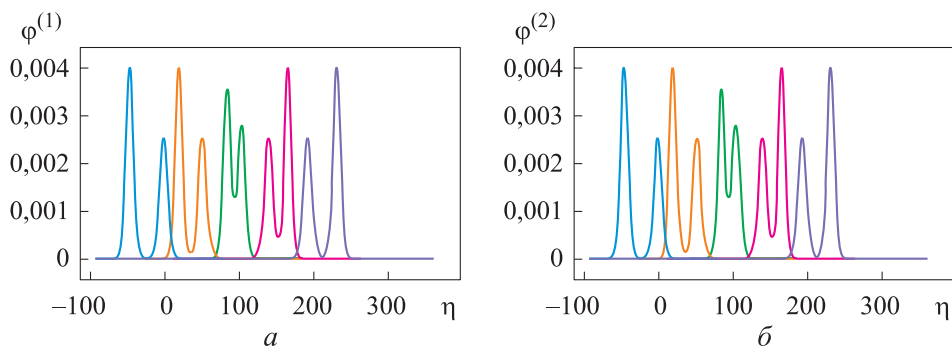


**Рис. 2.** Результаты численного решения системы (33) с начальными условиями (35) (а) и (36) (б) при  $\sigma_1 = 0$  и  $k = 0,2$  при  $t = 0$  (—), 36,23 (—), 72,45 (—), 108,68 (—), 144,90 (—)

предложенной разностной схемы и ее программной реализации. Результаты численного моделирования на рис. 2, б указывают на следующее: если в начальный момент времени создано возмущение в виде уединенной волны только во внешней оболочке, то с течением времени наблюдается уменьшение амплитуды волны во внешней оболочке при одновременном зарождении уединенной волны деформации во внутренней оболочке, амплитуда которой увеличивается. В ходе эволюции данных волн в оболочках их амплитуды выравниваются, что свидетельствует о передаче энергии через слой вязкой жидкости между оболочками. Расчеты, представленные на рис. 3, позволяют сделать вывод, что учет инерции движения вязкой жидкости в кольцевом канале существенно не влияет на эволюцию уединенных волн деформации в его стенках. Это можно объяснить солитонным характером полученного решения. Кроме того, представленные на рис. 4 результаты численного моделирования эволюции и взаимодействия двух уединенных волн в стенках канала показывают, что волны деформации упруго взаимодействуют друг с другом без последующего изменения их скорости и формы, это доказывает, что они ведут себя как два солитона.



**Рис. 3.** Результаты численного решения системы (33) с начальными условиями (35) (а) и (36) (б) при  $\sigma_1 = 0,2$  и  $k = 0,2$  при  $t = 0$  (—), 36,23 (—), 72,45 (—), 108,68 (—), 144,90 (—)



**Рис. 4.** Результаты численного решения системы (33) с начальными условиями для каждой оболочки в виде двух волн (35) с  $k = 0,225$  (а) для первой волны и  $k = 0,2$  (б) для второй волны при  $t = 0$  (—), 326,18 (—), 652,37 (—), 978,55 (—), 1304,73 (—)

**Выводы.** Предложена и исследована новая математическая модель для изучения эволюции нелинейных продольных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью с постоянной плотностью — когда стенки канала образованы упругими цилиндрическими оболочками с дробной физической нелинейностью материала,

из которого они изготовлены. Математическим моделированием показана возможность возникновения и распространения в стенках рассматриваемого канала продольных волн деформации в виде солитонов, а также возможность передачи энергии от одной оболочки к другой через слой вязкой жидкости и отсутствие влияния сил инерции движения вязкой жидкости на эволюцию уединенных волн деформации в рассматриваемых оболочках. Полученные результаты могут рассматриваться как фундаментальный задел для развития волновых технологий неразрушающего контроля и диагностики трубопроводов, выполненных из современных материалов с дробным степенным физическим законом связи напряжений и деформаций в материале.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. и др. Волны в сплошных средах. М., ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [2] Деменков Н.П., Мочалов И.А., Чан Д.М. Нечеткие фазовые траектории волновых твердотельных гироскопов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2021, № 1 (134), с. 78–101.  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-78-101>
- [3] Шахтарин Б.И., Федотов А.А., Балахонов К.А. и др. Применение сигналов с ортогонально частотным разделением в гидроакустическом канале. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 5 (104), с. 30–43.  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-5-30-43>
- [4] Антонов А.М., Ерофеев В.И. Волна Рэлея на границе градиентно-упругого полупространства. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 4 (79), с. 59–72. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-4-59-72>
- [5] Максимов И.В., Павелко В.И., Перевезенцев В.В. и др. Метод выделения полезного сигнала для системы обнаружения свободных, слабозакрепленных и посторонних предметов в главном циркуляционном контуре реакторной установки с водо-водяным энергетическим реактором. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2018, № 1 (118), с. 4–15.  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2018-1-4-15>
- [6] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный, Интеллект, 2010.
- [7] Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.*, 1970, vol. 4, pp. 64–73.
- [8] Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's — Korteweg — De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, vol. 32, iss. 3, pp. 661–677.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(70\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90290-8)

- [9] Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (a review). *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 643–655.  
DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1522030>
- [10] Zemlyanuhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells: a new evolution equation. *Acoust. Phys.*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 303–307.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03353584>
- [11] Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой. *Акустический журнал*, 2017, т. 63, № 2, с. 145–151.  
DOI: <https://doi.org/10.7868/S0320791917020022>
- [12] Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Могилевич Л.И. Уединенные продольно-изгибные волны в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 1 (76), с. 47–60. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-1-47-60>
- [13] Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., et al. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 98, no. 1, pp. 185–194. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
- [14] Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions. Vol. 2. Slender structures and axial flow. Elsevier, 2004.
- [15] Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge Univ. Press, 2008.
- [16] Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2013, т. 6, № 1, с. 94–102.  
DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.1.12>
- [17] Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. и др. Моделирование волновых процессов в двух оболочках с жидкостью между ними и окруженных упругой средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 6 (81), с. 4–17. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-4-17>
- [18] Mogilevich L., Ivanov S. Longitudinal waves in two coaxial elastic shells with hard cubic nonlinearity and filled with a viscous incompressible fluid. In: Dolinina O., et al. *Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2020. Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 337. Cham, Springer, 2020, pp. 14–26.  
DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
- [19] Samarskii A.A. The theory of difference schemes. Marcel Dekker, 2001.
- [20] Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1958.
- [21] Фельдштейн В.А. Упругопластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе. В кн.: *Волны в неупругих средах*. Кишинев, Изд-во АН МолССР, 1970, с. 199–204.

- [22] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М., Изд-во МГУ, 1990.
- [23] Loitsyanskii L.G. Mechanics of liquids and gases. Pergamon Press, 1966.
- [24] Nayfeh A.H. Perturbation methods. Wiley, 1973.
- [25] Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. *SIGMA*, 2006, vol. 2, art. 051.  
DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>

**Могилевич Лев Ильич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, Саратов, Политехническая ул., д. 77).

**Попова Елизавета Викторовна** — аспирантка кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, Саратов, Политехническая ул., д. 77).

**Попова Мария Викторовна** — студентка кафедры «Основы медицины и медицинских технологий» СГУ (Российская Федерация, 410012, Саратов, Астраханская ул., д. 83).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Могилевич Л.И., Попова Е.В., Попова М.В. Математическое моделирование эволюции продольных волн деформации в кольцевом канале с вязкой жидкостью, стенки которого имеют дробную физическую нелинейность. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 1 (112), с. 4–27. EDN: DCJWDO

**MATHEMATICAL SIMULATION OF THE LONGITUDINAL STRAIN WAVES EVOLUTION IN THE ANNULAR CHANNEL WITH VISCOUS FLUID AND WALLS WITH FRACTIONAL PHYSICAL NONLINEARITY**

L.I. Mogilevich<sup>1</sup>

E.V. Popova<sup>1</sup>

M.V. Popova<sup>2</sup>

mogilevichli@gmail.com

elizaveta.popova.97@bk.ru

mari.popova.2004@internet.ru

<sup>1</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

<sup>2</sup> Saratov State University, Saratov, Russian Federation

**Abstract**

The paper proposes mathematical model of propagation of the longitudinal nonlinear strain waves in walls of the annular channel filled with the viscous liquid of constant density, their propagation was simulated. The channel walls were considered as two infinitely long cylindrical

**Keywords**

*Simulation, strain waves, annular channel, fractional nonlinearity, viscous fluid, perturbation method, generalized Shamel equation*

shells with the coinciding longitudinal symmetry axes. The case was studied, where the shell material had fractional physical nonlinearity. Within the developed model framework, influence of the fluid motion inertia and its viscosity on the wave process was assessed. Asymptotic analysis of the resolving equations for the channel walls hydroelasticity was carried out using the perturbation method, and a transition was made to the two generalized Shamel equations system describing evolution of the longitudinal nonlinear strain waves in the walls of a channel under consideration. For a particular case, an exact solution of this soliton-type system was found, and it was shown that in a general case the system required numerical research. To implement the computational experiment, new difference schemes were proposed, similar to the Crank — Nicholson scheme, to study heat propagation. The simulation showed that over time, the strain waves speed and amplitude were remaining unchanged, and the wave speed was supersonic. When considering the exact solution as the initial condition, calculations showed coincidence between the numerical and exact solutions. This confirms adequacy of the proposed difference scheme for the generalized Shamel equations. It is shown that solitary strain waves in the channel walls are the solitons

Received 25.01.2023

Accepted 22.06.2023

© Author(s), 2024

---

*The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-29-00140)*

## REFERENCES

- [1] Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., et al. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in continuous media]*. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2004.
- [2] Demenkov N.P., Mochalov I.A., Chan D.M. Fuzzy phase trajectories in hemispherical resonator gyroscopes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2021, no. 1 (134), pp. 78–101 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-78-101>
- [3] Shakhtarin B.I., Fedotov A.A., Balakhonov K.A., et al. The usage of OFDM-based signals in underwater acoustic channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2015, no. 5 (104), pp. 30–43 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-5-30-43>
- [4] Antonov A.M., Erofeev V.I. Rayleigh wave on the boundary of gradient-elastic semi-space. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 4 (79), pp. 59–72 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-4-59-72>



- [5] Maksimov I.V., Pavelko V.I., Perevezentsev V.V., et al. Valid signal isolation method for loose parts monitoring system in the main circulation circuit of WWER reactor. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2018, no. 1 (118), pp. 4–15 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2018-1-4-15>
- [6] Kudryashov N.A. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]*. Dolgoprudnyy, Intellect Publ., 2010.
- [7] Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.*, 1970, vol. 4, pp. 64–73.
- [8] Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's — Korteweg — De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, vol. 32, iss. 3, pp. 661–677.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(70\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90290-8)
- [9] Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (a review). *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 643–655.  
DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1522030>
- [10] Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells: a new evolution equation. *Acoust. Phys.*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 303–307.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03353584>
- [11] Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Solitary waves in an inhomogeneous cylindrical shell interacting with an elastic medium. *Acoust. Phys.*, 2017, vol. 63, no. 2, pp. 148–153. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063771017020026>
- [12] Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. Solitary longitudinal-bending waves in cylindrical shell interacting with a nonlinear elastic medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 1 (76), pp. 47–60 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-1-47-60>
- [13] Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., et al. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 98, no. 1, pp. 185–194. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
- [14] Paidoussis M.P. *Fluid-structure interactions. Vol. 2. Slender structures and axial flow*. Elsevier, 2004.
- [15] Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge Univ. Press, 2008.
- [16] Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Continuum Mechanics]*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94–102 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.1.12>
- [17] Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., et al. Simulating wave processes in two shells separated by liquid and surrounded by an elastic medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 6 (81), pp. 4–17 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-4-17>

- [18] Mogilevich L., Ivanov S. Longitudinal waves in two coaxial elastic shells with hard cubic nonlinearity and filled with a viscous incompressible fluid. In: Dolinina O., et al. *Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2020. Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 337. Cham, Springer, 2020, pp. 14–26.  
DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
- [19] Samarskii A.A. The theory of difference schemes. Marcel Dekker, 2001.
- [20] Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1958.
- [21] Feldshteyn V.A. Uprugoplasticheskie deformatsii tsilindricheskoy obolochki pri prodolnom udare [Elastic plastic deformations of a cylindrical shell with a longitudinal impact]. V kn.: *Volny v neuprugikh sredakh* [In: Waves in Inelastic Media]. Kishinev, AS MolSSR Publ., 1970, pp. 199–204 (in Russ.).
- [22] Ilyushin A.A. Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum mechanics]. Moscow, MSU Publ., 1990.
- [23] Loitsyanskii L.G. Mechanics of liquids and gases. Pergamon Press, 1966.
- [24] Nayfeh A.H. Perturbation methods. Wiley, 1973.
- [25] Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. *SIGMA*, 2006, vol. 2, art. 051.  
DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>

**Mogilevich L.I.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnicheskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

**Popova E.V.** — Post-Graduate Student, Department of Information Security of Automated Systems, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnicheskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

**Popova M.V.** — Student, Department of Fundamentals of Medicine and Medical Technologies, Saratov State University (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Mogilevich L.I., Popova E.V., Popova M.V. Mathematical simulation of the longitudinal strain waves evolution in the annular channel with viscous fluid and walls with fractional physical nonlinearity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 1 (112), pp. 4–27 (in Russ.). EDN: DCJWDO