

## ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЛАСТИНОЙ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В.С. Попов<sup>1,2</sup>

vic\_p@bk.ru

А.А. Попова<sup>1</sup>

anay\_p@bk.ru

<sup>1</sup>СГТУ имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация

<sup>2</sup>ИПТМУ РАН, Саратов, Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложена математическая модель взаимодействия пульсирующего ползущего слоя вязкой сжимаемой жидкости (газа) с пластиной, установленной на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью. Пластина является нижней стенкой узкого плоского канала, верхняя стенка которого полагается жесткой. Рассмотрен случай изотермического состояния, когда пульсация жидкости обусловлена заданным законом изменения давления на торцах канала. Модель включает в себя уравнения Навье — Стокса для вязкой сжимаемой жидкости, уравнение неразрывности, уравнение состояния баротропной среды и уравнение динамики пластины типа Кирхгофа, краевые условия на границах контакта разнородных сред и торцах канала. Проведен асимптотический анализ модели методом возмущений и получены линеаризованные уравнения динамики тонкого ползущего слоя сжимаемой вязкой жидкости. С использованием метода итераций найдено распределение давления в слое жидкости. В результате получено интегрированное уравнение изгибных аэроупругих колебаний пластины на нелинейно-упругом основании. На базе решения этого уравнения методом Бубнова — Галеркина получено обобщенное уравнение Дуффинга. Из этого уравнения следует, что сжимаемость жидкости ведет к уменьшению инерционных свойств рассматриваемой системы и к появлению фазового запаздывания возмущающей силы. С использованием метода гармонического баланса определен основной аэроупругий отклик

### Ключевые слова

*Нелинейные колебания, пластина, нелинейно-упругое основание, сжимаемая вязкая жидкость, аэроупругость, метод возмущений, обобщенное уравнение Дуффинга*

пластины и нелинейная характеристика ее фазового сдвига. Численное исследование этих характеристик показало, что учет сжимаемости жидкости приводит к возрастанию значений резонансных частот и амплитуд колебаний пластины. Показана возможность подавления неустойчивых колебаний пластины со скачкообразным изменением амплитуд ее прогибов за счет изменения толщины слоя жидкости

Поступила 18.09.2023

Принята 06.12.2023

© Автор(ы), 2024

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-29-00159, <https://rscf.ru/project/23-29-00159/>)*

**Введение.** Одно из современных направлений механики составляют проблемы аэрогидроупругости [1, 2], среди которых можно выделить задачи о моделировании взаимодействия жидкости с ограничивающими ее упругоподатливыми стенками в виде балок и пластин. Отметим первое направление результатов указанных исследований, в которых жидкость рассматривают как идеальную, и приведем краткий обзор их результатов. В рамках энергетического подхода в [3] изучено взаимодействие идеальной жидкости с круглой пластиной, совершающей свободные колебания, это исследование обобщено в [4] путем постановки и исследования задачи гидроупругости. Авторами рассмотрена круглая пластина, являющаяся частью жесткой стенки, с одной стороны которой находится неограниченный объем идеальной жидкости постоянной плотности. Показано, что взаимодействие с жидкостью приводит к уменьшению значений собственных частот пластины за счет увеличения инерционных свойств колебательной системы пластина–идеальная жидкость. Дана оценка влияния торцевого закрепления пластины на ее собственные частоты и установлено, что затраты части энергии на волнообразование в жидкости ведут к демпфированию колебаний. Вынужденные колебания упругого элемента датчика давления в виде круглой пластины, установленной на конце жесткой трубы и взаимодействующей с пульсирующей идеальной жидкостью, ее заполняющей, рассмотрены в [5]. Исследование выполнено в рамках осесимметричной задачи гидроупругости пластины типа Кирхгофа с учетом тепловых эффектов. Получено интегродифференциальное уравнение изгибных колебаний пластины и проведено его численное исследование. Задачи динамики и устойчивости трубопровода, транспортирующего идеальную несжимаемую жидкость, как балки кольцевого сечения рассмотрены в [6, 7]. Случай плоского движения балки-трубопровода при упругом закреплении ее торцов на пружинах и постоянной скорости потока транс-

портируемой жидкости исследован в [6]. Получено уравнение динамики рассматриваемой балки-трубопровода, найдены критические скорости потока, соответствующие потери устойчивости, и изучено поведение исследуемой системы на неустойчивых режимах. Аналогичная задача рассмотрена в [7] для балки-трубопровода, совершающего изгибно-крутильные и изгибно-продольно-крутильные колебания с учетом нелинейных реакций упругодемпфирующих внешних связей, нелинейности изгибающего момента и центробежной силы, действующих на балку-трубопровод. Проведено исследование устойчивости рассматриваемой системы по Ляпунову и найдены ограничения, налагаемые на параметры исследуемой системы. Собственные колебания и устойчивость упругой верхней стенки канала прямоугольного сечения с абсолютно жестким дном и боковыми стенками численно исследованы в [8] методом конечных элементов. Стенка рассматривается как прямоугольная пластина типа Тимошенко, взаимодействующая со слоем сжимаемой идеальной жидкости, перемещающейся в канале. Определены критические скорости, соответствующие потере устойчивости пластины, оценено влияния высоты слоя жидкости в канале на собственные частоты колебаний пластины. Пространственный балочный изгиб трубопровода численно исследован в [9] за счет внутреннего давления жидкости, воздействия грунта как упругого основания Винклера и температурных деформаций. Гидроупругие колебания дна цилиндрического резервуара с жесткой вертикальной стенкой, заполненного жидкостью и установленного на упругом основании Пастернака, рассмотрены в [10]. Дно резервуара представляет собой круглую пластину типа Кирхгофа, взаимодействующую с идеальной несжимаемой жидкостью. Изучена линейная задача гидроупругости с учетом наличия в колебательной системе контура обратной связи для демпфирования колебаний пластины-дна за счет управляющего воздействия на плавающую крышу в виде трехслойной круглой пластины с пьезоэлементами. Результаты экспериментального исследования влияния различных вариантов торцевого закрепления прямоугольных пластин, контактирующих со свободной поверхностью воды, на частоты их собственных колебаний приведены в [11].

Ко второй части указанных проблем гидроупругости следует отнести исследования с учетом вязкости жидкости. Среди таких работ отметим следующие. С учетом вязкости жидкости в [12] обобщены результаты [3] для случая малых колебаний пластины и найдены дополнительные слагаемые, увеличивающие инерционные и диссипативные свойства колебательной системы. Эти слагаемые пропорциональны безразмерному параметру, который фактически представляет собой обратное значение числа

Уомерсли [13]. Изгибные свободные колебания консольной балки типа Эйлера — Бернулли, взаимодействующей с окружающим ее неограниченным объемом вязкой жидкости постоянной плотности, исследованы в [14] на базе постановки и решения плоской задачи гидроупругости. Приведены результаты экспериментального исследования собственных колебаний рассматриваемой балки в вакууме, воздухе и воде. Динамическая устойчивость пластины, являющейся частью жесткой границы, которая разделяет два объема вязкой несжимаемой жидкости, изучена в [15]. Исследование выполнено в рамках плоской задачи гидроупругости для линейной вязкоупругой пластины и геометрически нелинейной пластины с конструкционным демпфированием, внешними упругими связями и с учетом ее продольной и поперечной деформаций. Получены достаточные условия устойчивости движения пластины, накладывающие ограничения на параметры рассматриваемой системы. Взаимодействие слоя вязкой жидкости, которая полностью заполняет наноемкость с твердыми верхней и боковыми стенками, с нанопластиной, совершающей свободные колебания и являющейся дном этой емкости, исследовано в [16]. Рассмотрена упрощенная задача гидроупругости при учете только градиента давления и составляющей скорости жидкости по нормали к пластине. Взаимодействие вязкого газа (сжимаемой жидкости), заполняющего узкий зазор между двумя параллельными жесткими стенками, с жесткой пластиной, движущейся в этом зазоре с постоянной скоростью в направлении по нормали к его стенкам, рассмотрено в [17] для исследования плоского газового демпфера. Приближенный подход для учета упругой податливости стенки бесконечно протяженного подшипника при ее взаимодействии со смазывающим слоем газа предложен в [18]. Он основан на переходе к плоской задаче за счет «развертывания» кольцевого газового слоя на плоскость с добавлением к толщине полученного плоского слоя линейного члена, пропорционального давлению газа с коэффициентом пропорциональности, связанным с модулем упругости деформируемой стенки. Численное моделирование взаимодействия теплопроводного сжимаемого вязкого газа с абсолютно жестким диском, имеющим линейно-упругий подвес, проведено в [19] с использованием метода Годунова в сочетании со схемой MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) для исследования процессов срабатывания предохранительного клапана. Задача динамики взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости постоянной плотности со стенками плоского узкого канала, в котором она находится, исследована в [20, 21]. Стенки канала рассмотрены как две параллельные бесконечно длинные пластины типа Кирхгофа на линейно-

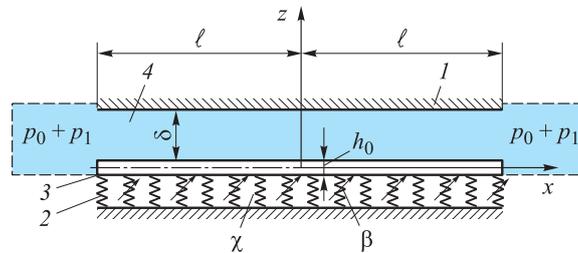
упругом основании Винклера [20] или как две шарнирно опертые пластины конечного размера [21], нижняя из которых установлена на основание Винклера. Оценка влияния кубически нелинейного упругого основания кольцевого канала с вязкой несжимаемой жидкостью на уединенные волны деформации в его стенках осуществлена в [22]. Поставлена задача гидроупругости стенок канала как двух соосных геометрически нелинейных оболочек, проведен ее асимптотический анализ и получена система обобщенных уравнений Кортвега — де Вриза, с помощью которой численно исследована эволюция нелинейных волн деформации. Взаимодействие слоя вязкой несжимаемой жидкости с жесткой нижней стенкой канала рассмотрено в [23], а с жесткой торцевой стенкой — в [24], канал полностью заполнен слоем жидкости и имеет упругий подвес с кубической нелинейностью. Поставлены и решены задачи гидроупругости для данных стенок, найдены и исследованы их нелинейные гидроупругие отклики. Взаимодействие пластины, расположенной на нелинейно-упрочняющемся основании, с пульсирующим слоем несжимаемой вязкой жидкости изучено в [25]. Получено нелинейное интегродифференциальное уравнение колебаний пластины, решение которого осуществлено методом Бубнова — Галеркина с последующим применением метода гармонического баланса. Найдены и исследованы нелинейный гидроупругий отклик и соответствующая ему фазовая характеристика пластины.

В перечисленных работах не рассмотрен случай взаимодействия пульсирующего ползущего слоя вязкой сжимаемой жидкости (газа) с упруго-податливой стенкой канала, в котором она находится, установленной на нелинейно-упругом основании.

Предложенная в настоящей работе модель динамики взаимодействия слоя вязкой сжимаемой жидкости с пластиной на нелинейно-упругом основании и определенные в ее рамках аэроупругий отклик и характеристика фазового сдвига пластины могут рассматриваться как фундаментальный задел для изучения динамики газовых и жидкостных демпферов и опор, установленных на нелинейно- и линейно-упругих основаниях, упругих чувствительных элементов датчиков давления, имеющих нелинейно- и линейно-упругие подложки. Далее рассмотрим постановку и решение указанной задачи для определения аэроупругого отклика стенки канала.

**Постановка задачи. Основные положения и допущения.** Рассмотрим тонкий слой вязкой сжимаемой жидкости (газа), заполняющей щель между двумя параллельными стенками одинаковых геометрических размеров в плане (рис. 1). Верхняя стенка полагается абсолютно жесткой, а нижняя — представляет собой пластину типа Кирхгофа, установленную

на нелинейно-упругом основании. Толщина пластины  $h_0$ , для основания принята модель упрочняющегося основания Винклера с кубической нелинейностью [26, 27]. Пластина шарнирно оперта на торцах, а выходные сечения канала справа и слева примыкают к торцевым полостям, заполненным той же жидкостью (газом). Рассматриваемая система находится в изотермическом состоянии [28, 29]. Учитывая, что вязкость жидкости сильно зависит от температуры и практически не зависит от давления [29] принимаем ее динамическую вязкость постоянной и рассматриваем жидкость как баротропную сплошную среду. Начало декартовой системы координат  $x, z$  связано с центром срединной поверхности пластины в невозмущенном состоянии. Полагаем, что размер стенок канала в направлении оси  $y$  значительно больше размера  $2\ell$  в направлении оси  $x$  и рассматриваем плоскую постановку. В невозмущенном состоянии давление жидкости (газа) в канале и торцевых полостях постоянно  $p_0$ , а расстояние между стенками  $\delta$  в силу узости щели  $\delta \ll \ell$ . Давление  $p_0$  принимаем за начало отсчета давления в жидкости. На фоне давления  $p_0$  в торцевых полостях поддерживается пульсация давления  $p_1$  по гармоническому закону. За счет этой пульсации возбуждаются нелинейные изгибные колебания пластины, амплитуда которых  $w_m \ll \delta$ . Исследуем установившиеся нелинейные колебания пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой сжимаемой жидкости (газа) [30].



**Рис. 1.** Схема щелевого канала, образованного двумя параллельными стенками:

- 1 — абсолютно жесткая стенка; 2 — нелинейно-упругое основание;
- 3 — пластина ( $\chi$  — коэффициент жесткости линейной составляющей реакции основания;  $\beta$  — коэффициент жесткости кубической составляющей реакции основания); 4 — вязкая сжимаемая жидкость (газ), заполняющая канал и торцевые полости

Гармонический закон пульсации давления в торцевых полостях задан в виде

$$p_1 = -p_m \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $p_m$  — амплитуда пульсации давления;  $\omega$  — заданная частота пульсации;  $t$  — время.

Записывая уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости (газа), учтем, что в узкой щели ее движение ползущее [29] и эти уравнения суть уравнения Навье — Стокса для сжимаемой среды, в которых опущены локальное и конвективное ускорения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p$  — давление жидкости (газа);  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $V_x$ ,  $V_z$  — проекции скорости жидкости (газа) на оси  $Ox$ ,  $Oz$ ;  $\mu'$  — вторая, или объемная, вязкость.

Уравнения (2) замыкаем уравнением неразрывности для сжимаемой среды

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

и уравнением состояния баротропной среды

$$\frac{p}{\rho} = c^2. \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости (газа);  $c$  — изотермическая скорость звука в жидкости (газе).

Совместно с уравнениями (2)–(4) необходимо рассмотреть уравнение динамики пластины типа Кирхгофа, установленной на нелинейно-упругом основании и взаимодействующей со слоем жидкости (газа) [25]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n - q_f, \quad (5)$$

где  $D = Eh_0^3 / (12(1 - \mu_0^2))$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  — модуль Юнга материала пластины,  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона материала пластины;  $w$  — прогиб пластины;  $\rho_0$  — плотность материала пластины;  $q_n$ ,  $q_f$  — нагрузки со стороны слоя жидкости (газа) и нелинейно-упругого основания.

Нагрузка  $q_n$  определяется нормальным напряжением  $q_{zz}$  в сжимаемой вязкой жидкости (газе) на границе ее контакта с деформируемой пластиной [29, 31]:

$$q_n = q_{zz} + w \frac{\partial q_{zz}}{\partial z}, \quad (6)$$

$$q_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \left( \frac{2}{3} \mu - \mu' \right) \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + w,$$

нагрузка  $q_f$  может быть выражена через прогибы пластины [26, 27]:

$$q_f = \chi w + \beta w^3. \quad (7)$$

Здесь  $\chi$  — коэффициент жесткости линейной составляющей реакции основания;  $\beta$  — коэффициент жесткости кубической составляющей реакции основания. Поскольку рассматриваем нелинейно-упрочняющееся основание, полагаем  $\beta > 0$ , т. е. изучаем случай жесткой кубической нелинейности [27, 32].

Дополним уравнения (2)–(5) краевыми условиями:

– на границах контакта вязкой жидкости (газа) с деформируемой и неподвижной стенками щели, т. е. условия прилипания жидкости (газа) к стенкам [29, 31]:

$$V_x = 0, \quad V_z + w \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + w, \quad V_x = V_z = 0 \text{ при } z = \delta + \frac{h_0}{2}; \quad (8)$$

– равенства давлений в торцевых сечениях щели и торцевых полостях:

$$p = p_1(\omega t) \text{ при } x = -\ell, \quad p = p_1(\omega t) \text{ при } x = \ell; \quad (9)$$

– шарнирного опирания пластины на торцах:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = -\ell, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = \ell. \quad (10)$$

При записи (9) учтено, что за начало отсчета давления принято постоянное давление  $p_0$ , соответствующее невозмущенному состоянию. В (2), (6) полагаем  $\mu' = 0$ , так как при изотермическом процессе и для одноатомных газов объемная вязкость  $\mu'$  может быть принята равной нулю [31].

**Асимптотический анализ сформулированной задачи.** В рассматриваемой постановке для изучения динамики взаимодействия слоя жидкости и пластины выделим два независимых малых параметра задачи: 1)  $\psi = \delta / \ell \ll 1$ ; 2)  $\lambda = w_m / \delta \ll 1$ . Полагая, что  $\lambda / \psi = O(1)$ , перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z - h_0 / 2}{\delta}, \quad \tau = \theta t, \quad V_z = w_m \theta U \zeta, \quad (11)$$

$$V_x = \frac{w_m \theta}{\psi} U_\xi, \quad p = \frac{\lambda}{\psi} \frac{\mu \theta}{\psi} P, \quad w = w_m W. \quad (11)$$

Здесь введена характерная частота данных колебаний  $\theta = 1/T$ , учитывая, что  $T$  — характерный период нелинейных колебаний пластины,

Учтем, что  $p_1(\omega t) = (\lambda / \psi^2) \mu \theta P_1(\tau \omega / \theta)$ ,  $\rho = \rho_{g0} + \rho^*$ , где  $\rho_{g0}$  — плотность жидкости (газа) в невозмущенном состоянии;  $\rho^*$  — плотность жидкости (газа) при возмущенном состоянии, определяемая из уравнения состояния баротропной среды (4). Далее верхний индекс «\*» опускаем. Подставляя (11) в (2)–(10), получаем задачу аэроупругости, включающую в себя безразмерные уравнения динамики вязкой сжимаемой жидкости (газа) в щели

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \psi^2 \left( \psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \text{Mo}^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda \text{Mo}^2 \left( U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + (W\text{o}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left( \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

безразмерное уравнение динамики пластины на нелинейно-упругом основании

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\chi \ell^4}{D} W + \frac{\beta \ell^6}{D} \left( \frac{w_m}{\ell} \right)^2 W^3 + \frac{\ell^4 \rho_0 h_0 \theta^2}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = \\ = - \frac{\ell^4 \mu \theta}{D w_m} \left[ \frac{\lambda}{\psi^2} P - \lambda \left( \frac{4}{3} \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \lambda W \left( \frac{\lambda}{\psi^2} \frac{\partial P}{\partial \zeta} - \lambda \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

и дополняющие их граничные условия

$$\begin{aligned} U_\xi = 0, \quad U_\zeta + \lambda W \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{\partial W}{\partial \tau} \quad \text{при } \zeta = \lambda W, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \\ P = P_1 \quad \text{при } \xi = \mp 1, \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что в (12) сформированы числа подобия, характерные для рассматриваемой задачи:

– число подобия, предложенное Л.И. Могилевичем в [33], которое можно рассматривать как произведение числа Струхала и числа Маха ( $\theta\ell$  — характерная скорость движения пульсирующей сжимаемой жидкости (газа), совпадающая со скоростью изгибных колебаний пластины):  $Mo = \theta\ell / c$ .

– квадрат числа Уомерсли [13]  $Wo^2 = \rho_{g0}\delta^2\theta/\mu$  или  $Wo = \delta\sqrt{\theta/\nu}$ , в котором  $\nu = \mu/\rho_{g0}$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости (газа) в невозмущенном состоянии.

Аналогично подходу гидродинамической теории смазки [29] исключаем из рассмотрения в (12), (13) члены порядка  $\psi^2$ , тем самым переходя к задаче аэроупругости для тонкого слоя вязкой сжимаемой жидкости (газа). Применим к этой задаче метод возмущений [34], рассматривая асимптотические разложения искомых функций по малому параметру  $\lambda$ . Ограничиваясь первым членом разложения, получаем следующую краевую задачу, включающую в себя линеаризованные уравнения тонкого слоя вязкой сжимаемой жидкости (газа) и нелинейное уравнение пластины:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\chi\ell^4}{D} W + \frac{\beta\ell^6}{D} \left(\frac{w_m}{\ell}\right)^2 W^3 + \frac{\ell^4 \rho_0 h_0 \theta^2}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = -\frac{\ell^4}{D w_m} \frac{\lambda}{\psi} \frac{\mu\theta}{\psi} P \quad (16)$$

и соответствующие им граничные условия

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{\partial W}{\partial \tau} \quad \text{при } \zeta = 0, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \quad (17)$$

$$P = P_1 \quad \text{при } \xi = \mp 1, \quad (18)$$

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1. \quad (19)$$

**Определение закона распределения давления в слое сжимаемой вязкой жидкости (газе).** Решим систему (15) с граничными условиями (17), (18) методом итераций [23, 24]. На первой итерации полагаем жидкость несжимаемой, т. е.  $c^2 \rightarrow \infty$ , что позволяет исключить из рассмотрения в третьем уравнении (15) первый член, учитывающий сжимаемость газа. На второй итерации учитываем сжимаемость, т. е. подставляем в исключенный член давление, найденное на первом шаге итерации. Тогда на первой итерации находим

$$U_{\xi} = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_{\zeta} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} (3\zeta^2 - 2\zeta^3 - 1),$$

$$P = 12 \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\xi + 6(\xi - 1) \int_{-1}^1 \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\xi + P_1. \quad (20)$$

Выполняя вторую итерацию, подставляем давление (20) в третье уравнение (15), а затем, решая систему (15) с условиями (17), (18), получаем закон распределения давления в слое вязкой сжимаемой жидкости (газа) в щели:

$$P = \int_{\xi}^1 \int \left( 12 \frac{\partial W}{\partial \tau} - 144 \frac{Mo^2}{Wo^2} \left[ \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} d\xi d\xi \right] \right) d\xi d\xi +$$

$$+ \frac{\xi - 1}{2} \int_{-1}^1 \int \left( 12 \frac{\partial W}{\partial \tau} - 144 \frac{Mo^2}{Wo^2} \left[ \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} d\xi d\xi \right] \right) d\xi d\xi +$$

$$+ 6 \frac{Mo^2}{Wo^2} (\xi^2 - 1) \left( \frac{\xi - 3}{6} \int_{-1}^1 \int 12 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} d\xi d\xi + \frac{dP_1}{d\tau} \right) + P_1. \quad (21)$$

Подставляя (21) в правую часть уравнения (16) и записывая его в разном виде, получаем интегродифференциальное уравнение аэроупругих изгибных колебаний пластины на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой сжимаемой жидкости (газа):

$$\frac{D}{\ell^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \chi w + \beta w^3 + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= - \frac{\mu \ell^2}{\delta^3} \left[ \int_{\xi}^1 \int \left( 12 \frac{\partial w}{\partial t} - 144 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\xi \right] \right) d\xi d\xi + \right.$$

$$+ \frac{\xi - 1}{2} \int_{-1}^1 \int \left( 12 \frac{\partial w}{\partial t} - 144 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\xi \right] \right) d\xi d\xi +$$

$$+ 12 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} (\xi^2 - 1)(\xi - 3) \int_{-1}^1 \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\xi \left. \right] - 6 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} (\xi^2 - 1) \frac{dp_1}{dt} - p_1. \quad (22)$$

Соответствующие ему граничные условия (19) запишутся как  $w = \partial^2 w / \partial \xi^2 = 0$  при  $\xi = \mp 1$ .

Как следует из (22) (или (21)) учет сжимаемости приводит к появлению в правой части уравнений дополнительных членов, зависящих

от ускорения прогибов пластины, которые учитывают изменение плотности жидкости (газа) за счет деформации стенки канала. Появляется дополнительный член, зависящий от скорости изменения заданного закона пульсации давления в торцевых полостях. Этот член учитывает изменение плотности вязкой жидкости (газа) вдоль щели за счет пульсации давления на торцах канала. Все указанные дополнительные члены пропорциональны отношению квадратов чисел подобия рассматриваемой задачи  $Mo^2 / Wo^2$ . Отметим, что уравнение (22) допускает переход к частному случаю вязкой несжимаемой жидкости при  $c \rightarrow \infty$ , т. е.  $Mo^2 \rightarrow 0$ . Такой же переход возможен и в выражении для закона распределения давления (21). Если в (22) принять  $\beta = 0$ , то перейдем к частному случаю пластины, установленной на линейно-упругом основании Винклера.

**Основной аэроупругий отклик пластины и характеристика ее фазового сдвига.** Решим (22) методом Бубнова — Галеркина, выбирая в качестве базисных функций собственные функции задачи Штурма — Лиувилля при свободных колебаниях шарнирно опертой пластины:

$$w = w_m W = \sum_{k=1}^n R_k(t) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi. \quad (23)$$

Здесь  $n$  — число членов ряда (приближений);  $R_k(t)$  — искомые функции времени.

Учитывая (23) и раскладывая заданный на торцах закон пульсации давления  $p_1(\omega t)$  и член правой части (22) при производной закона по времени в ряд по базисным функциям, правую часть (22) запишем как

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu \ell^2}{\delta^3} \left[ \int_{\xi}^1 \int \left( 12 \frac{\partial w}{\partial t} - 144 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\xi \right] \right) d\xi d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{\xi-1}{2} \int_{-1}^1 \int \left( 12 \frac{\partial w}{\partial t} - 144 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} \left[ \int_{\xi}^1 \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\xi \right] \right) d\xi d\xi + \right. \\ & \left. + 12 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} (\xi^2 - 1)(\xi - 3) \int_{-1}^1 \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} d\xi d\xi \right] - 6 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} (\xi^2 - 1) \frac{dp_1}{dt} - p_1 = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4p_1}{(2k-1)\pi} - T_{gk} \frac{dp_1}{dt} \right) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + \\ & + \sum_{k=1}^n \left( M_{gk} \frac{d^2 R_k}{dt^2} - K_{gk} \frac{dR_k}{dt} \right) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi, \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 T_{gk} &= 24 \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} \left[ \frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^3 = 24 \frac{\mu \ell^2}{\delta^2 c^2 \rho_{g0}} \left[ \frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^3; \\
 M_{gk} &= 144 \frac{\mu \ell^2}{\delta^3} \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{1}{\theta} \left[ \frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^4 = 144 \frac{\mu^2 \ell^4}{\delta^5 c^2 \rho_{g0}} \left[ \frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^4; \\
 K_{gk} &= 12 \frac{\mu}{\delta \psi^2} \left[ \frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2 = 12 \frac{\mu \ell^2}{\delta^3} \left[ \frac{2}{(2k-1)\pi} \right]^2.
 \end{aligned} \quad (25)$$

Вследствие существенных демпфирующих свойств слоя вязкой сжимаемой жидкости (газа), заполняющей узкую щель, при установившихся колебаниях будет доминировать основная форма (тон) прогиба, так как амплитуды последующих форм (обертонов) подавляются силами вязкого трения [35, 36]. Поэтому ограничиваемся первым приближением по методу Бубнова — Галеркина и в результате получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 (\rho_0 h_0 - M_{g1}) \frac{d^2 R_1}{dt^2} + K_{g1} \frac{dR_1}{dt} + \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{D}{\ell^4} + \chi \right] R_1 + \frac{3}{4} \beta R_1^3 = \\
 = -\frac{4}{\pi} p_1(\omega t) + T_{g1} \frac{dp_1(\omega t)}{dt}.
 \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая заданный на торцах закон пульсации давления (1), перепишем (26) в виде

$$\begin{aligned}
 (\rho_0 h_0 - M_{g1}) \frac{d^2 R_1}{dt^2} + K_{g1} \frac{dR_1}{dt} + \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{D}{\ell^4} + \chi \right] R_1 + \frac{3}{4} \beta R_1^3 = \\
 = p_m \left( \frac{4}{\pi} \sin \omega t - T_{g1} \omega \cos \omega t \right) = p_m A(\omega) \sin(\omega t - \gamma(\omega)),
 \end{aligned} \quad (27)$$

где  $A(\omega) = \sqrt{(T_{g1}\omega)^2 + 16/\pi^2}$ ;  $\gamma(\omega) = \arctg(\pi T_{g1}\omega/4)$ .

Уравнение (27) представляет собой обобщенное уравнение Дуффинга и допускает переходы к случаям вязкой несжимаемой жидкости при  $M_{g1}=0, T_{g1}=0$  (т. е. при  $c \rightarrow \infty$ ) и линейно-упругого основания Винклера при  $\beta = 0$ . Отметим, что члены правой части (22), пропорциональные ускорению прогиба и учитывающие изменение плотности жидкости при деформации стенки канала, обуславливают изменение сил инерции в (27) (коэффициент  $M_{g1}$ ). Член правой части (22), пропорциональный скорости пульсации давления на торцах, определяет вторую составляющую возмущающей силы в (27). Таким образом, сжимаемость жидкости

(газа) по сравнению со случаем несжимаемой жидкости ( $T_{g1} = 0$ ,  $M_{g1} = 0$ ) приводит к появлению дополнительного фазового сдвига  $\gamma$  в возмущающем воздействии и уменьшению инерционных свойств исследуемой колебательной системы. Демпфирующие свойства колебательной системы, определяемые коэффициентом демпфирования  $K_{g1}$ , характеризуются вязкостью жидкости и геометрическими размерами канала как для сжимаемой жидкости (газа), так и для несжимаемой.

Решим (27) методом гармонического баланса [36, 37], рассматривая колебания на частоте вынуждающей силы, т. е. изучим одночленное разложение в ряд Фурье на этой частоте. В таком подходе рассмотрим колебания на основной частоте и учтем, как и в [36], что в области частот вынуждающей силы даже для уравнения Дуффинга без демпфирования последующий ненулевой член ряда Фурье, соответствующий утроенной частоте, значительно меньше первого. Другими словами, примем частоту изгибных колебаний пластины  $\theta \approx \omega$ , а искомую функцию представим в виде  $R_1 = R_m \sin(\omega t - \gamma)$ . В возмущающей силе учтем фазовый сдвиг  $\varphi$  за счет вязкости жидкости (газа) [36] и перепишем правую часть (27) как  $p_m A(\omega) \sin(\omega t - \gamma + \varphi)$ . В результате получим алгебраическую систему вида

$$\left[ \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi + \frac{9}{16} \beta R_m^2 - (\rho_0 h_0 - M_{g1}) \omega^2 \right] R_m = p_m A(\omega) \cos \varphi, \quad (28)$$

$$K_{g1} \omega R_m = p_m A(\omega) \sin \varphi.$$

Из (28) находим основной аэроупругий отклик пластины на нелинейно-упругом основании при ее взаимодействии с пульсирующим ползущим слоем вязкой сжимаемой жидкости (газа)

$$R_m = p_m \frac{\sqrt{(T_{g1} \omega)^2 + 16 / \pi^2} / (\rho_0 h_0 - M_{g1})}{\sqrt{(\omega_*^2 - \omega^2)^2 + (K_{g1} \omega / (\rho_0 h_0 - M_{g1}))^2}}, \quad (29)$$

и характеристику введенного фазового сдвига

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_{g1} \omega / (\rho_0 h_0 - M_{g1})}{\omega_*^2 - \omega^2}. \quad (30)$$

В выражениях (29), (30) введена так называемая скелетная характеристика (скелетная кривая) вида

$$\omega_*^2 = \left( \chi + (\pi / (2\ell))^4 D + \beta R_m^2 / 16 \right) / (\rho_0 h_0 - M_{g1}),$$

описывающая изменение основной собственной частоты пластины на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью, т. е. частно-

го случая рассматриваемой колебательной системы при исключении из рассмотрения вязкости жидкости (газа), когда  $K_{g1}=0$ . При  $\beta = 0$  (исключение кубической нелинейности реакции основания) скелетная характеристика совпадает с основной собственной частотой пластины на линейно-упругом основании Винклера.

Введем безразмерную частоту

$$\eta = \sqrt{\omega^2 (\rho_0 h_0 - M_{g1}) / (\chi + (\pi / (2\ell))^4 D)},$$

тогда характеристики (29), (30) представим в виде

$$R_m = \frac{\sqrt{16 / \pi^2 + (T_{g1} \eta)^2 (\chi + [\pi / (2\ell)]^4 D) / (\rho_0 h_0 - M_{g1}) / (\chi + (\pi / (2\ell))^4 D)}}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + S^2 \eta^2}},$$

(31)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S \eta}{\eta_*^2 - \eta^2}.$$

(32)

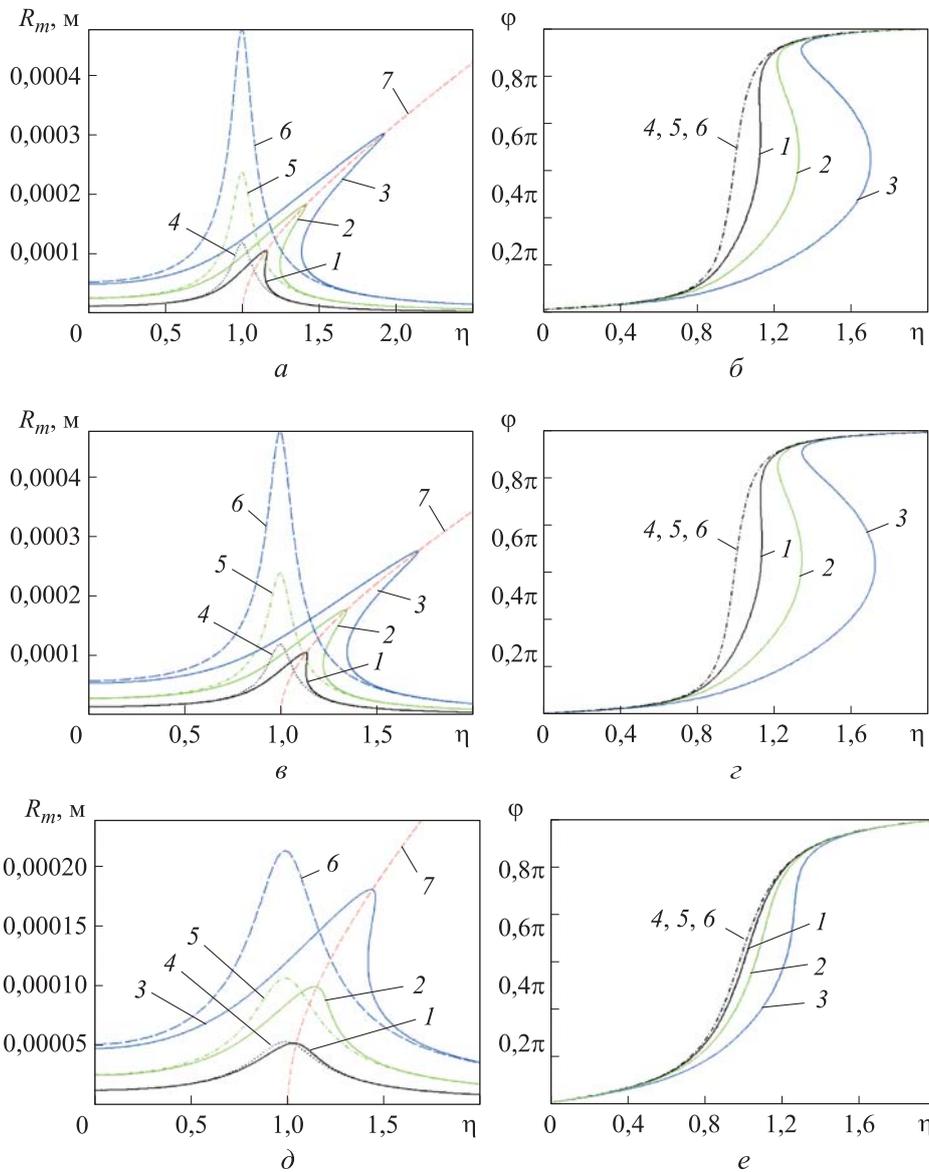
Здесь

$$\eta_*^2 = 1 + \frac{9}{16} \beta R_m^2 \left( \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi \right)^{-1}$$

— безразмерная скелетная характеристика;

$$S^2 = \frac{K_{g1}^2}{\rho_0 h_0 - M_{g1}} \left( \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^4 D + \chi \right)^{-1}.$$

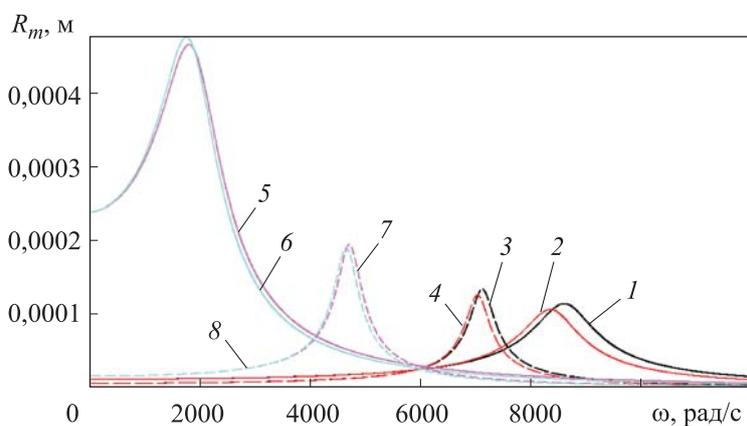
Если в характеристиках (29)–(32) принять  $M_{g1} = T_{g1} = 0$ , то перейдем к вязкой несжимаемой жидкости, а если  $\beta = 0$ , то имеем случай пластины на линейно-упругом основании Винклера. Если  $\beta = \chi = 0$ , то переходим к рассмотрению шарнирно опертой пластины, взаимодействующей со слоем сжимаемой (или несжимаемой при  $M_{g1} = T_{g1} = 0$ ) жидкости (газа). В случае нелинейно-упругого основания пластины ( $\beta \neq 0$ ) характеристики являются неявными функциями, поэтому использовать их напрямую затруднительно. Однако их можно исследовать численно. Приведем пример исследования аэроупругого отклика пластины и характеристики ее фазового сдвига при исходных данных:  $\ell = 0,1$  м;  $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$  м;  $\rho_{g0} = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 18,1 \cdot 10^{-6}$  Па · с;  $c = 290$  м/с;  $E = 7,3 \cdot 10^{10}$  Па;  $h_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  м;  $\mu_0 = 0,33$ ;  $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\chi = 9 \cdot 10^8$  Па/м;  $\beta = 5 \cdot 10^{16}$  Па/м<sup>3</sup>;  $p_m = 10^4$  Па.



**Рис. 2.** Основной аэроупругий отклик (а, в, д) и характеристики фазового сдвига (б, г, е) пластины:

а, б — взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой сжимаемой жидкости (газа) (толщина слоя  $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$  м, безразмерной частоте  $\eta = 1$  соответствует размерная частота  $\omega = 8640,71$  рад/с); в, г — взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости (газа) (толщина слоя  $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$  м, безразмерной частоте  $\eta = 1$  соответствует размерная частота  $\omega = 8397,32$  рад/с); д, е — взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой сжимаемой жидкости (газа) (уменьшенная толщина слоя  $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$  м, безразмерной частоте  $\eta = 1$  соответствует размерная частота  $\omega = 9594,95$  рад/с); 1, 2, 3 — пластина на нелинейно-упругом основании при  $p_m = 10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$  Па; 4, 5, 6 — пластина на линейно-упругом основании Винклера при  $p_m = 10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$  Па; 7 — скелетная кривая  $\eta$

Графики нелинейного и линейного (при  $\beta = 0$ ) аэроупругих откликов пластины и характеристики фазовых сдвигов, рассчитанных по (31), (32) при различной амплитуде пульсации давления в торцевых полостях  $p_m$ , приведены на рис. 2. Результаты расчетов для случая слоя вязкой сжимаемой жидкости (газа) показаны на рис. 2, а, б, для случая слоя вязкой несжимаемой жидкости — на рис. 2, в, г, для случая слоя вязкой сжимаемой жидкости при уменьшенном размере щели — на рис. 2, д, е. Характеристики линейного аэроупругого отклика шарнирно опертой пластины и шарнирно опертой пластины на линейно-упругом основании Винклера при значениях толщины пластины  $h_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  и  $12 \cdot 10^{-3}$  м представлены на рис. 3.



**Рис. 3.** Основные линейные аэроупругие отклики шарнирно опертой пластины на основании Винклера с учетом (1, 3) и без учета (2, 4) сжимаемости жидкости и шарнирно опертой пластины с учетом (5, 7) и без учета (6, 8) сжимаемости жидкости для  $h_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  и  $12 \cdot 10^{-3}$  м

**Заклучение.** Результаты исследования показали, что учет сжимаемости ползущего слоя вязкой жидкости уменьшает инерционные свойства рассматриваемой системы и приводит к дополнительному фазовому сдвигу в возмущающем воздействии (см. (27)). Численное исследование нелинейного и линейного аэроупругого откликов и характеристик фазового сдвига пластины показало, что сжимаемость жидкости обуславливает возрастание значений амплитуд изгибных колебаний пластины и увеличение значений ее резонансных частот по сравнению со случаем несжимаемой жидкости. Жесткая кубическая нелинейность основания проявляется в виде изгиба характеристик вправо, а также увеличением значений резонансных частот при возрастании амплитуд пульсации давления на торцах. Изгиб характе-

ристик соответствует зоне неустойчивых колебаний пластины со скачкообразным изменением амплитуд [30, 36]. Графики на рис. 2, д, е, показывают, что сокращение расстояния между стенками (толщины слоя жидкости) ведет к существенному уменьшению изгиба характеристик и, следовательно, к подавлению неустойчивых колебаний пластины. При переходе к линейно-упругому основанию Винклера ( $\beta = 0$ ) изгиб характеристик отсутствует, а кривые фазового сдвига для разных амплитуд пульсации давления на торцах канала совпадают (см. рис. 2). В этом случае резонансная частота не зависит от амплитуды пульсации давления на торцах канала. При исключении из рассмотрения упругого основания ( $\beta = \chi = 0$ ) также наблюдается незначительное увеличение значений резонансных частот, вызванное уменьшением инерционных свойств системы за счет сжимаемости жидкости (см. рис. 3). Увеличение толщины пластины приводит к возрастанию ее жесткости и дополнительному увеличению значений резонансных частот. Отметим, что на низких резонансных частотах (малая толщина пластины) амплитуды колебаний с учетом сжимаемости жидкости оказываются ниже, чем в случае несжимаемой жидкости. Это можно объяснить более сильным демпфированием сжимаемой жидкости на низких частотах. Увеличение толщины пластины на линейно-упругом основании Винклера приводит к снижению резонансных частот, что объясняется более значительным усилением инерционных свойств системы по сравнению с увеличением ее суммарной жесткости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т. и др. Аэрогидроупругость конструкций. М., ФИЗМАТЛИТ, 2000.
- [2] Païdoussis M.P., Price S.J., De Langre E. Fluid-structure interactions. Cambridge Univ. Press, 2011.
- [3] Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1920, vol. 98, iss. 690, pp. 205–216.  
DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
- [4] Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, iss. 7, pp. 743–761.  
DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
- [5] Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, vol. 1353, art. 01208.  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
- [6] Kheiri M., Païdoussis M.P., Costa Del Pozo G., et al. Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends. *J. Fluids Struct.*, 2014, vol. 49, pp. 360–385.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.11.023>

- [7] Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Покладова Ю.В. Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода. *Журнал Средне-волжского математического общества*, 2021, т. 23, № 1, с. 72–81.  
DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.72-81>
- [8] Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости. *Известия РАН. МЖГ*, 2016, № 6, с. 108–120.  
DOI: <https://doi.org/10.7868/S0568528116060049>
- [9] Александров А.А., Ларионов В.И., Юзefович А.В. и др. Математическая постановка и численное решение задачи о пространственном изгибе трубопровода в сложных геологических условиях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3 (46), с. 100–108. EDN: PBZHQZ
- [10] Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M. Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 12, pp. 4269–4292. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1922-4>
- [11] Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V. Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid. *Ocean Eng.*, 2020, vol. 206, art. 10734. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107341>
- [12] Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, iss. 1-2, pp. 332–339.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
- [13] Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 1955, vol. 127, iss. 3, pp. 553–563. DOI: <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276>
- [14] Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler — Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, iss. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.12.003>
- [15] Velmisoв P.A., Ankilov A.V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid. *Cybernetics and Physics*, 2017, vol. 6, no. 4, pp. 269–277. EDN: BHTMGF
- [16] Hosseini-Hashemi S., Arpanahi R.A., Rahmanian S., et al. Free vibration analysis of nano-plate in viscous fluid medium using nonlocal elasticity. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2019, vol. 74, pp. 440–448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.002>
- [17] Шевцова Е.В. Газовое демпфирование в микромеханических приборах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2006, № 2 (63), с. 100–111. EDN: HTXJKV
- [18] Турчак Л.И., Шидловский В.П. Математическое моделирование проблем газовой смазки. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2011, т. 51, № 2, с. 329–348. EDN: NDJSSH
- [19] Редер Т., Тененев В.А., Чернова А.А. Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана. *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2020, № 68, с. 141–157.  
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/68/13>

- [20] Tulchinsky A., Gat A.D. Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters. *J. Sound Vib.*, 2019, vol. 438, pp. 83–98. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.08.047>
- [21] Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия пульсирующей вязкой жидкости со стенками щелевого канала, установленного на упругом основании. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2017, № 1, с. 15–23. EDN: YKВAMH
- [22] Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. и др. Моделирование волновых процессов в двух оболочках с жидкостью между ними и окруженных упругой средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 6 (81), с. 4–17. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-4-17>
- [23] Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. и др. Математическое моделирование нелинейных колебаний стенки канала, взаимодействующей с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2022, № 2 (139), с. 26–41. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-2-26-41>
- [24] Barulina M., Santo L., Popov V., et al. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 20, art. 3844. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10203844>
- [25] Кондратов Д.В., Кондратова Т.С., Попов В.С. и др. Моделирование гидроупругого отклика пластины, установленной на нелинейно-упругом основании и взаимодействующей с пульсирующим слоем жидкости. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2023, т. 15, № 3, с. 581–597. DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-3-581-597>
- [26] Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск, ПГАСА, 2010.
- [27] Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Известия РАН. МТТ*, 2021, № 4, с. 3–17. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921030041>
- [28] Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М., Машиностроение, 1968.
- [29] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Дрофа, 2003.
- [30] Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. Wiley, 1979.
- [31] Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л., ЛГУ, 1978.
- [32] Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Царев И.С. Эволюция квазигармонических изгибных волн в балке, лежащей на обобщенном нелинейно-упругом основании, и возможность их трансформации в последовательность волновых пакетов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2023, № 2 (107), с. 83–97. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97>
- [33] Попов В.С., Могилевич Л.И., Попова А.А. Колебания стенки канала на нелинейно-упругом подвесе под воздействием пульсирующего слоя вязкого газа, находящегося в канале. *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*, 2023, т. 66, № 10, с. 821–834. EDN: MYGLAK

- [34] Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. Parabolic Press, 1975.
- [35] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., Наука, 1967.
- [36] Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М., Наука, 1991.
- [37] Krack M., Gross J. Harmonic balance for nonlinear vibration problems. In: *Mathematical Engineering*. Cham, Springer, 2019.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>

**Попов Виктор Сергеевич** — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77); главный научный сотрудник ИПТМУ РАН (Российская Федерация, 410028, Саратов, ул. Рабочая, д. 24).

**Попова Анна Александровна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия пульсирующего слоя вязкой сжимаемой жидкости с пластиной на нелинейно-упругом основании. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 3 (114), с. 45–69.  
EDN: PNHPPGG

**DYNAMICS OF THE VISCOUS COMPRESSIBLE LIQUID  
PULSATING LAYER INTERACTION WITH A PLATE RESTING  
ON THE NONLINEAR ELASTIC BASE**

V.S. Popov<sup>1,2</sup>

vic\_p@bk.ru

A.A. Popova<sup>1</sup>

anay\_p@bk.ru

<sup>1</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for Precision Mechanics and Control Problems,  
Russian Academy of Sciences, Saratov, Russian Federation

---

**Abstract**

The paper proposes a mathematical model of the viscous compressible liquid (gas) pulsating layer interaction with a plate mounted on the elastic base with rigid cubic nonlinearity. The plate is the lower wall of a narrow flat channel, which upper wall is assumed rigid. The case of an isothermal state is considered, where a given law of pressure alteration at the channel ends causes liquid pulsation. The model includes the Navier —

**Keywords**

*Nonlinear oscillations, plate, nonlinear elastic base, compressible viscous liquid, aeroelasticity, perturbation method, generalized Duffing equation*

Stokes equations for viscous compressible liquid, continuity equation, equation of the barotropic medium state, equation of the Kirchhoff-type plate dynamics, boundary conditions at the dissimilar media and channel ends contact boundaries. The model asymptotic analysis is carried out using the perturbation method, and linearized equations are obtained for dynamics of the compressible viscous liquid thin layer. Using the iteration method, pressure distribution in the liquid layer is found. As a result, an integro-differential equation of flexural aeroelastic oscillations for a plate on the nonlinear elastic base is obtained. Based on the solution to this equation by the Bubnov — Galerkin method, a generalized Duffing equation is obtained. It follows from the equation that liquid compressibility leads to a decrease in the inertial properties of the system under consideration and to the phase delay in the perturbing force. Using the harmonic balance method, the plate main aeroelastic response and its phase shift nonlinear characteristics are determined. Numerical study of these characteristics shows that accounting for the liquid compressibility leads to an increase in the plate resonant frequency and the oscillation amplitude values. The paper shows a possibility of suppressing the plate unstable oscillations with abrupt alteration in its deflection amplitudes by changing the liquid layer thickness

Received 18.09.2023

Accepted 06.12.2023

© Author(s), 2024

*The study was funded by Russian Science Foundation (project no. 23-29-00159, <https://rscf.ru/project/23-29-00159/>)*

## REFERENCES

- [1] Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., et al. Aerogidrouprugost konstruktiv [Aerohydroelasticity of structures]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2000.
- [2] Paidoussis M.P., Price S.J., De Langre E. Fluid-structure interactions. Cambridge Univ. Press, 2011.
- [3] Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1920, vol. 98, iss. 690, pp. 205–216.  
DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
- [4] Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, iss. 7, pp. 743–761.  
DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
- [5] Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, vol. 1353, art. 01208.  
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>

- [6] Kheiri M., Païdoussis M.P., Costa Del Pozo G., et al. Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends. *J. Fluids Struct.*, 2014, vol. 49, pp. 360–385. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.11.023>
- [7] Velmisov P.A., Tamarova Yu.A., Pokladova Yu.V. Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle Volga Mathematical Society Journal], 2021, vol. 23, iss. 1, pp. 72–81 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.72-81>
- [8] Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821–833. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462816060132>
- [9] Aleksandrov A.A., Larionov V.I., Yuzefovich A.V., et al. Mathematical statement and numerical solving of a problem on three-dimensional pipeline bend under complex geological conditions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2012, no. 3 (46), pp. 100–108 (in Russ.). EDN: PBZHQZ
- [10] Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M. Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 12, pp. 4269–4292. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1922-4>
- [11] Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V. Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid. *Ocean Eng.*, 2020, vol. 206, art. 10734. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107341>
- [12] Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, iss. 1-2, pp. 332–339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
- [13] Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 1955, vol. 127, iss. 3, pp. 553–563. DOI: <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276>
- [14] Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler — Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, iss. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.12.003>
- [15] Velmisov P.A., Ankilov A.V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid. *Cybernetics and Physics*, 2017, vol. 6, no. 4, pp. 269–277. EDN: BHTMGF
- [16] Hosseini-Hashemi S., Arpanahi R.A., Rahmanian S., et al. Free vibration analysis of nano-plate in viscous fluid medium using nonlocal elasticity. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 2019, vol. 74, pp. 440–448. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.002>
- [17] Shevtsova E.V. Gas damping in micromechanical instruments. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2006, no. 2 (63), pp. 100–111 (in Russ.). EDN: HTXJKV
- [18] Turchak L.I., Shidlovskii V.P. Mathematical modeling of gas lubrication problems. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 308–325. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542511020151>
- [19] Reder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of unstable safety valve modes. *Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State Universi-

- ty Journal of Mathematics and Mechanics], 2020, no. 68, pp. 141–157 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/68/13>
- [20] Tulchinsky A., Gat A.D. Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters. *J. Sound Vib.*, 2019, vol. 438, pp. 83–98. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.08.047>
- [21] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 1, pp. 12–19. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618817010113>
- [22] Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., et al. Simulating wave processes in two shells separated by liquid and surrounded by an elastic medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 6 (81), pp. 4–17 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-4-17>
- [23] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., et al. Mathematical simulation of nonlinear vibrations of a channel wall interacting with a vibrating die via viscous liquid layer. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2022, no. 2 (139), pp. 26–41 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-2-26-41>
- [24] Barulina M., Santo L., Popov V., et al. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 20, art. 3844. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10203844>
- [25] Kondratov D.V., Kondratova T.S., Popov V.S., et al. Modelling hydroelastic response of a plate resting on a nonlinear foundation and interacting with a pulsating fluid layer. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2023, vol. 15, no. 3, pp. 581–597 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-3-581-597>
- [26] Andrianov I.V., Danishevskiy V.V., Ivankov A.O. Asimptoticheskie metody v teorii kolebaniy balok i plastin [Asymptotic methods in the theory of beams and plates vibrations]. Dnepropetrovsk, PSASA Publ., 2010.
- [27] Erofeev V.I., Leontieva A.V. Dispersion and spatial localization of bending waves propagating in a Timoshenko beam laying on a nonlinear elastic base. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 443–454. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421040051>
- [28] Konstantinesku V.N. Gazovaya smazka [Gas lubrication]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968.
- [29] Loytsyanskiy L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003.
- [30] Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. Wiley, 1979.
- [31] Vallander S.V. Lektsii po gidroaeromekhanike [Lectures on hydroaeromechanics]. Leningrad, LSU Publ., 1978.
- [32] Erofeev V.I., Morozov A.N., Tsarev I.S. Quasi-harmonic bending waves evolution in a beam lying on the generalized nonlinear-elastic foundation and possibility of their transformation into a sequence of wave packets. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2023, no. 2 (107), pp. 83–97 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2023-2-83-97>

[33] Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Oscillations of the channel wall on a non-linear-elastic suspension due to the interaction with a pulsating layer of viscous gas in the channel. *Radiofizika*, 2023, vol. 66, no. 10, pp. 821–834 (in Russ.). EDN: MYGLAK

[34] Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. Parabolic Press, 1975.

[35] Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Ustoychivost i kolebaniya uprugikh system [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967.

[36] Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1991.

[37] Krack M., Gross J. Harmonic balance for nonlinear vibration problems. In: *Mathematical Engineering*. Cham, Springer, 2019.

DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>

**Popov V.S.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnicheskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Chief Researcher, Laboratory for Analysis and Synthesis of Dynamical Systems in Precision Mechanics, Institute for Precision Mechanics and Control Problems, Russian Academy of Sciences (Rabochaya ul. 24, Saratov, 410028 Russian Federation).

**Popova A.A.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnicheskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Popov V.S., Popova A.A. Dynamics of the viscous compressible liquid pulsating layer interaction with a plate resting on the nonlinear elastic base. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 3 (114), pp. 45–69 (in Russ.). EDN: PHHPGG