

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ КВАДРАТНОГО БЛОКА НА ОСНОВЕ ДВУЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

М.Э. Мадалиев

m.e.madaliyev@ferpi.uz

А.А. Кучкаров

a.kuchkarov@ferpi.uz

Ферганский политехнический институт, Фергана, Республика Узбекистан

### Аннотация

Рост производительности компьютеров позволяет использовать математическое моделирование в качестве альтернативы физическому эксперименту. Однако точность моделирования турбулентных течений сильно зависит от используемой модели турбулентности. Представлены численные результаты турбулентного внешнего обтекания квадратного блока на основе двухжидкостной модели при  $Re = 24\,000$ . Модель турбулентности реализована в трехмерном виде. Для разностной аппроксимации исходных уравнений применен метод контрольного объема, связь скорости и давления найдена с использованием процедуры SIMPLE, в которой конвективные члены аппроксимировались полунеявной схемой против потока, а диффузионные члены — центральными разностями. Сравнение с экспериментальными данными и существующими моделями турбулентности показало хорошую сходимость и для грубой расчетной сетки. Это свидетельствует о способности модели адекватно описывать нестационарную анизотропную турбулентность. Еще одно преимущество модели — ее простота для численной реализации и хорошая устойчивость. В связи с этим двухжидкостную модель можно рекомендовать для исследования более сложных турбулентных течений

### Ключевые слова

*Уравнения Навье — Стокса, отрывное течение, метод контрольного объема, двухжидкостная модель, SIMPLE*

Поступила 06.03.2023

Принята 19.04.2023

© Автор(ы), 2024

**Введение.** Отрывные течения вязкой жидкости около плохообтекаемых тел или инженерных конструкций наиболее распространены в природе и технике. Вихревые дорожки Кармана, появляющиеся при обтекании препятствий, имеют большое значение при проектировании инженерных конструкций (опоры мостов, башни, дымоходы, морские платформы и пр.).

На практике экономичное и безопасное проектирование конструкций, которые подвергаются воздействию потоков жидкости, требует надежного способа расчета для прогнозирования величин, направлений и частоты воздействующих сил на конструкцию, а также колебаний скорости потока вокруг конструкции [1]. Задача обтекания тел потоком сложна и охватывает такие явления, как разделение и повторное присоединение потоков, нестационарное выпадение вихрей и бимодальное поведение, интенсивная турбулентность, крупномасштабные турбулентные структуры, криволинейные слои сдвига [2]. При обтекании тела в турбулентном режиме точность предсказания течения существенно зависит от используемой турбулентной модели [3–5].

В настоящее время существуют четыре подхода к математическому моделированию турбулентности. К первому подходу относятся методы прямого моделирования (DNS), в основе которых лежит гипотеза о достаточности уравнений Навье — Стокса для описания турбулентных течений. Второй подход — метод моделирования крупных вихрей (LES), основой которого является фильтрация уравнений Навье — Стокса от высоких частот. Третий подход — подход Рейнольдса, который приводит к незамкнутой системе уравнений. Все модели, направленные на замыкание этой системы, называются RANS-моделями [6–8]. Преимущество RANS-моделей — для их численной реализации требуются существенно меньшие вычислительные ресурсы по сравнению с методами DNS и LES. Однако необходимость полуэмпирического замыкания осредненных по Рейнольдсу или Фавру уравнений Навье — Стокса принципиально не позволяет разработать универсальную модель турбулентности. Это означает, что каждая модель имеет свою область применения. Поэтому в зависимости от решаемой задачи инженерам требуется подбирать наиболее подходящую модель турбулентности. Кроме того, существует достаточно много примеров отрывных и рециркуляционных турбулентных течений, расчет которых с использованием RANS-моделей приводит к неудовлетворительным результатам.

Четвертый подход к математическому моделированию турбулентности — использование двухжидкостной модели Сполдинга [9], в основе которой лежит идея разделения турбулентного потока на две жидкости в соответствии с некоторыми химическими или физическими особенностями. Для каждой жидкости записываются уравнения движения по аналогии с двухфазным потоком. Двухжидкостная модель в [9, 10] использована для определения перемежаемости в турбулентных потоках, которые разделены на турбулентные и нетурбулентные жидкости. При моделировании

процесса горения в [11] поток рассмотрен как смесь сгоревших и несгоревших газов. Основной недостаток такого подхода — неясно, по какому признаку разделить обычный турбулентный поток на две жидкости. Поэтому позднее Д. Сполдинг предложил еще один вариант двухжидкостной модели, где турбулентный поток разделяется на более быструю и более медленную жидкости. В этой модели он ввел симметричный закон массопереноса между двумя жидкостями. Основываясь на гипотезе Прандтля, вывел формулу для вихревой вязкости и указал на существование поперечной силы, возникающей в сдвиговом поле скорости. Эта усовершенствованная двухжидкостная модель успешно применена к широкому диапазону ограниченного и свободного турбулентного сдвигового течений. Однако в двухжидкостной модели Сполдинга для поиска длины пути смешения Прандтля использованы дополнительные уравнения. В результате число уравнений удвоилось по сравнению с линейными RANS-моделями, что привело к увеличению вычислительных ресурсов. В связи с этим двухжидкостная модель Сполдинга не получила широкого применения для решения инженерных задач. Однако в [12–16] была представлена усовершенствованная двухжидкостная модель. С учетом первой гипотезы Рейнольдса (скорость в турбулентном потоке состоит из осредненной и флуктуирующей скоростей) в [11] показано, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей, которые совершают относительные движения. На основе двухжидкостного подхода в [15] выполнено моделирование переноса теплоты, а в [16] этот подход применен для моделирования многокомпонентного сжимаемого потока. Для верификации модели решены несколько задач турбулентности из базы данных NASA. Сопоставление с экспериментальными данными показало высокую точность, устойчивость и простоту реализации новой двухжидкостной модели. Эта модель позволяет описывать сложную анизотропную турбулентность. Так, в [14] двухжидкостная модель успешно применена для расчета воздушного центробежного сепаратора.

*Цель работы* — валидация двухжидкостной модели турбулентности для трехмерной задачи, для чего исследовано отрывное обтекание квадратного блока. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными [17, 18] и с результатами моделей DES [18] и RANS-SST [17] при  $Re = 24\,000$ .

**Основные уравнения для турбулентного обтекания.** Основные уравнения — гидродинамические уравнения двухжидкостной модели [11] для несжимаемой среды. Система уравнений модели в тензорном виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_j}{\partial x_j} &= 0, \\
 \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_j V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\rho \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \vartheta_j \vartheta_i \right], \\
 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} + \frac{\partial V_j \vartheta_i}{\partial x_j} &= -\vartheta_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ji} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_{si} + F_{fi}, \\
 \nu_{ji} &= 3\nu + 2 \left| \frac{\vartheta_i \vartheta_j}{\text{def } \bar{V}} \right|, \quad i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \frac{\vartheta_k \vartheta_k}{\text{def } \bar{V}} \left| \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k} / \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_j} \right|, \\
 \bar{F}_f &= -K_f \bar{\vartheta}, \quad \bar{F}_s = C_s \text{rot } \bar{V} \times \bar{\vartheta}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $V_{i,j}$  — компоненты осредненной скорости потока;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность среды;  $\nu$  — молекулярная вязкость;  $\vartheta_{i,j}$  — компоненты относительной скорости;  $\nu_{ji}$  — эффективные молярные вязкости;  $\text{def } \bar{V}$  — скорость деформации,  $\text{def } \bar{V} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ ,  $S_{ij} = (1/2)(\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i)$ ;  $K_f$  — коэффициент трения,

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \left| \frac{d \cdot \vartheta}{d^2} \right|; \tag{2}$$

$C_s$  — коэффициент при силе Сеффмена,  $C_s = 0,2$ . В (2)  $C_1 = 0,7825$ ,  $C_2 = 0,306$  — постоянные модели;  $\lambda_{\max}$  — вещественная часть наибольшего корня характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$ , где  $A$  — матрица,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + C_s \zeta_2 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \zeta = \text{rot } \bar{V};$$

$d$  — ближайшее расстояние до твердой стенки.

**Геометрия области и граничные условия.** Исследовано обтекание квадратного блока в канале. Размеры канала  $24b \times 14b \times 8b$  в направлениях осей  $x$  (длина),  $y$  (ширина) и  $z$  (высота). Квадратный блок имеет высоту  $2b$ , ширину и длину  $b$ . Размер  $b = 0,08$  м [18], при моделировании использован тот же масштаб. Входная постоянная скорость  $U_0 = 6,75$  м/с, что соответствует  $Re = U_0 b / \nu = 24\,000$ . Физическая схема течения, границы расчетной области и вычислительная сетка показаны на рис. 1.

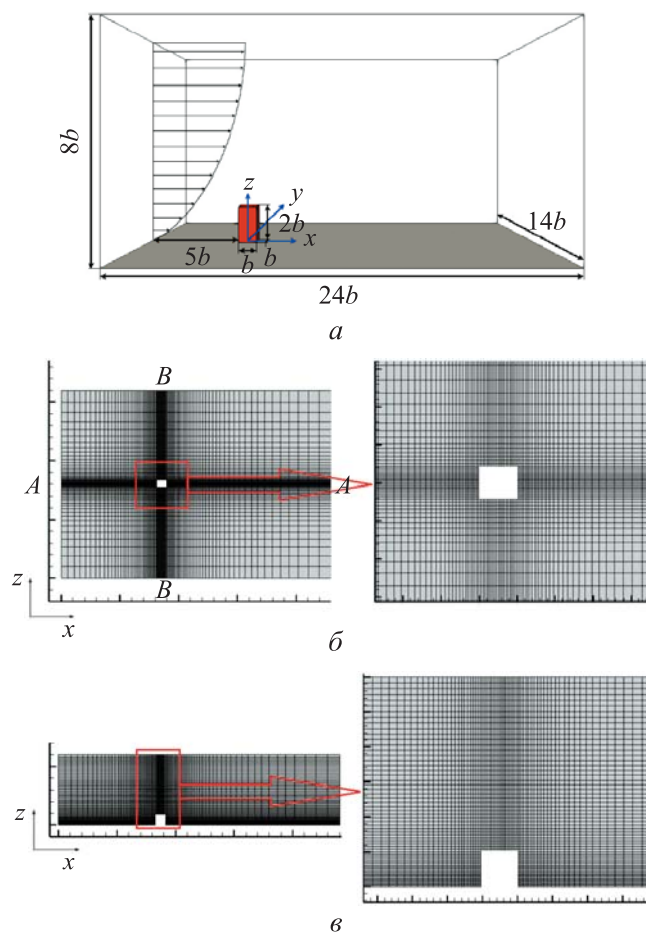


Рис. 1. Геометрия области и вычислительная сетка  $150 \times 80 \times 80$  (а), виды сверху (б) и сбоку (в)

**Математическая модель турбулентности.** Безразмерная трехмерная система уравнений (1) в декартовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial u_i u_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial u_i w}{\partial z}; \\
 & \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \vartheta u_i}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta w}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial w u}{\partial x} - \frac{\partial w \vartheta}{\partial y} - \frac{\partial w w}{\partial z}; \\
 & \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + W \frac{\partial u}{\partial z} = \\
 & = - \left( u \frac{\partial U}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \right) + C_s \left( \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) w - \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \vartheta \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2v_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{xz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) - C_r u; \\
 & \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + W \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = - \left( u \frac{\partial V}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \\
 & + C_s \left( \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) u - \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) w \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{xy} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \quad (3) \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2v_{yy} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{yz} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) - C_r \vartheta; \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial y} + W \frac{\partial w}{\partial z} = - \left( u \frac{\partial W}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial W}{\partial y} + w \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\
 & + C_s \left( \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \vartheta - \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{zx} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{zy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2v_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - C_r w; \\
 & \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$v_{xx} = v_{yy} = v_{zz} = \frac{3}{\text{Re}} + 2 \frac{S}{|\text{def } \bar{U}|}; \quad v_{xy} = \frac{3}{\text{Re}} + 2 \left| \frac{u \vartheta}{\text{def } \bar{U}} \right|;$$

$$v_{xz} = \frac{3}{\text{Re}} + 2 \left| \frac{uw}{\text{def } \bar{U}} \right|; \quad v_{yz} = \frac{3}{\text{Re}} + 2 \left| \frac{\vartheta w}{\text{def } \bar{U}} \right|;$$

$$\begin{aligned}
 & |\text{def } \bar{U}| = \\
 & = \sqrt{2 \left( \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2};
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{u^2 J_x + \vartheta^2 J_y + w^2 J_z}{J_x + J_y + J_z}, \quad J_x = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad J_y = \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|,$$

$$J_z = \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|; \quad K_f = C_1 \lambda_{real} + C_{im} \lambda_{im} + C_2 \frac{|d \cdot \vartheta|}{d^2};$$

$U, V, W$  — продольные и поперечные компоненты вектора осредненной скорости потока;  $u, \vartheta, w$  — относительные аксиальные и поперечные компоненты скорости жидкости;  $\nu_{xx}, \nu_{yy}, \nu_{zz}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$  — эффективные молярные вязкости, возникающие при относительном движении молей [11]. Наибольший корень характеристического уравнения, которое получается из детерминанта

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial U}{\partial y} - C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) & -\frac{\partial U}{\partial z} + C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ -\frac{\partial V}{\partial x} + C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) & -\lambda - \frac{\partial V}{\partial y} & -\frac{\partial V}{\partial z} - C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ -\frac{\partial W}{\partial x} - C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) & -\frac{\partial W}{\partial y} + C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) & -\lambda - \frac{\partial W}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

Из детерминанта (4) получим кубическое уравнение

$$\lambda^3 + \lambda a - b = 0, \quad (5)$$

где

$$a = \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} - C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial V}{\partial z} +$$

$$+ C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right) -$$

$$- C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial x} - C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial U}{\partial z} \left( C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \right) +$$

$$+ C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left( C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \right);$$

$$b = -\frac{\partial U}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} - C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial W}{\partial y} +$$

$$+ C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial V}{\partial z} + C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial U}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} - C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} - \right. \\
 & - C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial W}{\partial x} - C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial V}{\partial z} - C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) C_s \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \left. \right) + \\
 & + C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial x} - C_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial U}{\partial z} \left( C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \\
 & + C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left( C_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} \right).
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (5):

$$Q = a/3, R = b/2, S = Q^3 - R^2;$$

$$\begin{aligned}
 & 1) S > 0, \lambda_1 = -2\sqrt{Q} \cos \varphi, \lambda_{2,3} = -2\sqrt{Q} \cos(\varphi \pm 2\pi/3), \\
 & \varphi = \frac{1}{3} \arccos \left( R/\sqrt{Q^3} \right); \\
 & 2) S < 0, Q > 0, \lambda_1 = -2 \operatorname{sgn} R \sqrt{Q} \operatorname{ch} \varphi, \\
 & \lambda_{2,3} = \operatorname{sgn} R \sqrt{Q} \operatorname{ch} \varphi \pm i\sqrt{3}\sqrt{Q} \operatorname{sh} \varphi, \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{arch} \left( |R|/\sqrt{Q^3} \right); \\
 & 3) S < 0, Q < 0, \lambda_1 = -2 \operatorname{sgn} R \sqrt{|Q|} \operatorname{sh} \varphi, \\
 & \lambda_{2,3} = \operatorname{sgn} R \sqrt{|Q|} \operatorname{sh} \varphi \pm i\sqrt{3}\sqrt{|Q|} \operatorname{ch} \varphi, \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left( |R|/\sqrt{|Q|^3} \right); \\
 & 4) S = 0, \lambda_1 = -2\sqrt[3]{R}, \lambda_{2,3} = \sqrt[3]{R}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, неизвестные в (6) будут равны

$$\lambda_{real} = \max \left[ \operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2), \operatorname{Re}(\lambda_2) \right],$$

$$\lambda_{im} = \max \left[ \operatorname{Im}(\lambda_1), \operatorname{Im}(\lambda_2), \operatorname{Im}(\lambda_2) \right],$$

где  $\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Im}$  — вещественная и мнимая части корней.

Система уравнений к безразмерному виду приведена соотношением всех скоростей к средней скорости входящего потока, а всех линейных размеров — к стороне квадрата  $b$ .

**Численный расчет.** В работе использованы неравномерные расчетные ячейки ( $150 \times 80 \times 80$ ) для разрешения особенностей течения во внутренней части турбулентного пограничного слоя (см. рис. 1), для чего выполнено преобразование координат  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ .



Ячейки измельчены в центральной части в сечениях  $A-A$ ,  $B-B$ . В центральной части в сечениях  $A-A = x_c$ ,  $B-B = y_c$  использовано следующее преобразование по координатам  $x$  и  $y$ :

$$\xi = x_c \left\{ 1 + \frac{\text{sh}[\tau_x(x - B_x)]}{\text{sh}(\tau_x B_x)} \right\}, \quad \eta = y_c \left\{ 1 + \frac{\text{sh}[\tau_y(y - B_y)]}{\text{sh}(\tau_y B_y)} \right\},$$

где  $\tau_x, \tau_y$  — параметры растяжения, которые изменяются от нуля до больших значений,  $\tau_x = 8,1$ ,  $\tau_y = 5$ ;

$$B_x = \frac{1}{2\tau_x} \ln \left[ \frac{1 + (e^{\tau_x} - 1)(x_c / (24D))}{1 + (e^{-\tau_x} - 1)(x_c / (24D))} \right], \quad 0 < \tau_x < \infty,$$

$$B_y = \frac{1}{2\tau_y} \ln \left[ \frac{1 + (e^{\tau_y} - 1)(y_c / (16D))}{1 + (e^{-\tau_y} - 1)(y_c / (16D))} \right], \quad 0 < \tau_y < \infty.$$

По направлению оси  $z$  использовано преобразование

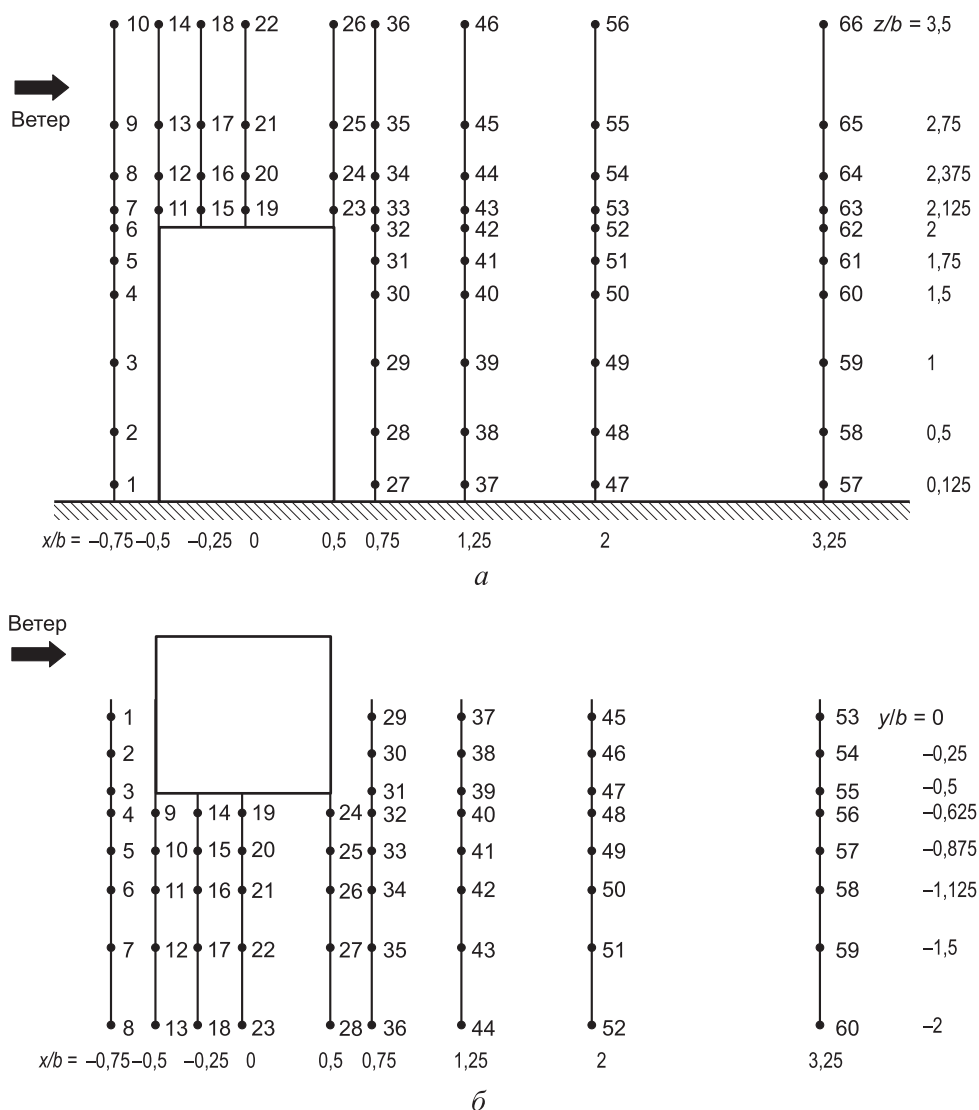
$$\zeta = 6b \frac{(\beta + 1) - (\beta - 1) \left( \left( (\beta + 1) / (\beta - 1) \right)^{1-z} \right)}{\left[ (\beta + 1) / (\beta - 1) \right]^{1-z} + 1},$$

где  $\beta$  — параметр растяжения, который изменяется от единицы до больших значений,  $\beta = 1,1$ .

На неподвижных твердых стенках поставлены очевидные граничные условия прилипания для скоростей:  $U|_w = V|_w = W|_w = u|_w = \vartheta|_w = w|_w = 0$ . На входе задан равномерный профиль для продольной скорости  $U = U_0$ , поперечные компоненты скорости равны нулю  $V = W = 0$ , относительные скорости  $u = 0,03$ ,  $\vartheta = w = 0$ . На выходе канала для всех параметров сформулированы условия экстраполяции второго порядка точности, а для избыточного давления  $p = 0$ . Измельчение ячейки около поверхностей такое, что расстояние от поверхности до центра первой ячейки равно  $n^+ = 4$ . Для двухжидкостной модели турбулентности это измельчение является достаточным для предсказания деталей универсального закона «стены» с хорошей точностью [11].

**Метод решения.** Для численной реализации системы уравнений (3) использован метод конечных объемов. Для согласования давления со скоростями расчетные ячейки расположили в шахматном порядке. Коррекцию скоростей через давление проводили процедурой SIMPLE [19, 20]. Интегрирование велось шагом по времени  $\Delta t = 0,001$ . Расчет длился до безразмерного времени  $t = 700$ . Осредненные скорости потока были получены путем осреднения за период  $400 \leq t \leq 700$ .

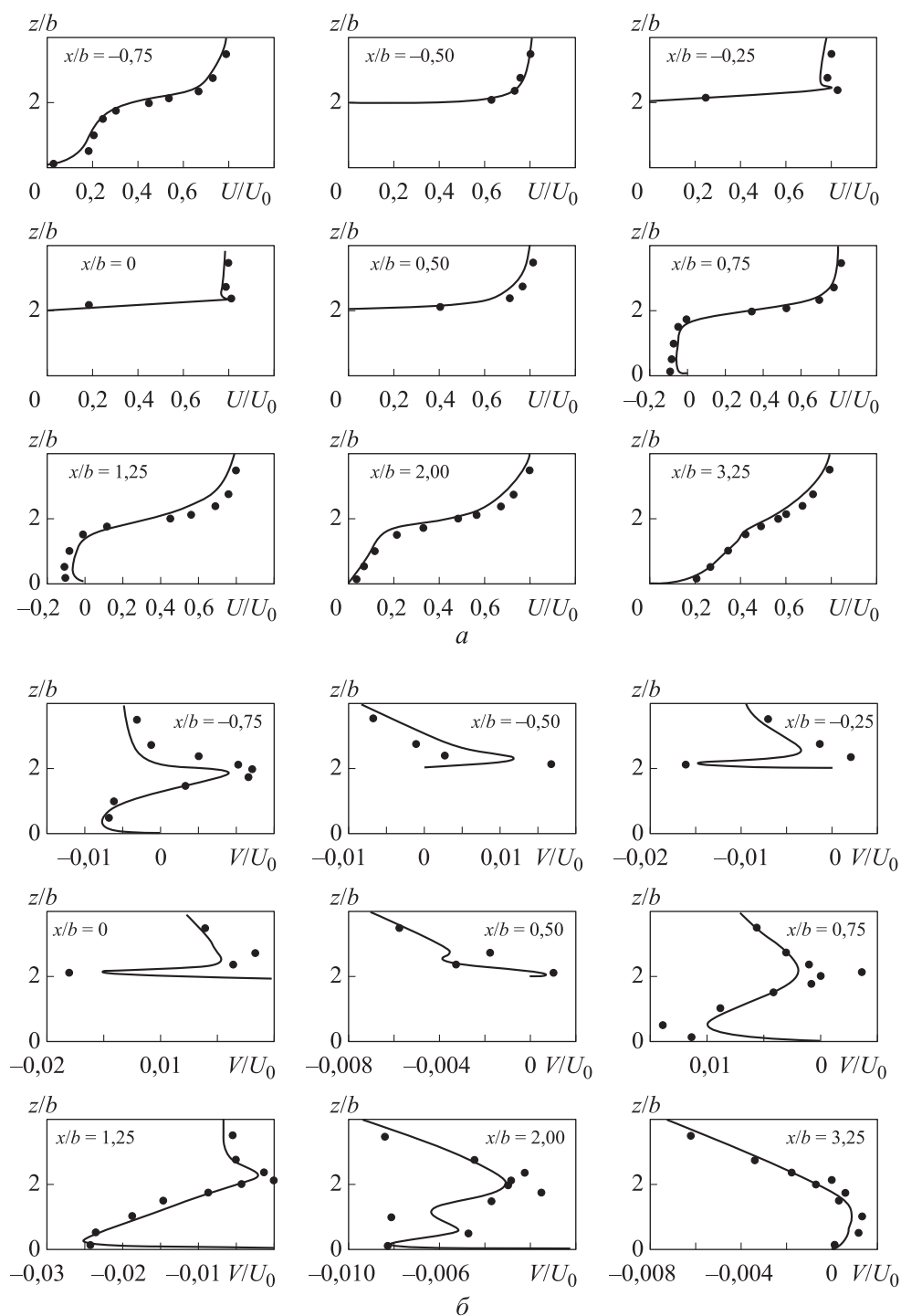
**Результаты расчетов и их обсуждение.** Подтверждение полученных результатов представлено рис. 2 [18]. Усредненные по времени профили компоненты скорости по осям приведены на рис. 3.



**Рис. 2.** Измерительные линии при испытаниях в аэродинамической трубе (размер модели  $b = 0,08$  м,  $b/h = 0,5$ ):

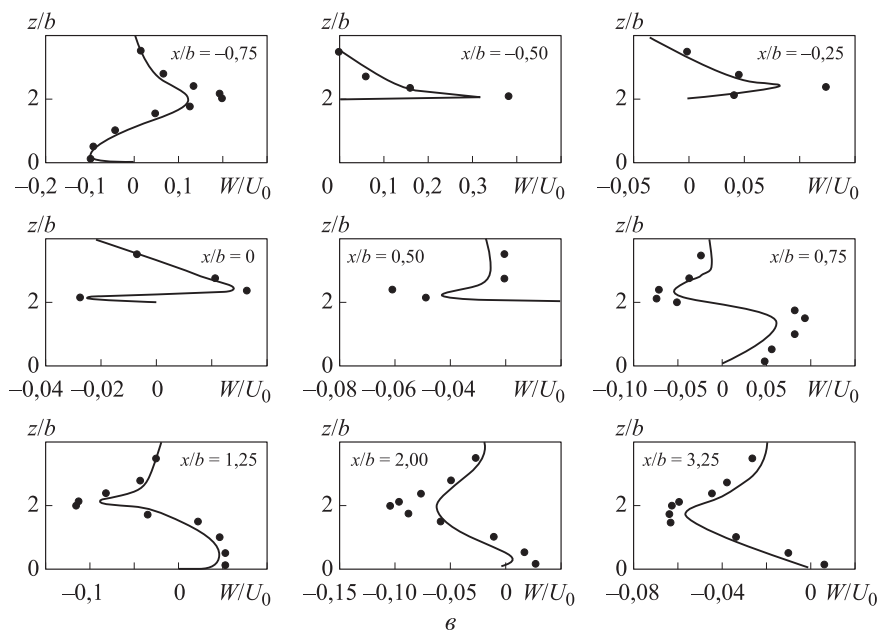
- $a$  — вертикальная плоскость, проходящая через осевую линию;
- $b$  — горизонтальные плоскости на высоте  $0,125b$  и  $1,25b$

Согласно кривым на рис. 3, модель хорошо предсказывает продольный компонент скорости по оси  $x$ . Несколько хуже предсказываются компоненты скорости по осям  $y$  и  $z$ , однако лучше, чем в других моделях [17].



**Рис. 3 (начало).** Усредненные по времени профили компонент скорости по осям  $x$  (а),  $y$  (б):

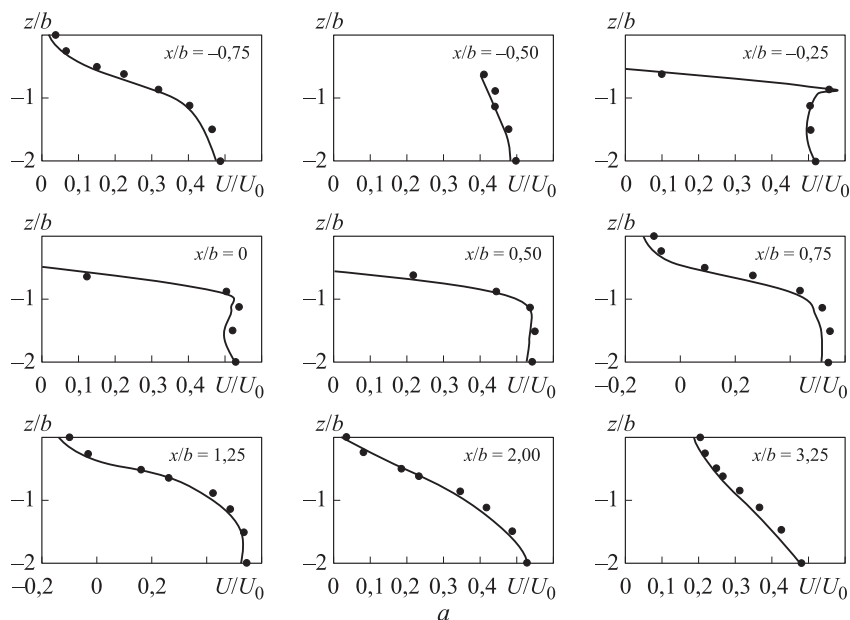
• — экспериментальные данные; — — данные двухжидкостной модели



**Рис. 3 (окончание).** Усредненные по времени профили компонентов скорости по оси  $z$  ( $\vartheta$ ):

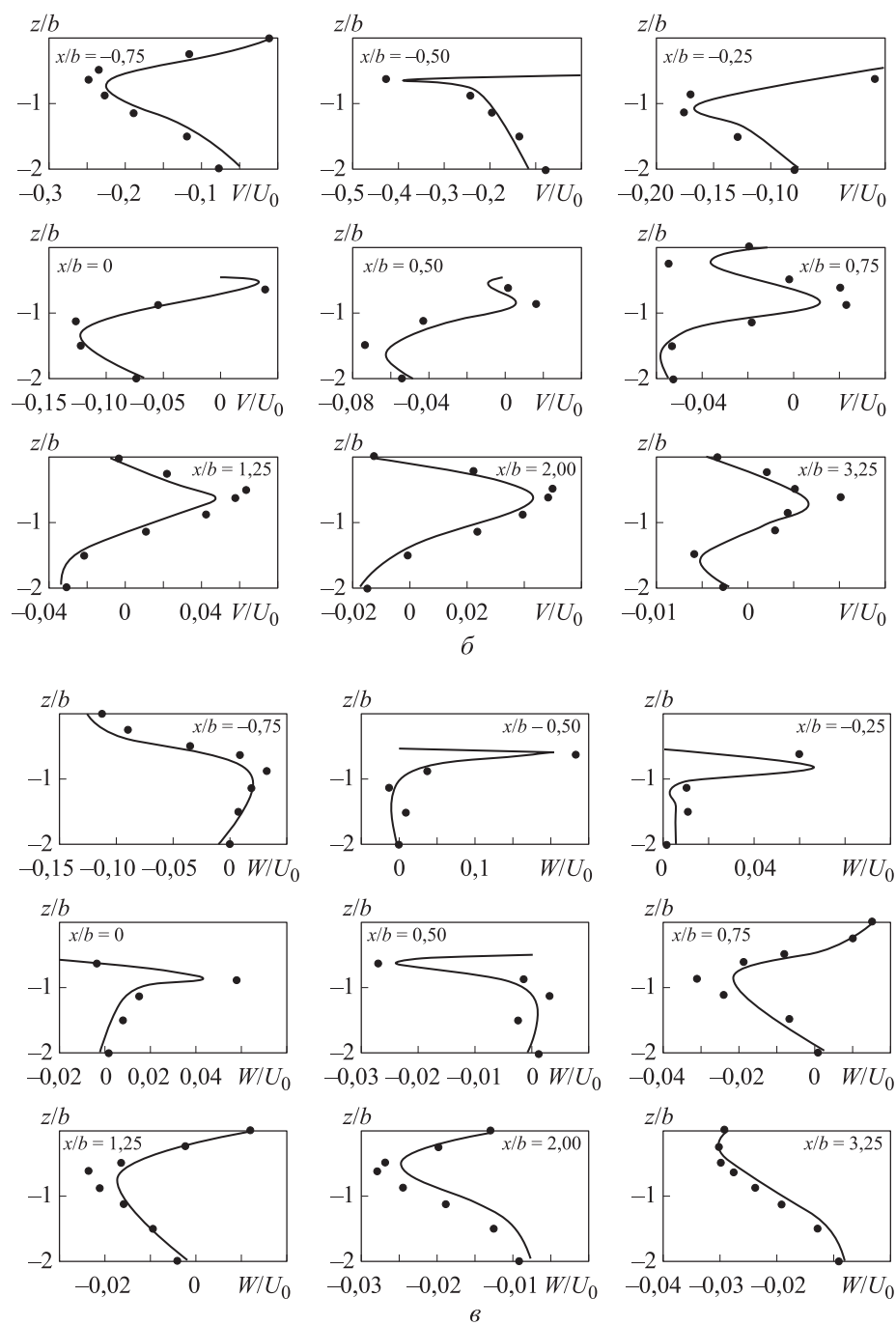
• — экспериментальные данные; — — данные двухжидкостной модели

Распределение скорости потока в горизонтальных плоскостях на высоте  $0,125b$  показано на рис. 4.



**Рис. 4 (начало).** Усредненные по времени профили компонентов скорости по оси  $x$  ( $a$ ) на высоте  $0,125b$ :

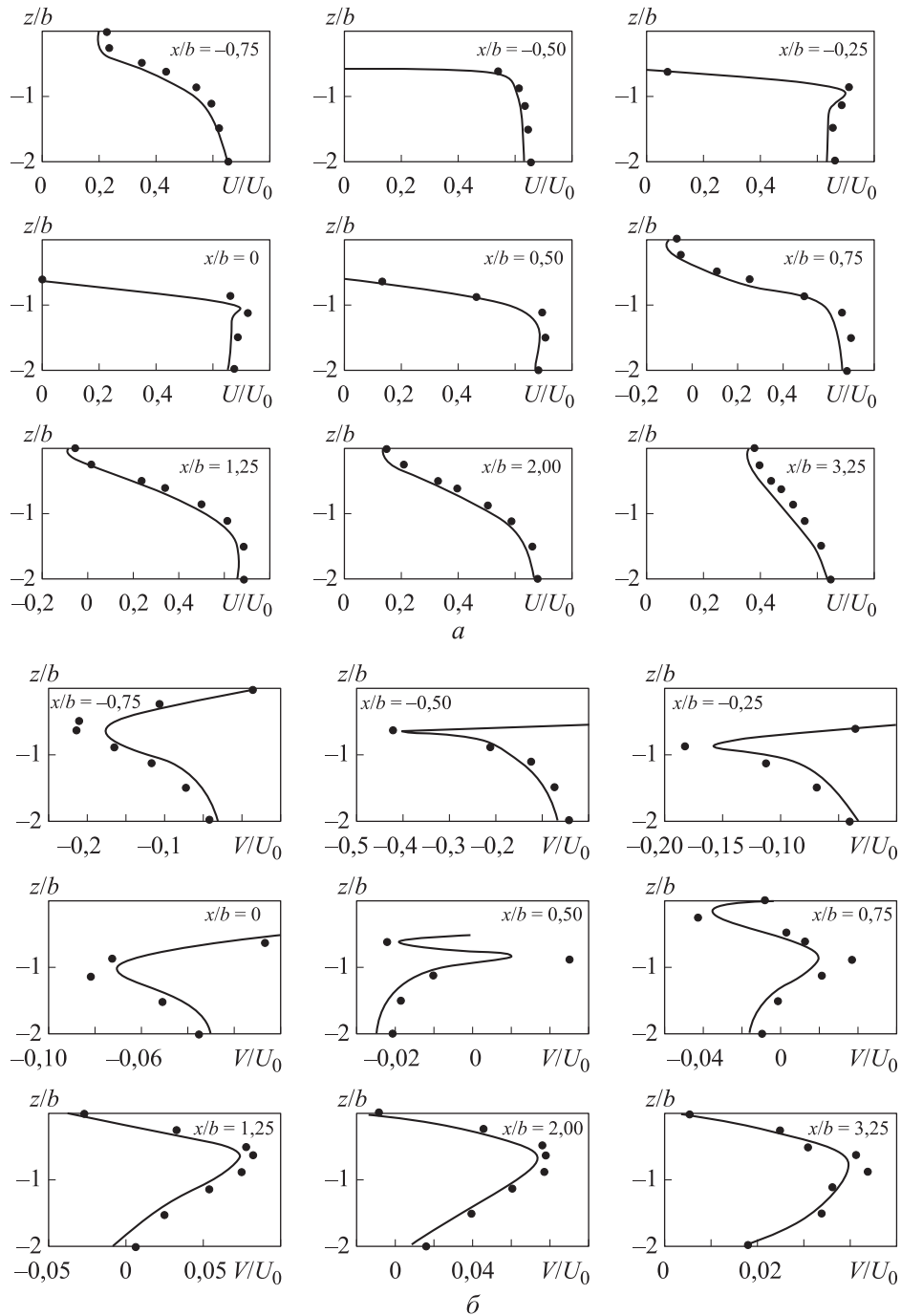
• — экспериментальные данные; — — данные двухжидкостной модели



**Рис. 4 (окончание).** Усредненные по времени профили компонент скорости по осям  $y$  ( $\beta$ ),  $z$  ( $\vartheta$ ) на высоте  $0,125b$ :

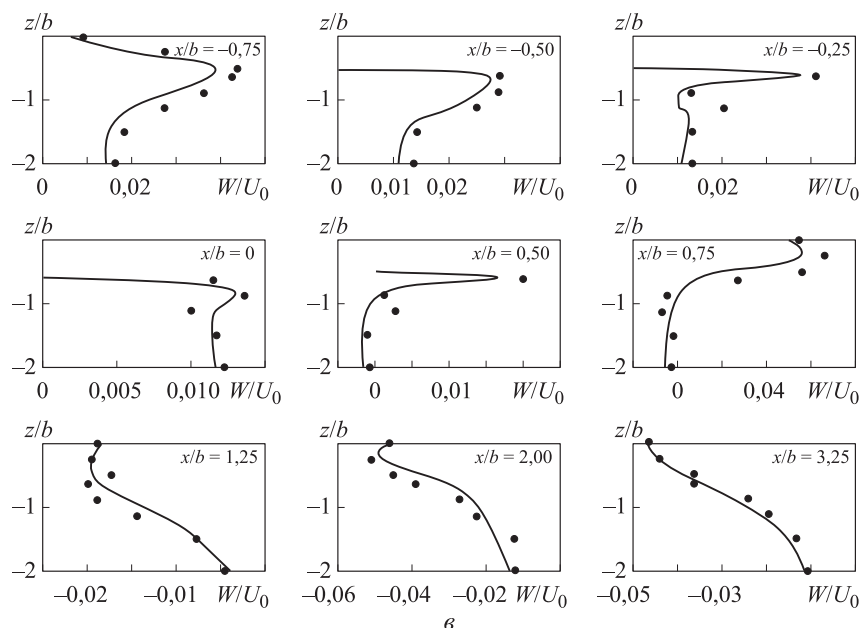
• — экспериментальные данные; — — данные двухжидкостной модели

Распределение скорости потока в горизонтальных плоскостях на высоте  $1,125b$  представлено на рис. 5.



**Рис. 5 (начало).** Усредненные по времени профили компонентов скорости по осям  $x$  ( $a$ ),  $y$  ( $b$ ) на высоте  $1,125b$ :

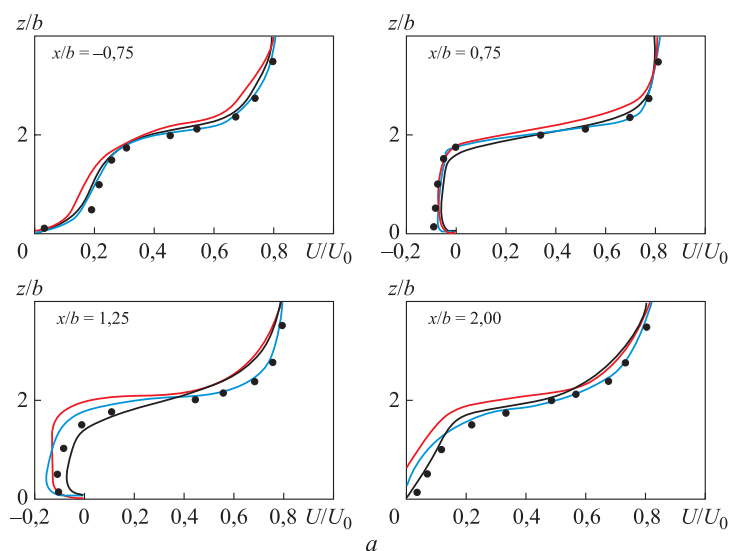
• — экспериментальные данные; — — данные двухжидкостной модели



**Рис. 5 (окончание).** Усредненные по времени профили компонентов скорости по оси  $z$  ( $\vartheta$ ) на высоте  $1,125b$ :

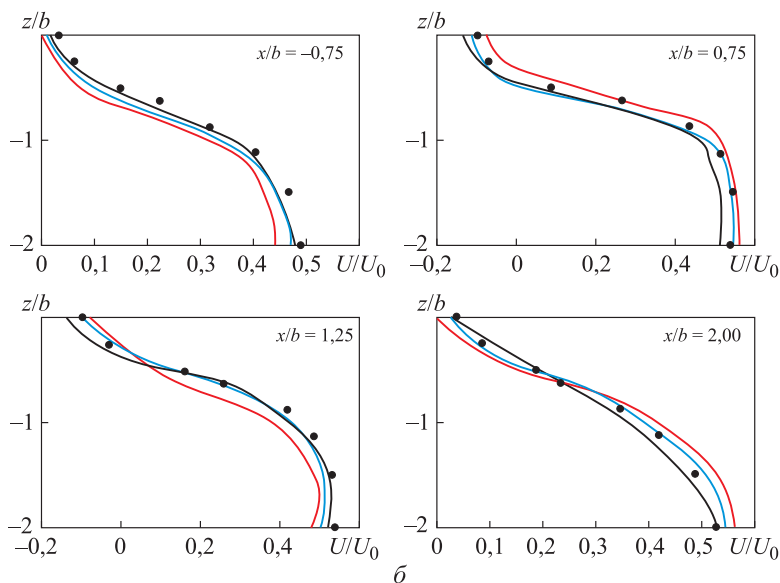
• — экспериментальные данные; — — данные двухжидкостной модели

Результаты для различных моделей турбулентности при распределении продольной скорости по оси канала и на горизонтальной плоскости на высоте  $0,125b$  приведены на рис. 6.



**Рис. 6 (начало).** Изменение продольной скорости по вертикали (а) на высоте  $0,125b$ :

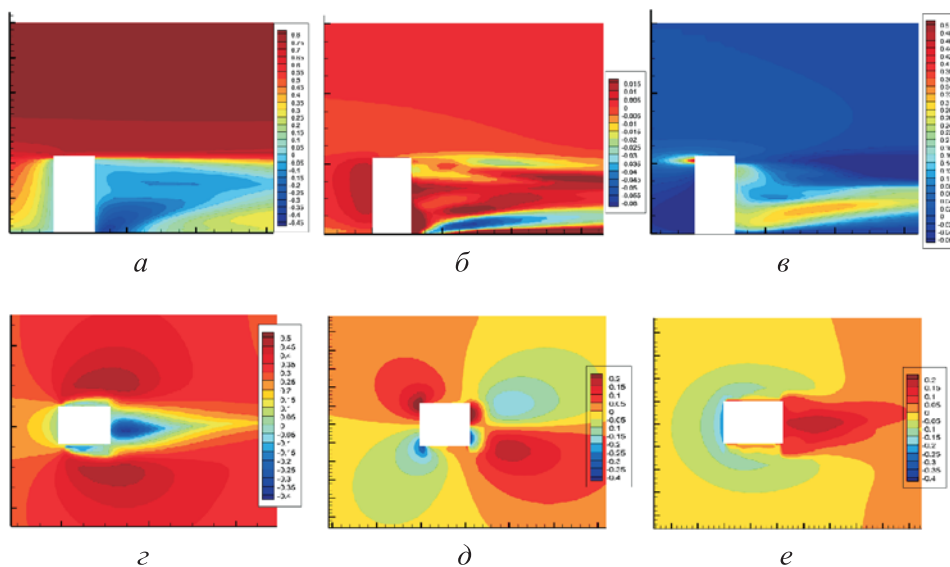
• — экспериментальные данные; — — CFD  $k-\omega$  SST; — — CFDDES;  
— — данные двухжидкостной модели



**Рис. 6 (окончание).** Изменение продольной скорости в горизонтальной плоскости ( $\beta$ ) на высоте  $0,125b$ :

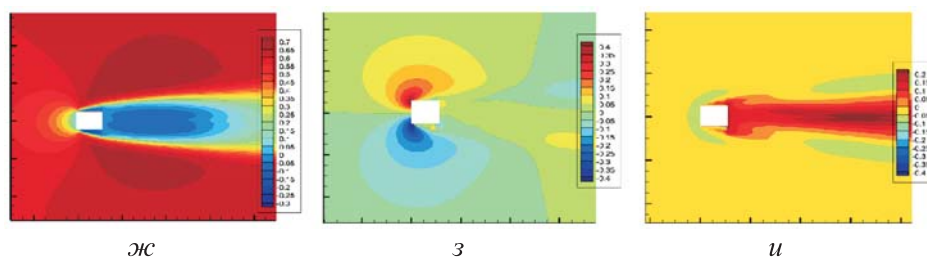
- — экспериментальные данные; — CFD  $k-\omega$  SST; — CFDDES;
- — данные двухжидкостной модели

Изолинии осредненной скорости потока в плоскости на осевой линии канала, в горизонтальных плоскостях на высоте  $0,125b$  и  $1,125b$  показаны на рис. 7.



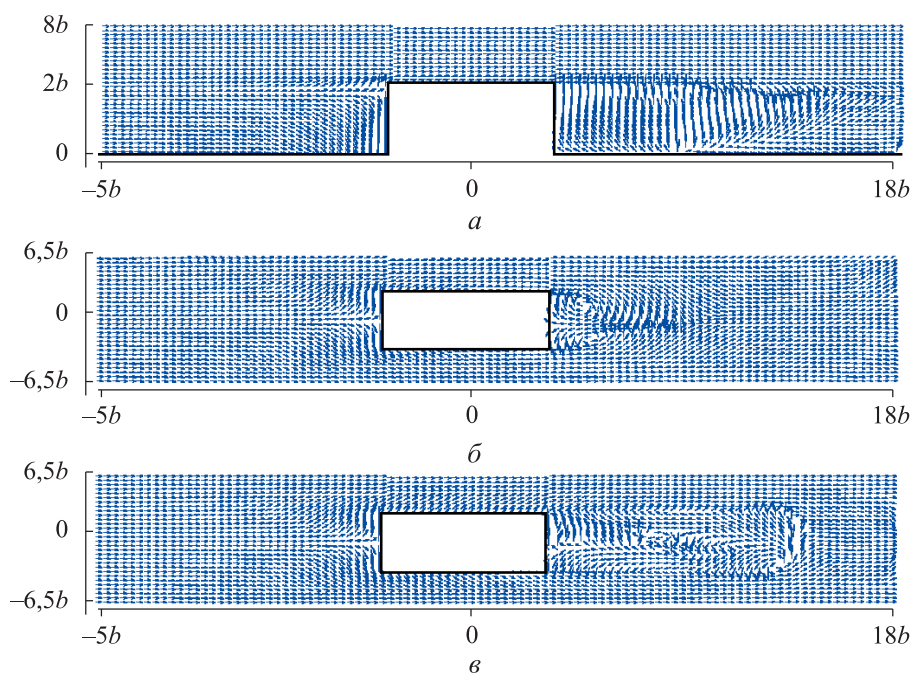
**Рис. 7 (начало).** Изолинии осредненной скорости потока в плоскости на осевой линии канала ( $a-f$ ), в горизонтальных плоскостях на высоте  $0,125b$  ( $g-e$ ) для компонент скорости по осям  $x$  ( $a, g, ж$ ),  $y$  ( $b, d, з$ ) и  $z$  ( $в, e, и$ )





**Рис. 7 (окончание).** Изолинии осредненной скорости потока в горизонтальных плоскостях на высоте  $1,125b$  (ж–и) для компонентов скорости по осям  $x$  (а, г, ж),  $y$  (б, д, з) и  $z$  (в, е, и)

Вектор поля скорости осредненной скорости потока в плоскости на осевой линии канала, в горизонтальных плоскостях на высоте  $0,125b$  и  $1,125b$  показан на рис. 8.



**Рис. 8.** Вектор поля скорости в вертикальной плоскости, проходящей по осевой линии канала (а), в горизонтальных плоскостях на высоте  $0,125b$  (б) и  $1,125b$  (в)

Результаты моделирования предсказывают наличие ярко выраженной зоны с установившимся возвратно циркуляционным течением, вытянутой за обтекаемым объектом. Картина течения периодически повторяется вследствие генерации и срыва вихрей за плохообтекаемым телом.

**Заключение.** Продемонстрирована возможность использования двухжидкостной модели для описания трехмерной задачи обтекания квадратного блока турбулентным потоком. Такая задача — один из классических примеров для верификации моделей турбулентности. Сложность задачи обусловлена тем, что в ней наблюдаются отрыв потока, рециркуляционные течения и нестационарная турбулентность. Полученные численные результаты сравниваются с экспериментальными данными и результатами, определенными с помощью других моделей. Сравнение показало, что результаты, полученные по двухжидкостной модели, хорошо согласуются с экспериментальными данными. Это свидетельствует о том, что модель позволяет адекватно описывать трехмерную нестационарную анизотропную турбулентность, а также о наличии универсальности эмпирических постоянных в модели. Следовательно, двухжидкостную модель можно рекомендовать для исследования сложных турбулентных течений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Younis B.A., Przulj V.P. Computation of turbulent vortex shedding. *Comput. Mech.*, 2006, vol. 37, no. 5, pp. 408–425. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0713-2>
- [2] Rodi W. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.*, 1997, vol. 69–71, pp. 55–75. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(97\)00147-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(97)00147-5)
- [3] Spalding D.B. Chemical reaction in turbulent fluids. *J. Physico-Chemical Hydrodyn.*, 1983, vol. 4, pp. 323–336.
- [4] Яковенко И.С., Ярков А.В., Тюрнин А.В. и др. Оценка возможностей современных кинетических механизмов окисления ацетилена для моделирования нестационарных процессов горения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 5 (104), с. 62–85. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-62-85>
- [5] Орлов В.Н., Гасанов М.В. Влияние возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в комплексной области. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 6 (105), с. 60–76. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-60-76>
- [6] Александров А.А., Девисилов В.А., Шарай Е.Ю. Численное исследование течения жидкости между проницаемыми вращающимися цилиндрическими поверхностями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 1 (88), с. 32–45. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2020-1-32-45>
- [7] Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Косяк Е.Г. Постановка экспериментов для анализа возмущений головной ударной волны за счет присутствия частиц в сверхзвуковом потоке. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 1 (94), с. 34–46. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-34-46>

- [8] Александров А.А., Акатьев В.А., Тюрин М.П. и др. Результаты экспериментальных исследований процессов теплообмена в закрытом двухфазном термосифоне. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 4 (79), с. 46–58. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-4-46-58>
- [9] Malin M.R., Spalding D.B. A two-fluid model of turbulence and its application to heated plane jets and wakes. *J. Physico-Chemical Hydrodyn.*, 1984, vol. 5, no. 5-6, pp. 339–361.
- [10] Spalding D.B. A turbulence model for buoyant and combusting flows. *IC CFDU Report No CFD/85/10*, 1985.
- [11] Malikov Z. Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Appl. Math. Model.*, 2020, vol. 82, pp. 409–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.047>
- [12] Маликов З.М., Назаров Ф.Х. Сравнительный анализ моделей турбулентности на основе исследования затопленной осесимметричной турбулентной струи. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 2 (101), с. 22–35. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-22-35>
- [13] Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двухжидкостной модели турбулентности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 24–39. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-24-39>
- [14] Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1012–1028. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462820080066>
- [15] Malikov Z.M. Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids. *Appl. Math. Model.*, 2021, vol. 91, pp. 186–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.029>
- [16] Malikov Z.M. Modeling a turbulent multicomponent fluid with variable density using a two-fluid approach. *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 104, pp. 34–49. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.10.045>
- [17] Meng Y., Hibi K. Turbulent measurements of the flow field around a high-rise building. *Wind Eng., JAWE*, 1998, vol. 1998, iss. 76, pp. 55–64. DOI: [https://doi.org/10.5359/jawe.1998.76\\_55](https://doi.org/10.5359/jawe.1998.76_55)
- [18] Dadioti R.E., Rees S. Validation of a detached eddy simulation (DES) model in complex urban environment. *Athens J. Sci.*, 2016, vol. 3, no. 2, pp. 113–136. DOI: <https://doi.org/10.30958/ajs.3-2-3>
- [19] Хужаев И.К., Хамдамов М.М. Распространение осесимметричной турбулентной струи метана в спутном потоке воздуха при горении с конечной скоростью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5 (98), с. 89–108. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-89-108>
- [20] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, 1980.

**Мадалиев Мурудил Эркинжон Угли** — доцент кафедры «Строительство инженерных коммуникаций» Ферганского политехнического института (Республика Узбекистан, 50107, Фергана, ул. Ферганская, д. 86).

**Кучкаров Акмалжон Ахмадалиевич** — доцент кафедры «Интеллектуальные инженерные системы» Ферганского политехнического института (Республика Узбекистан, 50107, Фергана, ул. Ферганская, д. 86).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Мадалиев М.Э., Кучкаров А.А. Численное моделирование отрывного обтекания квадратного блока на основе двухжидкостной модели турбулентности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 2 (113), с. 35–56. EDN: JZNUCN

**NUMERICAL SIMULATION OF THE SEPARATED FLOW PAST AROUND A SQUARE BLOCK BASED ON THE TWO-FLUID TURBULENCE MODEL**

M.E. Madaliev

m.e.madaliyev@ferpi.uz

A.A. Kuchkarov

a.kuchkarov@ferpi.uz

**Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan**

**Abstract**

The increasing computer performance makes it possible to use numerical simulation as an alternative to the physical experiment. However, accuracy of the turbulent flow simulation significantly depends on the turbulence model used. The paper presents numerical results of the turbulent external flow around a square block based on the two-fluid model with  $Re = 24,000$ . The turbulence model is implemented in the three-dimensional form. The control volume method is introduced in difference approximation of the original equations; relationship between speed and pressure is found using the SIMPLE procedure, where convective terms are approximated by the semi-implicit upstream scheme, and diffusion terms — by the central differences. Comparison between experimental data and the existing turbulence models demonstrates good convergence for the coarse computational grid. This indicates the model ability to adequately describe the unsteady anisotropic turbulence. Another advantage of the model lies in its simplicity in regard to numerical implementation and good stability. Thus, the two-fluid model could be recommended in studying turbulent flows that are more complex

**Keywords**

*Navier — Stokes equations, separated flow, control volume method, two-fluid model, SIMPLE*

Received 06.03.2023

Accepted 19.04.2023

© Author(s), 2024

## REFERENCES

- [1] Younis B.A., Przulj V.P. Computation of turbulent vortex shedding. *Comput. Mech.*, 2006, vol. 37, no. 5, pp. 408–425. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0713-2>
- [2] Rodi W. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies. *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.*, 1997, vol. 69–71, pp. 55–75. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6105\(97\)00147-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6105(97)00147-5)
- [3] Spalding D.B. Chemical reaction in turbulent fluids. *J. Physico-Chemical Hydrodyn.*, 1983, vol. 4, pp. 323–336.
- [4] Yakovenko I.S., Yarkov A.V., Tyurnin A.V., et al. Evaluating possibilities of the modern chemical kinetic mechanisms of acetylene oxidation in simulating the non-stationary combustion processes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 5 (104), pp. 62–85 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-62-85>
- [5] Orlov V.N., Gasanov M.V. The influence of a perturbation of a moving singular point on the structure of an analytical approximate solution of a class of third-order nonlinear differential equations in a complex domain. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 6 (105), pp. 60–76 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-60-76>
- [6] Aleksandrov A.A., Devisilov V.A., Sharay E.Yu. Numerical investigation of fluid flow between rotating permeable cylindrical surfaces. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 1 (88), pp. 32–45 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2020-1-32-45>
- [7] Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kosyak E.G. Setting up experiments for analyzing disturbances of the head shock wave due to the presence of particles in the supersonic flow. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 1 (94), pp. 34–46 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-34-46>
- [8] Aleksandrov A.A., Akatyev V.A., Tyurin M.P., et al. Results of experimental studies of heat-and-mass transfer processes in a two-phase closed thermosyphon. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 4 (79), pp. 46–58 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-4-46-58>
- [9] Malin M.R., Spalding D.B. A two-fluid model of turbulence and its application to heated plane jets and wakes. *J. Physico-Chemical Hydrodyn.*, 1984, vol. 5, no. 5–6, pp. 339–361.
- [10] Spalding D.B. A turbulence model for buoyant and combusting flows. *IC CFDU Report No CFD/85/10*, 1985.
- [11] Malikov Z. Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Appl. Math. Model.*, 2020, vol. 82, pp. 409–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.047>
- [12] Malikov Z.M., Nazarov F.Kh. Study of an immersed axisymmetric turbulent jet in comparative analysis of turbulence models. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 2 (101), pp. 22–35 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-22-35>

- [13] Malikov Z.M., Madaliev M.E. New two-fluid turbulence model based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 24–39 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-24-39>
- [14] Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 1012–1028. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462820080066>
- [15] Malikov Z.M. Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids. *Appl. Math. Model.*, 2021, vol. 91, pp. 186–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.029>
- [16] Malikov Z.M. Modeling a turbulent multicomponent fluid with variable density using a two-fluid approach. *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 104, pp. 34–49. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.10.045>
- [17] Meng Y., Hibi K. Turbulent measurements of the flow field around a high-rise building. *Wind Eng., JAWWE*, 1998, vol. 1998, iss. 76, pp. 55–64. DOI: [https://doi.org/10.5359/jawe.1998.76\\_55](https://doi.org/10.5359/jawe.1998.76_55)
- [18] Dadioti R.E., Rees S. Validation of a detached eddy simulation (DES) model in complex urban environment. *Athens J. Sci.*, 2016, vol. 3, no. 2, pp. 113–136. DOI: <https://doi.org/10.30958/ajs.3-2-3>
- [19] Khuzhaev I.K., Khamdamov M.M. Axisymmetric turbulent methane jet propagation in a co-current air flow under combustion at a finite velocity. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 5 (98), pp. 89–108 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-89-108>
- [20] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, 1980.

**Madaliev M.E.** — Assoc. Professor, Department of Construction of Engineering Communications, Fergana Polytechnic Institute (Ferganskaya ul. 86, Fergana, 50107 Republic of Uzbekistan).

**Kuchkarov A.A.** — Assoc. Professor, Department of Intelligent Engineering Systems, Ferghana Polytechnic Institute (Ferganskaya ul. 86, Fergana, 50107 Republic of Uzbekistan).

**Please cite this article in English as:**

Madaliev M.E., Kuchkarov A.A. Numerical simulation of the separated flow past around a square block based on the two-fluid turbulence model. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 2 (113), pp. 35–56 (in Russ.). EDN: JZNUCN