УДК 517.984.46 EDN: HJBCVH

АСИМПТОТИКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ДВУМЯ РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ НА ОСИ

А.М. Головина amgolovina@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

На вещественной оси рассмотрен одномерный дифференциальный оператор второго порядка с периодическими коэффициентами. Возмущение этого оператора осуществляется с помощью двух функций, которые являются вещественными, финитными и непрерывными. Носители возмущающих функций расположены на большом расстоянии друг от друга. В работе изучено поведение резольвенты рассматриваемого оператора при увеличении расстояния между носителями этих возмущающих функций. Получены первые два члена формального асимптотического представления резольвенты возмущенного одномерного периодического дифференциального оператора второго порядка. Выявлена достаточно сложная структура первого члена асимптотического представления резольвенты исследуемого дифференциального оператора второго порядка с двумя разбегающимися функциями. Сложность структуры первого члена асимптотики заключается в том, что он состоит из суммы трех абсолютно равноправных слагаемых, каждое из которых локализовано в определенной части вещественной оси. Построены первые два члена формального асимптотического представления резольвенты исследуемого оператора. Метод, с помощью которого определены результаты настоящей работы, позволяет строить не только первые члены асимптотического представления резольвенты дифференциального оператора с двумя финитными разбегающимися функциями, но и все последующие его члены

Ключевые слова

Оператор, периодический оператор, разбегающиеся возмущения, асимптотика, резольвента

Поступила 27.03.2023
Принята 07.11.2023

Введение. Изучению резольвент дифференциальных операторов с различного рода возмущениями во всевозможных областях посвящено довольно много работ. Перечислять все имеющиеся работы не имеет смысла, отметим только некоторые, например, [1–20].

Эллиптический самосопряженный оператор второго порядка на графе с малыми ребрами, в вершинах которого поставлено граничное условие различного вида, рассмотрен в [1–3]. Доказано, что резольвенты рассматриваемого оператора аналитичны [2, 3]. Представление для резольвенты в виде сходящего ряда выведено в [1]. Резольвента оператора Шрёдингера на простейшем графе с малыми ребрами исследована в [4]. В вершинах графа устанавлено граничное условие Дирихле или Неймана. Основной результат работы — первые поправки асимптотики резольвенты рассматриваемого оператора и оценка остатка асимптотики.

Несамосопряженный оператор второго порядка в многомерной области с тонким отростком конечной длины рассмотрен в [5]. На границе устанавливались граничные условия и Дирихле, и Неймана. Для таких операторов доказана резольвентная сходимость к предельным операторам. Объектом исследования [6] был эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами в многомерной области с малым отверстием. Показано, что резольвента этого оператора сходится к резольвенте предельного оператора в области без отверстия.

Линейный самосопряженный дифференциальный оператор эллиптического типа в некоторой конечномерной области многомерного пространства рассмотрен в [7]. Выведена оценка нормы для резольвенты этого оператора.

Эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в многомерном цилиндре с краевым условием Дирихле исследован в [8]. Изучено локальное аналитическое продолжение окаймленной резольвенты оператора из верхней полуплоскости в нижнюю по спектральному параметру в окрестности внутренней точки существенного спектра. Доказано, что размер окрестности зависит только от геометрических свойств цилиндра. Описано поведение окаймленной резольвенты по спектральному параметру в окрестности точки существенного спектра.

Основной объект изучения в [9] — обобщенная резольвента некоторого двухпараметрического пучка самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, возмущенная некоторым ограниченным оператором. Получена аппроксимация рассматриваемой резольвенты. Семейство периодических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве исследовано в [10], а семейство операторов в гильбертовом пространстве, допускающих факторизацию, — в [11]. Для резольвенты операторов, рассматриваемых в [10, 11], получено приближение по операторной норме в гильбертовом пространстве.

Отметим подробнее работы, в которых исследована резольвента дифференциальных операторов с разбегающимися возмущениями.

Оператор Шрёдингера с двумя разбегающимися возмущениями в трехмерном пространстве исследован в [12, гл. 8, § 8.6] и [14]. Некоторое унитарное преобразование рассматриваемого матричного оператора, зависящее от расстояния между возмущениями, построено в [12, гл. 8, § 8.6]. Доказана сходимость резольвенты построенного преобразования. Резольвента возмущенного оператора в [14] построена с использованием некоторого унитарного представления группы. Доказана сходимость резольвенты возмущенного оператора к резольвенте исходного. Оператор Лапласа, возмущенный функциями из класса Рольника, рассмотрен в [13]. Показано существование некоторого предельного оператора и доказана равномерная сходимость к нулю разности резольвент возмущенного и предельного операторов в норме Гильберта — Шмидта.

Объект исследования [15, 16] — дифференциальный оператор высокого порядка, который рассматривался в многомерном пространстве. Возмущениями являлись произвольные операторы. Построена формула для резольвенты возмущенного оператора. Доказана равномерная резольвентная сходимость. Обобщением работ [15, 16] стала [17], где получены результаты, аналогичные результатам работ [15, 16], но не для дифференциального оператора, а для произвольного периодического.

В настоящей работе на вещественной оси рассмотрен одномерный периодический дифференциальный оператор второго порядка с двумя разбегающимися возмущениями. Возмущения описываются некоторыми финитными непрерывными функциями. Объект исследования — резольвента рассматриваемого периодического оператора. Здесь построены первые два члена асимптотического представления резольвенты одномерного периодического дифференциального оператора второго порядка с двумя разбегающимися возмущениями. Методика, с использованием которой получены основные результаты работы, впервые описана в [15–17]. Эта методика позволила продемонстрировать интересную структуру первого члена асимптотического представления резольвенты исследуемого оператора. Как уже было отмечено, особенность структуры асимптотики заключается в том, что первый член асимптотического представления состоит из суммы трех абсолютно равноправных слагаемых, каждое из которых локализовано в определенной части вещественной оси.

Постановка задачи. Пусть $p(x) \in C^1(R)$, $q(x) \in C(R)$ — периодические функции с периодом ℓ; ℓ — большой положительный параметр; I — тождественный оператор. Определим невозмущенный оператор H_0, действующий из пространства $W_2^2(R)$ в пространство $L_2(R)$ следующим образом:

$$\left(H_0 u\right)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\, p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) u(x).$$

В качестве возмущающих функций рассмотрим непрерывные финитные функции $L_\pm(x)$. Сконструируем возмущенный оператор H_ℓ и еще два вспомогательных оператора $H_\mp$, действующих из пространства $W_2^2(R)$ в пространство $L_2(R)$:

$$\left(H_\ell u\right)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\, p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) u(x) + \left(L_+(x-\ell) + L_-(x+\ell)\right) u(x);$$

$$\left(H_\mp u\right)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\, p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) u(x) + L_\mp(x) u(x).$$

Поскольку невозмущенный оператор H_0 является самосопряженным, а возмущающие функции $L_\pm(x)$ финитны и непрерывны, по теореме Като — Реллиха [14, гл. 10, § 10.2] возмущенные операторы H_ℓ и $H_\mp$ также являются самосопряженными. Следовательно, спектры этих операторов представляют собой подмножества вещественной оси [15, гл. V, § 3.5]. Это означает, что для всех $\lambda \in C \setminus R$ существуют резольвенты $(H_\ell - \lambda I)^{-1}$, $(H_\mp - \lambda I)^{-1}$.

Отметим, что функцию $u = (H_\ell - \lambda I)^{-1} f$ можно эквивалентно ввести как решение уравнения

$$(H_\ell - \lambda) u = f, \tag{1}$$

где $\lambda \in C \setminus R$; $f \in L_2(R)$.

Цель работы — построить первые члены формального асимптотического представления решения уравнения (1). Напомним, что под формальным асимптотическим представлением функции будем понимать стандартное определение асимптотического представления функции, например, [16, гл. 1, § 1.2, определение 2.2], но без оценки погрешности остатка или, другими словами, без обоснования. Для рассматриваемой задачи первые два члена формального асимптотического представления решения уравнения (1) для $\forall f \in L_2(R)$ при $\ell \to +\infty$ имеют вид:

$$u(x,\ell)=u_0(x)+u_1^+(x-\ell)+u_1^-(x+\ell)+u_2^+(x-\ell)+u_2^-(x+\ell)+\ldots, \tag{2}$$

где u_0, $u_1^{\pm} \in W_2^2(R)$ — функции, которые необходимо найти.

Формулирование основного результата. Теорема. *При всех* $\lambda \in C \setminus R$ *первые два члена формального асимптотического представления решения уравнения (1) для* $\forall f \in L_2(R)$ *при* $\ell \to +\infty$ *представимы в виде*

$$\begin{aligned} u(x,\ell)=&\left(H_0-\lambda I\right)^{-1} f(x)+\left(H_+-\lambda I\right)^{-1}\left(-L_+u_0(x-\ell)\right)+\\ &+\left(H_--\lambda I\right)^{-1}\left(-L_-u_0(x+\ell)\right)+\\ &+\left(H_+-\lambda I\right)^{-1}\left(L_+\left(H_--\lambda I\right)^{-1}\left(L_-u_0(x+3\ell)\right)\right)+\\ &+\left(H_--\lambda I\right)^{-1}\left(L_-\left(H_+-\lambda I\right)^{-1}\left(L_+u_0(x-3\ell)\right)\right)+\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство основного результата. Прежде чем доказать теорему, поясним смысл полученного результата, т. е. ответим на вопрос: как понимать убывание на бесконечности построенного решения? Для этого рассмотрим более простой случай. Пусть функция f финитна и $\mathrm{supp} f = [a,b]$. Предположим, что носители функций $L_{\pm}$ лежат внутри отрезка $[a,b]$. В этом случае для u_0 верны формулы

$$u_0(x)=u_0(a)e^{\sqrt{-\lambda}(x-a)},\ \ x<a,\ \ u_0(x)=u_0(b)e^{-\sqrt{-\lambda}(x-b)},\ \ x>b. \tag{4}$$

Подставляя (2) в (1), раскрывая скобки и учитывая поведение на бесконечности функции $u_0(x)$, получаем, что функции $u_1^{\pm}(x,\ell)$ на бесконечности имеют вид:

$$u_1^{\pm}(x,\ell)=\left(H_{\pm}-\lambda I\right)^{-1}\left(-L_{\pm}u_0(x\mp\ell)\right)=e^{-\ell\sqrt{-\lambda}}\tilde{u}_1^{\pm}(x), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^+(x)&=-u_0(b)\left(H_+-\lambda I\right)^{-1}\left(L_+e^{-\sqrt{-\lambda}(x-b)}\right);\\ \tilde{u}_1^-(x)&=-u_0(a)\left(H_--\lambda I\right)^{-1}\left(L_-e^{\sqrt{-\lambda}(x-a)}\right). \end{aligned}$$

Другими словами, функции $u_1^{\pm}$ экспоненциально убывают на бесконечности с ростом параметра ℓ. Для определения поведения на бесконечности функций $u_2^{\pm}$ вновь используем формулы (5), которые описывают поведение функций $u_1^{\pm}$ на бесконечности. Получаем, что для функций $u_2^{\pm}$ справедливы соотношения: $u_2^{\pm}(x,\ell)=e^{-3\ell\sqrt{-\lambda}}\tilde{u}_2^{\pm}(x)$. Здесь $\tilde{u}_2^{\pm}(x)=$

$=\left(H_{\pm}-\lambda I\right)^{-1}\left(-L_{\pm}(x)\tilde{u}_1^{\mp}(x)\right)$. Эти формулы показывают, что функции $u_2^{\pm}$ экспоненциально убывают на бесконечности с увеличением параметра ℓ быстрее, чем функции $u_1^{\pm}$. Таким образом, аналогом основного результата для случая финитной функции f является асимптотическое представление решения уравнения (1) в виде:

$$u(x,\ell)=u_0(x)+e^{-\ell\sqrt{\lambda}}u_1^{\pm}(x)+e^{-3\ell\sqrt{\lambda}}u_2^{\pm}(x)+\ldots$$

Пусть в правой части уравнения (1) будет расположена произвольная функция $f\in L_2(R)$. В этом случае первым членом формального асимптотического представления решения уравнения (1) следует считать сумму трех слагаемых вида

$$u(x,\ell)=u_0(x)+u_1^{+}(x-\ell)+u_1^{-}(x+\ell)+\ldots,$$

где u_0, $u_1^{\pm}\in W_2^2(R)$ — некоторые функции. В этом легко убедиться, если правую часть уравнения (1) представить в виде суммы трех слагаемых $f=f_0+f_+(x-\ell)+f_-(x+\ell)$, каждое из которых является правой частью соответствующего уравнения $(H_0-\lambda)u_0=f_0$, $(H_{\pm}-\lambda)u_1^{\pm}(x\mp\ell)=$ $=f_+(x\mp\ell)$. Подставим представление для f в виде суммы в выражение для u_0 и выполним необходимую замену переменной. В результате получим, что функции $u_0(x\pm\ell)$ могут и не убывать экспоненциально по ℓ. Поэтому функции $u_1^{\pm}$ не обязательно малы по сравнению с u_0 в случае функции f общего вида и сумму функций $u_0+u_1^{+}(x-\ell)+u_1^{-}(x+\ell)$ следует рассматривать в качестве первого члена асимптотики (2).

Перейдем к доказательству теоремы. Для нахождения первых членов асимптотического разложения решения уравнения (1) подставим (2) в (1) и раскроем скобки. В результате запишем уравнение

$$\begin{gathered}\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)-\lambda\right)u_0+\left(L_+(x-\ell)+L_-(x+\ell)\right)u_0+\\+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_+(x-\ell)-\lambda\right)u_1^{+}(x-\ell)+\\+L_+(x-\ell)u_1^{-}(x+\ell)+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_-(x+\ell)-\lambda\right)u_1^{-}(x+\ell)+\\+\ L_-(x+\ell)u_1^{+}(x-\ell)+\ldots=f.\end{gathered}\tag{6}$$

Обозначим

$$h_1^+(x-\ell) = L_+(x-\ell)u_0 +$$
$$+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_+(x-\ell)-\lambda\right)u_1^+(x-\ell)+L_+(x-\ell)u_1^-(x+\ell);$$

$$h_1^-(x+\ell) = L_+(x+\ell)u_0 + \left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_-(x+\ell)-\lambda\right)u_1^-(x+\ell)+$$
$$+L_-(x+\ell)u_1^+(x-\ell).$$

С учетом новых обозначений уравнение (6) примет вид

$$h_1^+(x-\ell)+h_1^-(x+\ell)+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)-\lambda\right)u_0+\ldots = f. \tag{7}$$

Введенные функции $h_1^+(x)$, $h_1^-(x)$ являются финитными и зависят от параметра ℓ. Это означает, что уравнение (6) выполнено только тогда, когда

$$\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)-\lambda\right)u_0 = f(x). \tag{8}$$

Как уже было отмечено, резольвента оператора $(H_0-\lambda)^{-1}$ существует, т. е. функцию u_0 можно определить из уравнения (8) следующим образом:

$$u_0 = \left(H_0-\lambda I\right)^{-1} f. \tag{9}$$

Используя то, что функции $h_1^+(x)$, $h_1^-(x)$ финитны, а функции $p(x)$, $q(x)$ периодические, с учетом (7), (8) приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} &L_+u_0(x+\ell)+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_+-\lambda\right)u_1^+ + L_+u_1^-(x+2\ell)+\ldots = 0;\\ &L_-u_0(x-\ell)+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_--\lambda\right)u_1^- + L_-u_1^+(x-2\ell)+\ldots = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогично лемме 5 из [12] легко показать, что выражения вида $L_+u_1^-(x+2\ell)$, $L_-u_1^+(x-2\ell)$ убывают быстрее, чем $L_+u_0(x+\ell)$, $L_+u_0(x-\ell)$. Это означает, что в (10) слагаемые $L_+u_1^-(x+2\ell)$, $L_-u_1^+(x-2\ell)$ можно не учитывать. В связи с этим уравнения (10) будут иметь вид

$$L_-u_0(x-\ell)+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)+L_--\lambda\right)u_1^- = 0; \tag{11}$$

$$L_+ u_0(x+\ell) + \left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) + L_+ - \lambda\right)u_1^+ = 0. \tag{11}$$

В силу того, что резольвента $(H_\mp - \lambda)^{-1}$ существует, функции $u_1^\pm$ находим из уравнений (11). Приходим к выводу, что они имеют следующий вид:

$$u_1^\pm = (H_\pm - \lambda)^{-1}\left(-L_\pm u_0(x \pm \ell)\right). \tag{12}$$

Формулы (12) совпадают со вторым и третьим слагаемым в асимптотическом представлении резольвенты возмущенного оператора (3). Следующие члены асимптотики решения уравнения (1) ищем аналогично. Представим функцию $u(x,\ell)$ в виде

$$u(x,\ell) = u_0(x) + u_1^+(x-\ell) + u_1^-(x+\ell) + u_2^+(x-\ell) + u_2^-(x+\ell) + \ldots \tag{13}$$

Здесь u_0, $u_1^\pm \in W_2^2(R)$ — найденные функции; $u_2^\pm \in W_2^2(R)$ — неизвестные функции, которые предстоит найти. Для их определения вновь подставим функцию $u(x,\ell)$ (13) в уравнение (1) и раскроем скобки. В результате получим уравнение вида

$$\begin{gathered}
\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) - \lambda\right)u_0 + \left(L_+(x-\ell) + L_-(x+\ell)\right)u_0 + \\
+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) + L_+ - \lambda\right)u_1^+(x-\ell) + L_-(x+\ell)u_1^+(x-\ell) + \\
+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) + L_- - \lambda\right)u_1^-(x+\ell) + L_+(x-\ell)u_1^-(x+\ell) + \\
+\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) + L_+ - \lambda\right)u_2^+(x-\ell) + \\
+ L_-(x+\ell)u_2^+(x-\ell) + \left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x\cdot) + L_+ - \lambda\right)u_2^-(x-\ell) + \\
+ L_+(x-\ell)u_2^-(x+\ell) + \ldots = f.
\end{gathered} \tag{14}$$

Перепишем уравнение (14) с учетом равенств (9), (11):

$$\left(-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) + L_\pm - \lambda\right)u_2^\pm + L_\pm u_1^\mp(x \pm 2\ell) = 0. \tag{15}$$

После умножения функций u_1^+, $u_1^- \in W_2^2(R)$ на финитные $L_\pm$ результат умножения будет принадлежать пространству $L_2(R)$. Это означает, что можно применить резольвенты $(H_+ - \lambda I)^{-1}$, $(H_- - \lambda I)^{-1}$ к уравнениям в равенствах (15). Получаем, что функции u_2^+, $u_2^- \in W_2^2(R)$ имеют следующий вид:

$$u_2^{\pm}(x,\ell) = \left(H_{\pm} - \lambda I\right)^{-1}\left(-L_{\pm}u_1(x \pm 2\ell, \ell)\right).$$

Подставляем в последние равенства найденные функции $u_1^{\pm}$ из формул (12) и определяем:

$$u_2^{\pm}(x,\ell) = \left(H_{\pm} - \lambda I\right)^{-1}\left(L_{\pm}(H_{\mp} - \lambda)^{-1}\left(L_{\mp}u_0(x \pm 3\ell)\right)\right).$$

Последние формулы свидетельствуют о том, что цель работы достигнута. Построены первые два члена асимптотического представления резольвенты одномерного периодического дифференциального оператора второго порядка с двумя разбегающимися возмущениями на оси.

Обсуждение полученных результатов. Несмотря на достаточно широкий класс операторов, резольвенты которых были исследованы, вопрос о резольвенте оператора, рассматриваемого в настоящей работе, до сих пор оставался открытым. Интересным результатом является сложная структура первого члена асимптотического представления резольвенты. Он состоит из трех абсолютно равноправных слагаемых, каждое из которых локализовано в определенной части вещественной оси. В работе построен не только первый член асимптотического представления, но и второй. Это сделано для того, чтобы можно было показать последующую структуру асимптотики. Построена также экспоненциально убывающая асимптотика резольвенты возмущенного оператора в случае не только финитности возмущающих функций, но и финитности правой части уравнения — функции f.

Заключение. Задачу отыскания резольвенты можно рассматривать как задачу отыскания решения определенного дифференциального уравнения. Другими словами, можно утверждать, что поиск резольвенты дифференциального оператора — это фактически поиск обратного оператора. Задачи отыскания резольвенты дифференциального оператора имеют широкое применение, например, при восстановлении сигнала в оптоволоконных сетях, в нанотехнологиях, нейросетях, медицине при восстановлении изображения (рентгеновские снимки и др.). Практическое применение рассмотренной задачи довольно ограничено в связи с одномерностью пространства, поэтому такая задача до сих пор оставалась нерешенной. Однако эта задача является основой для аналогичных исследований в многомерных пространствах и различных областях (например, нанотехнологии).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Борисов Д.И., Газизова Л.И. Ряды Тейлора для резольвент операторов на графах с малыми ребрами. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 2022, т. 28, № 1, с. 40–57. DOI: http://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-40-57

[2] Борисов Д.И. Квантовые графы с малыми ребрами: голоморфность резольвент. *Доклады РАН. Математика, наука и процессы управления*, 2021, т. 498, № 1, с. 21–26. EDN: KZBIJB. DOI: http://doi.org/10.31857/S268695432103005X

[3] Borisov D.I. Analyticity of resolvents of elliptic operators on quantum graphs with small edges. *Adv. Math.*, 2022, vol. 397, no. 5, art. 108125.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108125

[4] Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н. Простейшие графы с малыми ребрами: асимптотики резольвент и голоморфная зависимость спектра. *Уфимский математический журнал*, 2019, т. 11, № 2, с. 56–71. EDN: AAGIMA

[5] Борисов Д.И. О равномерной резольвентой сходимости эллиптических операторов в областях с тонкими отростками. *Проблемы математического анализа*, 2022, № 114, с. 15–36.

[6] Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями. *Проблемы математического анализа*, 2018, № 92, с. 69–81.

[7] Соломяк М.З. Оценка нормы резольвенты эллиптического оператора в пространствах L_p. *Успехи математических наук*, 1960, т. 15, № 6, с. 141–148.

[8] Борисов Д.И., Головина А.М., Мухаметрахимова А.И. Аналитическое продолжение резольвенты эллиптического оператора в многомерном цилиндре. *Проблемы математического анализа*, 2020, № 105, с. 67–87.

[9] Суслина Т.А. Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра. *Алгебра и анализ*, 2013, т. 25, № 5, с. 221–251. EDN: ORJURR

[10] Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора. *Алгебра и анализ*, 2005, т. 17, № 5, с. 69–90. EDN: HSXSWB

[11] Слоущ В.А., Суслина Т.А. Пороговые аппроксимации резольвенты полиномиального неотрицательного операторного пучка. *Алгебра и анализ*, 2021, т. 33, № 2, с. 233–274. EDN: OPGLJV

[12] Davies E.V. Spectral theory and differential operators. Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] Aventini P., Seiler R. On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion. *Commun. Math. Phys.*, 1975, vol. 41, no. 2, pp. 119–134.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01608753

[14] Kostrykin V., Schrader R. Cluster properties of one particle Schrödinger operators. I. *Rev. Math. Phys.*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 833–853.
DOI: https://doi.org/10.1142/S0129055X94000250

[15] Головина А.М. Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями. *Математические заметки*, 2012, т. 91, № 3, с. 464–466.
DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9318

[16] Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space. *Russ. J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 182–192.
DOI: https://doi.org/10.1134/S1061920812020045

[17] Борисов Д.И., Головина А.М. О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями. *Уфимский математический журнал*, 2012, т. 4, № 2, с. 65–74. EDN: PXCPDL

[18] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. II. Гармонический анализ. Самосопряженность. М., Мир, 1978.

[19] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.

[20] Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М., ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Головина Анастасия Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Головина А.М. Асимптотика резольвенты периодического оператора с двумя разбегающимися возмущениями на оси. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 2 (113), с. 22–34. EDN: HJBCVH

RESOLVENT ASYMTOTICS OF A PERIODIC OPERATOR WITH TWO DISTANT PERTURBATIONS ON THE AXIS

A.M. Golovina amgolovina@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers a one-dimensional second-order differential operator with periodic coefficients on the real axis. This operator is perturbed using two functions that are real, finite and continuous. The disturbation function carriers are positioned at a large distance from each other. This work studies behavior of the considered operator resolvent exposed to the increasing distance between these perturbation function carriers. First two terms are obtained of the formal asymptotic representation of the resolvent of a

Keywords

Operator, periodic operator, diverging perturbations, asymptotics, resolvent

perturbed one-dimensional periodic second-order differential operator. A rather complex structure of the first term of the asymptotic representation of the resolvent of the second-order differential operator under study with two diverging functions is revealed. Structure complexity of the asymptotics first term lies in the fact that it consists of the sum of three absolutely equal terms, each of them is localized in a certain section of the real axis. The first two terms of the formal asymptotic representation of the resolvent of the operator under study are constructed. The method used to determine results of this work makes it possible to construct not only the first terms of the asymptotic representation of the resolvent of a differential operator with two compactly diverging functions, but also all its subsequent terms

Received 27.03.2023
Accepted 07.11.2023

REFERENCES

[1] Borisov D.I., Gazizova L.I. Taylor series for resolvents of operators on graphs with small edges. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2022, vol. 317 (suppl. 1), no. 1, pp. S37–S54. DOI: https://doi.org/10.1134/S008154382203004X

[2] Borisov D.I. Quantum graphs with small edges: holomorphy of resolvents. *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 3, pp. 113–117. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562421030054

[3] Borisov D.I. Analyticity of resolvents of elliptic operators on quantum graphs with small edges. *Adv. Math.*, 2022, vol. 397, no. 5, art. 108125. DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108125

[4] Borisov D.I., Konyrkulzhaeva M.N. Simplest graphs with small edges: asymptotics for resolvents and holomorphic dependence of spectrum. *Ufa Mathematical Journal*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 56–71. DOI: https://doi.org/10.13108/2019-11-2-56

[5] Borisov D.I. On uniform resolvent convergence of elliptic operators in regions with thin branches. *Problemy matematicheskogo analiza*, 2022, no. 114, pp. 15–36 (in Russ.).

[6] Borisov D.I., Mukhametrakhimova A.I. On uniform resolvent convergence for elliptic operators in multidimensional regions with small holes. *Problemy matematicheskogo analiza*, 2018, no. 92, pp. 69–81 (in Russ.).

[7] Solomyak M.Z. Evaluation of norm of the resolvent of elliptic operators in L_p-spaces. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1960, vol. 15, no. 6, pp. 141–148 (in Russ.).

[8] Borisov D.I., Golovina A.M., Mukhametrakhimova A.I. Analytic continuation of the resolvent of an elliptic operator in a multidimensional cylinder. *Problemy matematicheskogo analiza*, 2020, no. 105, pp. 67–87 (in Russ.).

[9] Suslina T.A. Approximation of the resolvent of a two-parametric quadratic operator pencil near the bottom of the spectrum. *St. Petersburg Math. J.*, 2014, vol. 25, no. 5, pp. 869–891. DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2014-01320-9

[10] Birman M.Sh., Suslina T.A. Threshold approximations with corrector for the resolvent of a factorized selfadjoint operator family. *St. Petersburg Math. J.*, 2006, vol. 17, no. 5, pp. 745–762. DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-06-00927-7

[11] Sloushch V.A., Suslina T.A. Threshold approximations for the resolvent of a polynomial nonnegative operator pencil. *St. Petersburg Math. J.*, 2022, vol. 33, no. 2, pp. 355–385. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1704

[12] Davies E.V. Spectral theory and differential operators. Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] Aventini P., Seiler R. On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion. *Commun. Math. Phys.*, 1975, vol. 41, no. 2, pp. 119–134.
DOI: https://doi.org/10.1007/BF01608753

[14] Kostrykin V., Schrader R. Cluster properties of one particle Schrödinger operators. I. *Rev. Math. Phys.*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 833–853.
DOI: https://doi.org/10.1142/S0129055X94000250

[15] Golovina A.M Resolvents of operators with distant perturbations. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, no. 3, pp. 435–438. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434612030133

[16] Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space. *Russ. J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 182–192.
DOI: https://doi.org/10.1134/S1061920812020045

[17] Borisov D.I., Golovina A.M. On the resolvents of periodic operators with distant perturbations. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 65–74 (in Russ.). EDN: PXCPDL

[18] Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. Vol. 2. Fourier analysis. Self-adjointness. Academic Press, 1980.

[19] Kato T. Perturbation theory for linear operators. Springer, 1966.

[20] Ilin A.M., Danilin A.R. Asimptoticheskie metody v analize [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009.

Golovina A.M. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Golovina A.M. Resolvent asymtotics of a periodic operator with two distant perturbations on the axis. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 2 (113), pp. 22–34 (in Russ.). EDN: HJBCVH