УДК 519.234 EDN: PPICLB

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОБОБЩЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ОЗАКИ ДЛЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В.Б. Горяинов vb-goryainov@bmstu.ru
М.М. Масягин masyagin@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Математические модели высоких порядков и их теоретические свойства являются предметом активных исследований на протяжении последних десятилетий. Они играют важную роль в решении экономических и финансовых, инженерных и медицинских задач. Один из наиболее распространенных примеров — обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель Озаки. Вычислена асимптотическая ковариационная матрица обобщенной модели Озаки для оценки методом наименьших квадратов путем ее разложения в ряд Тейлора. Проведено сравнение скорости стремления отдельных реализаций модели к ее асимптотическому поведению для нескольких распределений обновляющего процесса: нормального (гауссова), загрязненного нормального с различными комбинациями параметров частоты и величины загрязнения, Стьюдента, Лапласа и логистического. Научная новизна работы заключается в непосредственном нахождении асимптотической ковариационной матрицы обобщенной модели Озаки, практическая — в возможности использования табличных результатов сравнения ее реализаций для принятия решения об использовании модели Озаки или какой-либо другой модели в инженерных расчетах

Ключевые слова

Обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель, метод наименьших квадратов, асимптотическая ковариационная матрица, разложение в ряд Тейлора

Поступила 03.11.2023
Принята 25.01.2024
© Автор(ы), 2024

Введение. Активное развитие и удешевление современных аппаратных вычислительных систем стимулируют усложнение методов математического моделирования и увеличение числа их свободных параметров. Следствием этого стало улучшение качества предсказаний последних. В настоящее время модели высоких порядков используют наравне с нейронными сетями и другими методами машинного обучения в перспективных направлениях науки и инженерии: алгоритмической торговле на биржах [1, 2] и биоинформатике [3], при оценивании страховых рисков [4] и проверке сейсмоустойчивости архитектурных проектов [5]. Одной из таких моделей является обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель Озаки [6] и ее различные модификации [7–9].

Несмотря на вновь возросшую популярность классических математических моделей высоких порядков, они все еще остаются малоизучены. Это обусловлено тем, что зачастую с их помощью решают конкретные прикладные задачи, упуская из виду их теоретические свойства. Однако ценность таких свойств весьма высока: они упрощают исследователю выбор конкретной модели и позволяют избегать лишних компьютерных вычислений. К подобным свойствам относят условия стационарности и эргодичности модели, асимптотическое поведение ее оценок и т. д.

Цель работы — нахождение асимптотической ковариационной матрицы обобщенной модели Озаки для оценки наименьших квадратов и сравнение скорости стремления ее отдельных реализаций для различных распределений обновляющего процесса к асимптотическому поведению.

Постановка задачи. Обобщенная экспоненциальная авторегрессионная модель Озаки задается уравнением

$$X_t = \sum_{i=0}^{p-1} \left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2} \right) X_{t-(i+1)} + \xi_t, \tag{1}$$

где $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{p-2}, b_{p-2}, a_{p-1}, b_{p-1}, c$ — действительные параметры модели; ξ_t, $t = 0, 1, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющая условиям: $E\xi_t = 0$, т. е. она имеет нулевое математическое ожидание; $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$ — конечная дисперсия. Последовательность ξ_t принято называть обновляющим процессом.

Предположим, что процесс X_t удовлетворяет соотношению (1) и имеются n его наблюдений $X_0, \ldots, X_{n-1}$. В таком случае параметры уравнения можно оценить с помощью метода наименьших квадратов (МНК), представляющего собой решение задачи минимизации функции

$$g_{l.s.m}(a_i, b_i, c)_{i=0,1,\ldots,p-1} = g(a_i, b_i, c) =$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \left(X_t - \sum_{i=0}^{p-1} \left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2} \right) X_{t-(i+1)} \right)^2.$$

Необходимо получить асимптотическое поведение оценок МНК (поведение оценок при $n \to +\infty$), т. е. вычислить асимптотическую ковариационную матрицу оценки $g(a_i, b_i, c)$.

Вычисление асимптотической ковариационной матрицы. Аппроксимируем функцию $g(a_i, b_i, c)$ ее разложением в ряд Тейлора в окрестности фиксированной точки $(\widetilde{a_0},\ \widetilde{b_0},\ \widetilde{a_0},\ \widetilde{b_0}, \ldots,\ \widetilde{a_0},\ \widetilde{b_0},\ \widetilde{a_0},\ \widetilde{b_0},\ \tilde{c})$ $((\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})_{i=0,1,\ldots,p-1}$, где $\widetilde{a_{i_1}}$, $\widetilde{b_{i_2}}$ расположены последовательно при $i_1 = i_2)$ до второго порядка включительно. Для этого введем обозначения

$$\Theta = \sqrt{n}\left((a_i - \widetilde{a_i}),\ (b_i - \widetilde{b_i}),\ (c - \tilde{c})\right)^{\mathrm{T}}_{i=0,1,\ldots,p-1},$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial a_i},\ \frac{\partial g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial b_i},\ \frac{\partial g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial c}\right)^{\mathrm{T}}_{i=0,1,\ldots,p-1},$$

$$B = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial a_i \partial a_j} & \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial a_i \partial b_j} & \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial a_i \partial c} \\ \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial b_i \partial a_j} & \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial b_i \partial b_j} & \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial b_i \partial c} \\ \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial c \partial a_j} & \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial c \partial b_j} & \dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})}{\partial c^2} \end{pmatrix}_{i=0,1,\ldots,p-1;\ j=0,1,\ldots,p-1},$$

где производные (вторые производные) по a_{i_1} и b_{i_2} $(a_{j_1}$ и $b_{j_2})$ расположены последовательно при $i_1 = i_2$ $(j_1 = j_2)$.

Отметим, что Θ — вектор-столбец размерностью $n \times 1$, A — вектор-столбец размерностью $n \times 1$, B — квадратная матрица размерностью $n \times n$.

В этих обозначениях запишем

$$g(a_i, b_i, c) = g(\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c}) + A^{\mathrm{T}}\Theta + \frac{1}{2}\Theta^{\mathrm{T}} B \Theta + \delta(a_i, b_i, c),$$

где $\delta(a_i, b_i, c)$ — бесконечно малая функция, порядок которой при $(a_i, b_i, c)_{i=0,1,\ldots,p-1} \to (\widetilde{a_i},\ \widetilde{b_i},\ \tilde{c})_{i=0,1,\ldots,p-1}$ выше, чем

$$\sum_{i=0}^{p-1}\left((a_i - \widetilde{a_i})^2 + (b_i - \widetilde{b_i})^2\right) + (c - \tilde{c})^2.$$

Выполним непосредственное дифференцирование вектора-столбца A и матрицы Гессе B с учетом того, что

$$\left(X_t - \sum_{i=0}^{p-1}\left(a_i + b_i e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}\right)^2 = \xi_t^2.$$

В качестве примера вычислим $\dfrac{\partial g(\widetilde{a_i},\, \widetilde{b_i},\, \tilde{c})}{\partial b_i}$ и $\dfrac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\, \widetilde{b_i},\, \tilde{c})}{\partial b_i \partial c}$:

$$\frac{\partial g(\widetilde{a_i},\, \widetilde{b_i},\, \tilde{c})}{\partial b_i} = \frac{\partial \sum\limits_{t=p}^{n}\left(X_t - \sum\limits_{i'=0}^{p-1}\left(a_{i'} + b_{i'} e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i'+1)}\right)^2}{\partial b_i} =$$

$$= 2\sum_{t=p}^{n}\xi_t \frac{\partial\left[X_t - \sum\limits_{i'=0}^{p-1}\left(a_{i'} + b_{i'} e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i'+1)}\right]}{\partial b_i} =$$

$$= 2\sum_{t=p}^{n}\xi_t\left(\frac{\partial X_t}{\partial b_i} - \frac{\partial \sum\limits_{i'=0}^{p-1} a_{i'} X_{t-(i'+1)}}{\partial b_i} - \frac{\partial \sum\limits_{i'=0}^{p-1} b_{i'} e^{-cX_{t-1}^2} X_{t-(i'+1)}}{\partial b_i}\right) =$$

$$= 2\sum_{t=p}^{n}\xi_t\left(0 - 0 - e^{-cX_{t-1}^2}X_{t-(i'+1)}\right) = -2\sum_{t=p}^{n}\xi_t e^{-cX_{t-1}^2}X_{t-(i'+1)};$$

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\, \widetilde{b_i},\, \tilde{c})}{\partial b_i \partial c} =$$

$$= \frac{\partial\left(-2\sum\limits_{t=p}^{n}\xi_t e^{-cX_{t-1}^2}X_{t-(i'+1)}\right)}{\partial c} = -2\frac{\partial \sum\limits_{t=p}^{n}\xi_t\left(e^{-cX_{t-1}^2}X_{t-(i+1)}\right)}{\partial c} =$$

$$= -2\left(\sum_{t=p}^{n}(\xi_t)\frac{\partial e^{-cX_{t-1}^2}X_{t-(i+1)}}{\partial c} + \sum_{t=p}^{n}\frac{\partial \xi_t}{\partial c}\left(e^{-cX_{t-1}^2}X_{t-(i+1)}\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{t=p}^{n}\xi_t X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} -$$

$$-2\sum_{t=p}^{n}\left(\frac{\partial X_t}{\partial c} - \frac{\partial \sum\limits_{i'=0}^{p-1} a_{i'} X_{t-(i'+1)}}{\partial c} - \frac{\partial \sum\limits_{i'=0}^{p-1} b_{i'} e^{-cX_{t-1}^2} X_{t-(i'+1)}}{\partial c}\right) \times$$

$$\times X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} = 2\sum_{t=p}^{n} \xi_t X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} -$$

$$-2\sum_{t=p}^{n}\left[\sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}\right] X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2}.$$

Для вектора-столбца:

$$\frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i} = -2\sum_{t=p}^{n} \xi_t X_{t-(i+1)},$$

$$\frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i} = -2\sum_{t=p}^{n} \xi_t e^{-cX_{t-1}^2} X_{t-(i'+1)},$$

$$\frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial c} = 2\sum_{t=p}^{n} \xi_t \sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}.$$

Для матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i \partial a_j} = 2\sum_{t=p}^{n} X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)},$$

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i \partial b_j} = \frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i \partial a_j} = 2\sum_{t=p}^{n} X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i \partial c} = \frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial c \partial a_j} =$$

$$= -2\sum_{t=p}^{n} X_{t-(i+1)} \sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i \partial b_j} = 2\sum_{t=p}^{n} X_{t-(i'+1)} X_{t-(j'+1)} e^{-2cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i \partial c} = \frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial c \partial b_j} = 2\sum_{t=p}^{n} \xi_t X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} -$$

$$-2\sum_{t=p}^{n}\left[\sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}\right] X_{t-(i+1)}\, e^{-cX_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial c^2} = 2\sum_{t=p}^{n}\left(\sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}\right)^2 -$$

$$-2\sum_{t=p}^{n} \xi_t \sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^4 e^{-cX_{t-1}^2}.$$

Будем полагать, что рассматриваемая модель (1) стационарная и эргодическая. Условия этого [10]:

– $c > 0,$ в противном случае множитель $e^{-cX_{t-1}^2}$ стремится к бесконечности;

– все корни характеристического уравнения $\lambda^p - a_0\lambda^{p-1} - \ldots - a_{p-1} = 0$ расположены в единичной окружности, т. е. $|a_i| < 1,$ $i = 0, 1, \ldots, p-1.$

На практике рассматриваются лишь стационарные модели, поэтому подобное допущение является корректным. Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} B$ — следствие стационарности и эргодичности модели. Найдем предел.

Отметим, что в дальнейших вычислениях множитель $1/n$ вносится в пределы для того, чтобы можно было использовать центральную предельную теорему. В вычислениях также используется тот факт, что произведением стационарных и эргодических последовательностей является стационарная и эргодическая последовательность [11].

В качестве примера вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i \partial c}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i \partial c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 2\sum_{t=p}^{n} \xi_t X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2} -$$

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 2\sum_{t=p}^{n}\left[\sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-cX_{t-1}^2}\right] X_{t-(i+1)} e^{-cX_{t-1}^2} =$$

$$= 0 - 2\sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} E X_{i'}^2 X_0^2 e^{-2cX_i^2} = -2\sum_{i'=0}^{p-1} b_{i'} E X_{i'}^2 X_0^2 e^{-2cX_i^2}.$$

Получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i \partial a_j} = 2EX_0 X_{i-j},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial a_i\partial b_j}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial b_i\partial a_j}=2EX_0X_{i-j}e^{-cX_i^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial a_i\partial c}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial c\,\partial a_j}=-2\sum_{i=0}^{p-1}b_iEX_0^2X_i^2e^{-cX_i^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial b_i\partial b_j}=2EX_0X_{i-j}e^{-2cX_i^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial b_i\partial c}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial c\,\partial b_j}=-2\sum_{i'=0}^{p-1}b_{i'}EX_{i'}^2X_0^2e^{-2cX_i^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2 g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})}{\partial c^2}=2\sum_{t=p}^{n}\left(\sum_{i'=0}^{p-1}b_{i'}\right)^2EX_0^2X_{i'}^4e^{-2cX_{t-1}^2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}B=2K$, где элементы матрицы K — соответствующие пределы производных, разделенных на n.

Следовательно, $g(a_i,b_i,c)=g(\widetilde{a_i},\,\widetilde{b_i},\,\tilde{c})+A^{\mathrm{т}}\Theta+\Theta^{\mathrm{т}}K\Theta+\delta(a_i,b_i,c)$.

Покажем, что асимптотическое распределение точки $(\widehat{a_i},\,\widehat{b_i},\,\hat{c})_{i=0,\,1,\,\ldots,\,p-1}$ минимума функции $g(a_i,b_i,c)$ есть не что иное как асимптотическое распределение точки минимума для квадратичной формы $A^{\mathrm{т}}\Theta+\Theta^{\mathrm{т}}K\Theta$, причем ее минимум равен $(-1/2)K^{-1}A$.

Введем погрешность вычислений истинных значений X_t:

$$E_t=\sum_{i=0}^{p-1}\left(\left(a_i+b_ie^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}+\xi_t\right)-\left(\widehat{a_i}+\widehat{b_i}e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}\right)X_{t-(i+1)}.$$

Зададим функцию квадратичной ошибки: $L(\widehat{a_i},\,\widehat{b_i},\,\hat{c})=\sum\limits_{t=p}^{n}(E_t^2-\xi_t^2)$.

Выполним замену $\widehat{\Theta}=\sqrt{n}(\widehat{a_i}-a_i,\widehat{b_i}-b_i,\,\hat{c}-c)$ и разложим $L(\widehat{a_i},\,\widehat{b_i},\,\hat{c})$ в ряд Тейлора. Используем модифицированную формулу разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого порядка:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x)=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-x_0)^2,\ \tilde{x}\in(x_0,\,x);$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-x_0)^2=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2-$$

$$-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x-x_0)^2=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{1}{2}(f''(\tilde{x})-f''(x_0))(x-x_0)^2.$$

Вычислим вектор первых производных и матрицы Гессе вторых производных функции $L(\widehat{\Theta})$. В качестве примера определим $\dfrac{\partial\sum\limits_{t=0}^{n}E_t^2}{\partial\widehat{b_i}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ и $\dfrac{\partial^2\sum\limits_{t=0}^{n}E_t^2}{\partial\widehat{b_i}\,\partial\hat{c}}\dfrac{1}{n}$:

$$\frac{\partial\sum\limits_{t=0}^{n}E_t^2}{\partial\widehat{b_i}}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n}\frac{\partial E_t}{\partial\widehat{b_i}}\frac{\partial E_t^2}{\partial E_t}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n}\frac{\partial E_t}{\partial\widehat{b_i}}2E_t=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n}\frac{\partial E_t}{\partial\widehat{b_i}}E_t=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n}E_t\,\frac{\partial\sum\limits_{i'=0}^{p-1}\left(\left(\left(a_{i'}+b_{i'}e^{-cX_{t-1}^2}\right)X_{t-(i'+1)}+\xi_t\right)-\left(\widehat{a_{i'}}+\widehat{b_{i'}}e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}\right)X_{t-(i'+1)}\right)}{\partial\widehat{b_i}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n}E_t\sum_{i'=0}^{p-1}\frac{\partial-\widehat{b_{i'}}X_{t-(i'+1)}e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}}{\partial\widehat{b_i}}=-\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{t=p}^{n}E_tX_{t-(i+1)}e^{-\hat{c}X_{t-1}^2};$$

$$\frac{\partial^2\sum\limits_{t=p}^{n}E_t^2}{\partial\widehat{b_i}\,\partial\hat{c}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\frac{\partial-2\sum\limits_{t=p}^{n}E_tX_{t-(i+1)}e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}}{\partial\hat{c}}=$$

$$=-\frac{2}{n}\frac{X_{t-(i+1)}e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}\partial\sum\limits_{t=p}^{n}\sum\limits_{j'=0}^{p-1}\left(AX_{t-(j'+1)}+\xi_t\right)-BX_{t-(j'+1)}}{\partial\hat{c}}=$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n}E_tX_{t-(i+1)}X_{t-1}^2e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}-\frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n}\sum_{j'=0}^{p-1}\widehat{b_{j'}}X_{t-(j'+1)}X_{t-(i+1)}X_{t-1}^2e^{-\widehat{2c}\,X_{t-1}^2},$$

$$A = a_{j'} + b_{j'} e^{-cX_{t-1}^2}; \qquad B = \widehat{a_{j'}} + \widehat{b_{j'}} e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}.$$

Для вектора-столбца производных:

$$\frac{\partial \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{a_i}} \frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} E_t X_{t-(i+1)},$$

$$\frac{\partial \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{b_i}} \frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} E_t X_{t-(i+1)} e^{-\hat{c}X_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \hat{c}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} E_t \sum_{i=0}^{p-1} \widehat{b_{i'}} X_{t-(i'+1)} X_{t-1}^2 e^{-\hat{c}X_{t-1}^2}.$$

Для матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{a_i}\, \partial \widehat{a_j}} \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{t=p}^{n} X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)},$$

$$\frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{a_i}\, \partial \widehat{b_j}} \frac{1}{n} = \frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{b_i}\, \partial \widehat{a_j}} \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{t=p}^{n} X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-\hat{c}X_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{a_i}\, \partial \hat{c}} \frac{1}{n} = \frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \hat{c}\, \partial \widehat{a_j}} \frac{1}{n} = -\frac{2}{n} \sum_{t=p}^{n} \sum_{j'=0}^{p-1} \widehat{b_{j'}} X_{t-(j'+1)} X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-\hat{c}X_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{b_i}\, \partial \widehat{b_j}} \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{t=p}^{n} X_{t-(i+1)} X_{t-(j+1)} e^{-\hat{c}X_{t-1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \widehat{b_i}\, \partial \hat{c}} \frac{1}{n} = \frac{\partial^2 \sum\limits_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \hat{c}\, \partial \widehat{b_j}} \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \sum_{t=p}^{n} E_t X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-\hat{c}X_{t-1}^2} -$$

$$-\frac{2}{n} \sum_{t=p}^{n} \sum_{j'=0}^{p-1} \widehat{b_{j'}} X_{t-(j'+1)} X_{t-(i+1)} X_{t-1}^2 e^{-\widehat{2c}\, X_{t-1}^2},$$

$$-\frac{\partial^2 \sum_{t=0}^{n} E_t^2}{\partial \hat{c}^2}\frac{1}{n} = \frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\hat{b}_i X_{t-(i+1)}\right)^2 X_{t-1}^4 e^{-2\hat{c}X_{t-1}^2} -$$

$$-\frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n}\xi_t\sum_{i=0}^{p-1}\hat{b}_i X_{t-(i+1)}X_{t-1}^4 e^{-2\hat{c}X_{t-1}^2}.$$

Отметим, что первые и вторые производные $L(\widehat{\Theta})$ с точностью до обозначений совпали с первыми и вторыми производными функции $g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})$.

Получим, что

$$L(\widehat{\Theta}) = A^{\mathrm{т}}\widehat{\Theta} + \frac{1}{2}\widehat{\Theta}^{\mathrm{т}} B\widehat{\Theta} + \beta(\widehat{\Theta}), \quad \beta(\widehat{\Theta}) = \widehat{\Theta}^{\mathrm{т}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(\widetilde{\Theta}) - \frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(0)\right)\widehat{\Theta},$$

где $\widetilde{\Theta} \in \left[0, \widehat{\Theta}\right]$. Покажем, что $\beta(\widehat{\Theta}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для этого явно вычислим покоординатные значения элементов матрицы $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(\widetilde{\Theta}) - \frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(0)\right)$ с учетом того, что X_t и ξ_t стационарны и эргодичны. В качестве примера определим $\partial\widehat{\Theta}_{\hat{a}_i}\partial\widehat{\Theta}_{\hat{b}_j}$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}_{\hat{a}_i}\partial\widehat{\Theta}_{\hat{b}_j}}(\widetilde{\Theta}) - \frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}_{\hat{a}_i}\partial\widehat{\Theta}_{\hat{b}_j}}(0) = \frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n} X_{t-(j+1)}X_{t-(i+1)}e^{-\left(\frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}+c\right)X_{t-1}^2} -$$

$$-\frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n} X_{t-(j+1)}X_{t-(i+1)}e^{-\left(\frac{0}{\sqrt{n}}+c\right)X_{t-1}^2} =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n} X_{t-(j+1)}X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}\left(e^{-\left(\frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}\right)X_{t-1}^2} - 1\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n} X_{t-(j+1)}X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}\left(1 - \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}X_{t-1}^2 - 1\right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\sum_{t=p}^{n} X_{t-(j+1)}X_{t-(i+1)}e^{-cX_{t-1}^2}\frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}X_{t-1}^2 \to 0.$$

Покоординатные значения элементов матрицы $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(\widetilde{\Theta}) - \frac{\partial^2 L}{\partial\widehat{\Theta}^2}(0)\right)$ равны 0. Это является подтверждением того, что $\beta(\widehat{\Theta}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Получим, что $E|\beta(\widehat{\Theta})|\to 0$ при $n\to\infty$, значит, что $\beta(\widehat{\Theta})\to 0$ при $n\to\infty$ по вероятности.

Пусть $\widetilde{\Theta}$ — минимум функции $\widetilde{L}(\Theta)=A^{\mathrm{т}}\Theta+(1/2)\Theta^{\mathrm{т}}W\Theta$, где $W = E((\xi_t^2)'')K=E(2)K=2K<+\infty$, тогда $\widetilde{\Theta}=-W^{-1}A=(-1/2)K^{-1}A$ в силу того, что $\widetilde{L}(\Theta)$ — квадратичная форма. Поскольку $E((\xi_t^2)'')=E(2\xi_t)=0$ и $E(2\xi_t)$ независимо от X_t, то и $E\left[2\xi_t X_t\,|\,\mu_{t-1}\right]=0$, где μ_t — последовательность σ-алгебр, порожденных множеством ξ_s, $s\le t$. Последовательность $2\xi_t X_t$, $t=1, 2, \ldots,$ образует мартингал-разность относительно этой последовательности σ-алгебр. Тогда в силу центральной предельной теоремы для мартингалов [12] имеем, что вектор A асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $KE\left[(\xi_t')^2\right]$. Вследствие этого и случайная величина $\widetilde{\Theta}=W^{-1}A$ является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием, причем ее ковариационная матрица равна $K^{-1}E\left[(\xi_t')^2\right]$. Следовательно, остается доказать, что $\widehat{\Theta}-\widetilde{\Theta}\to 0$ по вероятности.

Для доказательства последнего введем произвольное $\delta>0$ и покажем, что $P\left[\left|\widehat{\Theta}-\widetilde{\Theta}\right|\le\delta\right]\to 1$. Для этого зафиксируем некоторый параметр δ [13, 14].

Величина $\widetilde{\Theta}$ асимптотически нормальна и ограничена по распределению, значит существует такой компакт $C\in\mathbb{R}^n$ с вероятностью, бесконечно близкой к 1, содержащий для всех n шары с центром в $\widetilde{\Theta}$ и радиусом δ.

Согласно закону больших чисел, $B\to W$ при $n\to\infty$, тогда $L(\Theta)-\widetilde{L}(\Theta)\to 0$ по вероятности при $n\to\infty$. Поэтому функция $L(\Theta)+A^{\mathrm{т}}\to\dfrac{1}{2}\Theta^{\mathrm{т}}W\Theta$ выпуклая при $n\to\infty$. Таким образом, $\beta(\widetilde{\Theta})\to 0$ равномерно на любом компакте. Отсюда по [15] $\Delta=\sup_{\Theta\in C}\left|\beta(\widetilde{\Theta})\right|\to 0$ по вероятности при $n\to\infty$.

Пусть e — произвольный нормированный вектор, такой что выполняются равенства $\Theta^*=\widetilde{\Theta}+\delta e$, $\Theta=\widetilde{\Theta}+te$, $t>\delta$. Тогда из выпуклости $L(\Theta)$ получаем, что $L(\Theta^*)\ge(1-\delta/t)L(\widetilde{\Theta})+(\delta/t)L(\Theta)$, следовательно,

$$L(\Theta)\ge L(\widetilde{\Theta})+\frac{t}{\delta}(L(\Theta^*)-L(\widetilde{\Theta}))\ge L(\widetilde{\Theta})+\frac{t}{\delta}(\widetilde{L}(\Theta^*)-\widetilde{L}(\widetilde{\Theta}))+\beta(\Theta^*)-\beta(\widetilde{\Theta}).$$

Очевидно, что матрица W является положительно определенной, поэтому $\widetilde{L}(\Theta^*)-\widetilde{L}(\widetilde{\Theta})=(1/2)\delta^2 e^{\mathrm{т}}We>0$ и

$$\inf_{\Theta \notin C} L(\Theta) = L(\widetilde{\Theta}) + \inf_{t>\delta} \frac{t}{\delta}\left(L(\Theta^*) - L(\widetilde{\Theta})\right) \ge L(\widetilde{\Theta}) + \frac{1}{2}\delta^2 e^{\mathrm{T}} W e - 2\Delta.$$

Поэтому с единичной вероятностью минимум $L(\Theta)$ лежит внутри компакта C, следовательно, минимум функции g действительно совпадает с минимумом квадратичной формы, является асимптотически нормально распределенным и равен $-(1/2)K^{-1}A$.

Для того чтобы найти асимптотическое распределение случайного вектора $-(1/2)K^{-1}A$, докажем, что его составляющая — вектор A — является асимптотически нормальной, т. е. сходится к нормальному случайному вектору при $n \to \infty$ по распределению.

Пусть A_t — σ-алгебра событий, порожденная множеством $\{X_s,\ s \le t\}$. Следствием этого является то, что X_{t-1} измерима относительно A_{t-1}. С учетом того что ξ_t не зависит от A_t, имеем: $E\left[\xi_t X_{t-1} \mid A_{t-1}\right] = X_{t-1} E\left[\xi_t \mid A_{t-1}\right] = X_{t-1} E\xi_t = 0$ [16].

За счет того что $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$, получаем $EX_{t-1}^2 < +\infty$, тогда по центральной предельной теореме для мартингалов [17] последовательности

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i},\ \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i},\ \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial c}$$

являются нормальными.

Случайные величины X_{t-1} и ξ_t независимы и по условию $E\xi_t = 0$, тогда

$$E \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i} = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} E\left[\xi_t X_{t-(i+1)}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} E\xi_t E X_{t-(i+1)} = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} 0 E X_{t-(i+1)} = 0.$$

По аналогии

$$E \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial b_i} = 0,\ E \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial c} = 0.$$

С учетом $D\xi_t = E\xi_t^2 = \sigma^2 < +\infty$ найдем соответствующие дисперсии:

$$D \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial g(\widetilde{a_i}, \widetilde{b_i}, \tilde{c})}{\partial a_i} = \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=p}^{n} E\left[\xi_t X_{t-(i+1)}\right]\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{n} \sum_{t=p}^{n} E\left[\xi_t X_{t-(i+1)}\right]^2 = 4\sigma^2 E X_0^2.$$

Аналогично

$$D\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(\widetilde{a_i},\, \widetilde{b_i},\, \tilde{c})}{\partial b_i} = 4\sigma^2 E X_0^2 e^{-2cX_0^2},$$

$$D\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial g(\widetilde{a_i},\, \widetilde{b_i},\, \tilde{c})}{\partial c} = 4\left(\sum_{i=0}^{p-1} b_i\right)^2 \sigma^2 E X_0^6 e^{-2cX_0^2}.$$

Во всех случаях получаем нулевое математическое ожидание и конечные дисперсии, которые могут быть вычислены по приведенным выше формулам.

По аналогии находим пределы математических ожиданий попарных произведений элементов вектора-столбца A.

По вычислении всех дисперсий и математических ожиданий может быть сделан вывод, что случайный вектор-столбец A является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $4\sigma^2 K$. Следовательно, асимптотическая ковариационная матрица вектора $-(1/2)K^{-1}A$ равна $\sigma^2 K^{-1}$ [18]. С учетом совпадения асимптотического распределения $-(1/2)K^{-1}A$ с асимптотическим распределением точки минимума функции $g(a_i, b_i, c)$ получаем, что асимптотическая ковариационная матрица обобщенной экспоненциальной авторегрессионной модели Озаки для МНК имеет вид $\sigma^2 K^{-1}$.

Компьютерный эксперимент. Полученное формальное выражение асимптотической ковариационной матрицы авторегрессионной модели Озаки позволяет сравнить теоретические и практические значения дисперсии ее коэффициентов. Первые равны диагональным элементам матрицы $\sigma^2 K^{-1}$, вторые — непосредственным дисперсиям коэффициентов модели Озаки, найденным заданным оптимизационным методом, минимизирующим квадратичную функцию потерь.

Предположим, что имеется процесс X_t, удовлетворяющий уравнению (1) первого порядка, и известны свойства его обновляющего процесса ξ_t. Имеются n наблюдений X_n. На основе этих данных с использованием оптимизационного метода найдем оценки коэффициентов a_0, b_0, c и вычислим их дисперсии относительно истинных значений коэффициентов. Получим теоретические значения дисперсий с использованием асимптотической ковариационной матрицы процесса X_t. Путем сравнения по модулю практических и теоретических значений дисперсий для различных n определим, какого числа наблюдений будет достаточно, чтобы МНК дал результат, практическая точность которого будет достигать теоретической.

Следует отметить, что поиск коэффициентов модели Озаки с использованием алгоритмов безусловной оптимизации является вычислительно сложной задачей. В связи с этим в качестве примера рассмотрим только модели первого порядка, причем их коэффициент c рассчитывается с использованием одномерного сеточного метода (перебор значений c в заданном диапазоне с фиксированным шагом). Таким образом, в результате будет проведено сравнение теоретических и реальных дисперсий только для коэффициентов a_0, b_0.

Вектор X_n для вычисления коэффициентов методом оптимизации сгенерируем 1000 раз со следующими начальным условием и параметрами:

$$x_0 = 2{,}0,\ \ a_0 = 0{,}1,\ \ b_0 = -0{,}9,\ c = 5{,}0,\ \ n = 5,\ 10,\ 25,\ 50,\ 75,\ 100,\ 150,\ 200,\ 250.$$

Выбор подобных значений коэффициентов a_0, b_0 обусловлен стремлением сделать их максимально независимыми.

В качестве обновляющего процесса ξ_t используем классическое и загрязненное гауссовы распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(1-\gamma) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{-x^2/(2\tau^2)}\gamma,$$

распределение Стьюдента

$$f(x) = \frac{\Gamma((m+1)/2)}{\sqrt{m\pi}\Gamma(2m)\left(1+x^2/m\right)^{(m+1)/2}},$$

распределение Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}$$

и логистическое распределение

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Их конкретные значения получим с использованием датчика случайных чисел библиотеки *NumPy* языка программирования *Python*.

Оценку параметров проводим с помощью алгоритма безусловной оптимизации Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шенно (BFGS) [19–22].

Теоретические значения дисперсии коэффициента b_0 при различных значениях ξ_t приведены в табл. 1, модули разностей теоретической и выборочной дисперсии — в табл. 2. Аналогичные таблицы для дисперсии коэффициента a_0 для краткости опущены.

Таблица 1

Теоретические значения дисперсии коэффициента b_0

Распределение	n								
	5	10	25	50	75	100	150	200	250
Нормальное	152,18	123,78	111,10	108,00	106,89	106,11	105,56	105,34	105,19
Загрязненное нормальное:									
$\gamma = 0{,}01$, $\tau = 3$	158,74	133,22	119,85	115,79	114,47	113,97	113,13	112,81	112,70
$\gamma = 0{,}01$, $\tau = 10$	291,59	245,75	221,29	213,44	211,05	210,04	208,84	208,33	208,22
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 3$	260,18	215,91	194,73	187,19	185,21	184,48	183,49	183,04	182,52
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 10$	2014,70	1678,86	1510,52	1456,97	1435,25	1428,16	1422,86	1418,52	1414,90
Стьюдента:									
$m = 15$	181,27	147,66	131,76	125,23	124,20	123,30	122,92	122,79	122,64
$m = 10$	196,45	161,14	142,05	136,47	134,83	134,18	133,70	133,49	133,27
$m = 5$	264,50	213,69	193,90	185,55	183,07	182,07	181,68	181,20	180,71
$m = 4$	325,16	260,58	233,87	224,40	221,32	220,06	219,28	218,64	218,10
Лапласа	297,86	252,15	224,60	217,00	212,86	212,15	211,01	209,93	209,45
Логистическое	755,70	615,57	544,66	526,71	514,23	511,98	507,73	506,77	505,62

Таблица 2

Модули разности значений теоретической и выборочной дисперсии b_0

Распределение	n								
	5	10	25	50	75	100	150	200	250
Нормальное	6 318 743	61,69	16,89	7,69	1,15	0,97	0,49	2,73	0,38
Загрязненное нормальное:									
$\gamma = 0{,}01$, $\tau = 3$	218 491	91,49	3,14	3,87	6,51	11,61	5,64	7,22	1,44
$\gamma = 0{,}01$, $\tau = 10$	3 818 533	20,43	94,70	103,27	103,07	107,27	101,66	101,84	95,47
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 3$	657 725	43,10	77,52	89,75	92,86	91,88	93,52	91,8	80,12
$\gamma = 0{,}1$, $\tau = 10$	$3{,}46 \cdot 10^9$	37835,46	1216,08	1197,63	1201,98	1204,04	1186,25	973,23	901,43
Стьюдента:									
$m = 15$	$1 \cdot 10^8$	89,47	12,54	5,00	7,38	8,72	4,99	2,86	2,65
$m = 10$	$2{,}6 \cdot 10^7$	129,49	9,28	9,51	13,63	12,44	11,66	1,51	3,45
$m = 5$	$6 \cdot 10^7$	183,87	27,35	26,30	16,69	10,82	9,34	6,12	5,80
$m = 4$	$1 \cdot 10^7$	250,03	62,47	26,06	19,61	2,60	12,32	9,57	9,75
Лапласа	$2{,}8 \cdot 10^7$	128,88	19,58	4,96	1,53	3,70	18,29	1,57	11,13
Логистическое	$1{,}4 \cdot 10^{10}$	10 932	84,64	6,05	5,27	14,72	2,20	5,36	5,76

Погрешность метода статистических испытаний и погрешность МНК приводят к широкому разбросу значений в ячейках табл. 1, 2. Тем не менее МНК крайне быстро достигает теоретических значений дисперсии в случае нормального распределения и показывает высокую скорость сходимости для распределения Стьюдента с большим числом степеней свободы и для загрязненного нормального распределения с малыми значениями γ и τ. Хуже всего метод показывает себя в случае логистического распределения, распределений Лапласа и Стьюдента при $m = 4$ и загрязненного нормального распределения при больших значениях γ и τ.

При дальнейшем увеличении n (и N) абсолютные значения разности дисперсий продолжат уменьшаться, однако никогда не станут полностью нулевыми в силу ранее названных погрешностей метода статистических испытаний и МНК.

Выводы. Получены выражения асимптотической ковариационной матрицы экспоненциальной авторегрессионной модели Озаки для МНК $\sigma^2 K^{-1}$. Компьютерный эксперимент показал, что теоретические оценки дисперсии параметров быстрее достигаются в случае нормального распределения, распределения Стьюдента с большим числом степеней свободы и загрязненного нормального распределения с малыми значениями параметров γ, τ и медленнее для распределений Лапласа, Стьюдента при $m = 4$ и загрязненного нормального распределения при больших значениях γ и τ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chan E.P. Machine trading. Deploying computer algorithms to conquer the markets. Wiley, 2017.

[2] Naik N., Mohan B.R. Stock price volatility estimation using regime switching technique empirical study on the Indian stock market. *Mathematics*, 2021, vol. 9, iss. 14, pp. 1595–1608. DOI: https://doi.org/10.3390/math9141595

[3] Hsu B., Sherina V., McCall M.N. Auto-regressive modeling and diagnostics for qPCR amplification. *Bioinformatics*, 2020, vol. 36, no. 22-23, pp. 5386–5391. DOI: https://doi.org/10.1101/665596

[4] Mohamed H.S., Cordeiro G.M., Yousuf H.M. The synthetic autoregressive model for the insurance claims payment data: modeling and future prediction. *Statistics Optimization & Information Computing*, 2022, vol. 11, pp. 524–533.

[5] Lapin V.A., Yerzhanov S.E., Aidakhov Y.S. Statistical modeling of a seismic isolation object under random seismic exposure. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1425, art. 012006. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012006

[6] Ozaki T. Non-linear phenomena and time series models. *Invited paper 43 Session of the International Statistical Institute*. Buenos Aires, 1981.

[7] Ozaki T. The statistical analysis of perturbed limit cycle processes using nonlinear time series models. *J. Time Ser. Anal.*, 1982, vol. 3, iss. 1, pp. 29–41.
DOI: https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1982.tb00328.x

[8] Tong H. Non-linear time series. Oxford Univ. Press, 1990.

[9] Teräsvirta T. Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1994, vol. 89, iss. 425, pp. 208–218.
DOI: https://doi.org/10.1080/01621459.1994.10476462

[10] Chan K.S., Tong H. On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Adv. Appl. Probab.*, 1985, vol. 17, iss. 3, pp. 666–668. DOI: https://doi.org/10.2307/1427125

[11] White H. Asymptotic theory for econometricians. Academic Press, 2014.

[12] Häusler E., Luschgy H. Stable convergence and stable limit theorems. In: *Probability Theory and Stochastic Modelling*, vol. 74. Cham, Springer, 2015.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18329-9

[13] Goryainov V.B. Least-modules estimates for spatial autoregression coefficients. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 565–572.
DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711040101

[14] Goryainov A.V., Goryainova E.R. Comparison of efficiency of estimates by the methods of least absolute deviations and least squares in the autoregression model with random coefficient. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 9, pp. 1579–1588.
DOI: https://doi.org/10.1134/S000511791609006X

[15] Andersen P.K., Gill R.D. Cox's regression model for counting processes: a large sample study. *Ann. Statist.*, 1982, vol. 10, iss. 4, pp. 1100–1120.
DOI: https://doi.org/10.1214/aos/1176345976

[16] Ширяев А.Н. Вероятность-1. Москва, МЦНМО, 2011.

[17] Billingsley P. Convergence of probability measures. Wiley, 1999.

[18] Magnus J.R., Neudecker H. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. Wiley, 2019.

[19] Broyden C.G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. *IMA J. Appl. Maths*, 1970, vol. 6, iss. 1, pp. 76–90.
DOI: https://doi.org/10.1093/imamat/6.1.76

[20] Fletcher R. A new approach to variable metric algorithms. *Comput. J.*, 1970, vol. 13, iss. 3, pp. 317–322. DOI: https://doi.org/10.1093/comjnl/13.3.317

[21] Goldfarb D. A family of variable-metric methods derived by variational means. *Math. Comp.*, 1970, vol. 24, no. 109, pp. 23–26.
DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1970-0258249-6

[22] Shanno D.F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Math. Comp.*, 1970, vol. 24, no. 111, pp. 647–656.
DOI: https://doi.org/10.2307/2004840

Горяинов Владимир Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Масягин Михаил Михайлович — аспирант кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Горяинов В.Б., Масягин М.М. Вычисление асимптотической ковариационной матрицы обобщенной экспоненциальной авторегрессионной модели Озаки для метода наименьших квадратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 3 (114), с. 24–44. EDN: PPICLB

COMPUTATION OF THE ASYMPTOTIC COVARIANCE MATRIX OF THE GENERALIZED EXPONENTIAL AUTOREGRESSIVE OZAKI MODEL FOR THE LEAST SQUARES METHOD

V.B. Goryainov vb-goryainov@bmstu.ru
M.M. Masyagin masyagin@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

High-order mathematical models and their theoretical properties remain the subject of active research over the past decades. They are playing an important role in solving economic, financial, engineering and medical problems. One of the most common examples is the generalized exponential autoregressive Ozaki model. The asymptotic covariance matrix of the generalized Ozaki model was computed for the least squares estimation by its expansion into the Taylor series. The paper compares the speed, at which the model separate implementations tend to its asymptotic behavior for several distributions of the updating process, i.e., normal (Gaussian), contaminated normal with various combinations in the contamination frequency and magnitude parameters, Student, Laplace and logistic. Scientific novelty of this work lies in direct determination of the asymptotic covariance matrix of the generalized Ozaki model. The practical novelty is the possibility of using the tabular results in comparing its implementations to decide on introducing the Ozaki model or any other model in the engineering calculations

Keywords

Generalized exponential autoregressive model, least squares method, asymptotic covariance matrix, Taylor series expansion

Received 03.11.2023
Accepted 25.01.2024
© Author(s), 2024

REFERENCES

[1] Chan E.P. Machine trading. Deploying computer algorithms to conquer the markets. Wiley, 2017.

[2] Naik N., Mohan B.R. Stock price volatility estimation using regime switching technique empirical study on the Indian stock market. *Mathematics*, 2021, vol. 9, iss. 14, pp. 1595–1608. DOI: https://doi.org/10.3390/math9141595

[3] Hsu B., Sherina V., McCall M.N. Auto-regressive modeling and diagnostics for qPCR amplification. *Bioinformatics*, 2020, vol. 36, no. 22-23, pp. 5386–5391. DOI: https://doi.org/10.1101/665596

[4] Mohamed H.S., Cordeiro G.M., Yousuf H.M. The synthetic autoregressive model for the insurance claims payment data: modeling and future prediction. *Statistics Optimization & Information Computing*, 2022, vol. 11, pp. 524–533.

[5] Lapin V.A., Yerzhanov S.E., Aidakhov Y.S. Statistical modeling of a seismic isolation object under random seismic exposure. *J. Phys.: Conf. Ser*., 2019, vol. 1425, art. 012006. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012006

[6] Ozaki T. Non-linear phenomena and time series models. *Invited paper 43 Session of the International Statistical Institute*. Buenos Aires, 1981.

[7] Ozaki T. The statistical analysis of perturbed limit cycle processes using nonlinear time series models. *J. Time Ser. Anal*., 1982, vol. 3, iss. 1, pp. 29–41. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1982.tb00328.x

[8] Tong H. Non-linear time series. Oxford Univ. Press, 1990.

[9] Teräsvirta T. Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1994, vol. 89, iss. 425, pp. 208–218. DOI: https://doi.org/10.1080/01621459.1994.10476462

[10] Chan K.S., Tong H. On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Adv. Appl. Probab.*, 1985, vol. 17, iss. 3, pp. 666–668. DOI: https://doi.org/10.2307/1427125

[11] White H. Asymptotic theory for econometricians. Academic Press, 2014.

[12] Häusler E., Luschgy H. Stable convergence and stable limit theorems. In: *Probability Theory and Stochastic Modelling*, vol. 74. Cham, Springer, 2015. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18329-9

[13] Goryainov V.B. Least-modules estimates for spatial autoregression coefficients. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 565–572. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230711040101

[14] Goryainov A.V., Goryainova E.R. Comparison of efficiency of estimates by the methods of least absolute deviations and least squares in the autoregression model with random coefficient. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 9, pp. 1579–1588. DOI: https://doi.org/10.1134/S000511791609006X

[15] Andersen P.K., Gill R.D. Cox's regression model for counting processes: a large sample study. *Ann. Statist.*, 1982, vol. 10, iss. 4, pp. 1100–1120.
DOI: https://doi.org/10.1214/aos/1176345976

[16] Shiryaev A.N. Veroyatnost-1 [Probability]. Moscow, MTSNMO Publ., 2011.

[17] Billingsley P. Convergence of probability measures. Wiley, 1999.

[18] Magnus J.R., Neudecker H. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. Wiley, 2019.

[19] Broyden C.G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. *IMA J. Appl. Maths*, 1970, vol. 6, iss. 1, pp. 76–90.
DOI: https://doi.org/10.1093/imamat/6.1.76

[20] Fletcher R. A new approach to variable metric algorithms. *Comput. J.*, 1970, vol. 13, iss. 3, pp. 317–322. DOI: https://doi.org/10.1093/comjnl/13.3.317

[21] Goldfarb D. A family of variable-metric methods derived by variational means. *Math. Comp.*, 1970, vol. 24, no. 109, pp. 23–26.
DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1970-0258249-6

[22] Shanno D.F. Conditioning of quasi-Newton methods for function minimization. *Math. Comp.*, 1970, vol. 24, no. 111, pp. 647–656.
DOI: https://doi.org/10.2307/2004840

Goryainov V.B. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Masyagin M.M. — Post-Graduate Student, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Goryainov V.B., Masyagin M.M. Computation of the asymptotic covariance matrix of the generalized exponential autoregressive Ozaki model for the least squares method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 3 (114), pp. 24–44 (in Russ.). EDN: PPICLB