

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЯКОБИ НЕЛИНЕЙНОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА И ЕГО ТРАЕКТОРИИ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

П.М. Шкапов

В.Д. Сулимов

М.А. Данич

spm@bmstu.ru

sulimov@bmstu.ru

fn3@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены задачи анализа устойчивости по Якоби динамической системы — нелинейного двойного маятника. На основе теории Косамби — Картана — Черна введено геометрическое описание эволюции системы во времени, что позволяет определить пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта, называемого тензором кривизны отклонения, дают оценку устойчивости системы по Якоби. Подобное исследование актуально в приложениях, где требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби. Исследованы особенности эволюции во времени системы, состоящей из соединенных последовательно двух одинаковых математических маятников. Представлена зависимость собственных значений тензора кривизны отклонения от начальных условий. При интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений движения использована вычислительная среда *MATLAB*. Определена зависимость характера поведения системы — регулярное движение или глобальный хаос — от начальных условий. Регулярное или хаотическое поведение системы, представленное в конфигурационном пространстве, характеризуется изменением обобщенных координат и собственных значений тензора кривизны отклонения. Приведены примеры видов траекторий системы в конфигурационном пространстве в зависимости от начальных условий. Показана эффективность реализованного подхода для определения устойчивости системы по Якоби

Ключевые слова

Динамическая система, устойчивость по Якоби, теория Косамби — Картана — Черна, геометрический инвариант, нелинейный двойной маятник, конфигурационное пространство, глобальный хаос

Поступила 17.10.2023

Принята 22.12.2023

© Автор(ы), 2024

Введение. В многочисленных приложениях при исследовании устойчивости динамических систем используют метод Ляпунова [1]. Полученные результаты могут быть существенно дополнены анализом устойчивости систем по Якоби, основанным на применении теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ) [2–4]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. Геометрическое описание, вводимое в рамках теории ККЧ, позволяет определить пять геометрических инвариантов системы. Собственные значения второго инварианта, называемого тензором кривизны отклонения, устанавливают оценку устойчивости системы по Якоби. Анализ устойчивости по Якоби связан с изучением робастности исследуемой системы как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды [2]. Применение теории ККЧ необходимо в практических приложениях, где требуется идентифицировать области, в которых одновременно существуют устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Подход на основе теории ККЧ актуален при исследовании детерминированных нелинейных динамических систем, способных демонстрировать хаотическое поведение: здесь наиболее ранним примером является система Лоренца [5]. Основные положения современной теории детерминированного хаоса представлены, например, в [6]. Следует отметить сложность определения критерия, характеризующего переход детерминированной нелинейной системы от регулярного поведения к хаотическому [7, 8]. Одним из простейших и вместе с тем содержательных объектов исследований в рассматриваемом контексте является нелинейный двойной маятник [9, 10]. Влияние начальных условий на характер поведения нелинейного двойного маятника (движение регулярное или хаотическое) проанализировано в [11, 12]. Некоторые вопросы, связанные с повышением точности математического моделирования динамических систем с хаотическим поведением на основе экспериментальных данных, рассмотрены в [13]. Результаты аналитического, численного (включая определение экспонент Ляпунова) и экспериментального исследований двойного маятника приведены в [14]. Существенные результаты представлены в [15], где установлено, что граница устойчивости системы по Якоби совпадает с границей перехода от регулярного поведения к глобальному хаосу. Кроме того, в [15] доказаны условия устойчивости системы по Якоби с использованием ограничений, наложенных на обобщенные координаты. Ос-

нованному на теории ККЧ исследованию устойчивости по Якоби обобщенной системы Хопфа — Лэнгфорда посвящена работа [16]. В рамках теории ККЧ классическая обратная задача на собственные значения тензоров [17] может быть сформулирована для тензоров кривизны отклонения динамических систем. Примеры постановки и численного решения таких задач, связанных с коррекцией математических моделей и вычислительной диагностикой динамических систем, представлены в [18, 19]. Некоторые особенности анализа устойчивости по Якоби в контексте задачи восстановления параметров двойного маятника с учетом демпфирования приведены в [20].

Цель работы — привести результаты анализа устойчивости по Якоби динамической системы — нелинейного плоского двойного маятника, составленного из двух последовательно соединенных одинаковых математических маятников. *Задачи работы* — исследование зависимости устойчивости системы по Якоби и эволюции системы во времени от начальных условий, построение интегральных кривых в конфигурационном пространстве, соответствующих регулярному и хаотическому движению. Дифференциальные уравнения движения системы получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа. Реализуемый подход основан на применении в рамках теории ККЧ методов определения геометрических структур и геометрических инвариантов, методов анализа устойчивости системы по Якоби, методов численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с реализацией в вычислительной среде *MATLAB*.

Геометрические структуры теории Косамби — Каргана — Черна. Рассмотрим открытое связное подмножество Ω евклидова $(2n+1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ [3, 4]. Далее на Ω вводим $(2n+1)$ -мерную локальную систему координат (x^i, y^i, t) , $i = 1, 2, \dots, n$, где $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y^i = (y^1, y^2, \dots, y^n)$,

$$y^i = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right),$$

t — время.

Во многих случаях уравнения движения динамической системы могут быть получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = F_i, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где F_i , $i=1, 2, \dots, n$ — внешние силы (для механических систем). Если функция Лагранжа L является регулярной, то уравнения (1) эквивалентны системе обыкновенных (нелинейных в общем случае) дифференциальных уравнений второго порядка [3, 4]:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i(x^i, y^i, t) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2)$$

Здесь $G^i(x^i, y^i, t)$ — функции, имеющие класс гладкости C^∞ в окрестности заданных на Ω начальных условий $((x)_0, (y)_0, t_0)$. Существенно, что для произвольной системы дифференциальных уравнений второго порядка вида (2) возможно изучение траекторий этой системы по аналогии с траекториями (интегральными кривыми) уравнений Эйлера — Лагранжа [3].

В рамках теории ККЧ для несингулярных преобразований координат ковариантная производная векторного поля $\xi = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ на Ω определяется так [3, 4]:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N_j^i \xi^j,$$

где $N_j^i = \partial G^i / \partial y^j$ — локальные коэффициенты нелинейной связности. Тогда подстановкой $y^i = \xi^i$ может быть получен первый геометрический инвариант: $\varepsilon^i = -N_j^i y^j + 2G^i$.

Варьирование траекторий $x^i(t)$ уравнений (2) относительно ближайших траекторий приводит к следующему уравнению в ковариантной форме [3, 4]:

$$\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j. \quad (3)$$

Второй геометрический инвариант, также называемый тензором кривизны отклонения (deviation curvature tensor), определяется в виде

$$P_j^i = -2 \frac{\partial G^i}{\partial x^j} - 2G^i G_{jk}^i + y^i \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} + N_k^i N_j^k, \quad (4)$$

где $G_{jk}^i = \partial^2 G^i / (\partial y^j \partial y^k)$ — локальные коэффициенты связности Бервальда. Уравнение (3) называется уравнением Якоби. Третий, четвертый и пятый геометрические инварианты, определяемые в рамках теории ККЧ,

называются тензором кручения, тензором кривизны Римана — Кристоффеля и тензором Дугласа соответственно.

Определение [3]. Траектории системы дифференциальных уравнений (2) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора P_j^i всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби в противном случае.

Дифференциальные уравнения движения и анализ устойчивости системы по Якоби. Рассмотрена динамическая система — нелинейный двойной маятник, движущийся в вертикальной плоскости (рис. 1).

Система состоит из двух математических маятников, сочлененных плоским шарниром. Каждый математический маятник представляет собой безмассовый жесткий стержень, несущий на свободном конце материальную точку. Параметры первого маятника: длина $OA = l_1$ и масса m_1 , второго — $AB = l_2$ и m_2 . Для описания движения системы введены две обобщенные координаты: угол отклонения θ_1 первого стержня от вертикальной оси, проходящей через неподвижный шарнир O ; угол отклонения θ_2 второго стержня от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир A , сочленяющий маятники.

Рассмотрен частный случай системы: предположено, что $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$. Тогда дифференциальные уравнения движения нелинейного двойного маятника имеют вид

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{1}{\alpha} [\sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + 2\gamma \sin \theta_1 - \gamma \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)], \quad (5)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\alpha} [2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + 2\gamma \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2\gamma \sin \theta_2], \quad (6)$$

где $\gamma = g/l$; $\alpha = 2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)$.

Геометрические структуры системы определяются на основе теории ККЧ из дифференциальных уравнений движения (5), (6). В соответствии с (4) собственные значения тензора P_j^i могут быть представлены в виде:

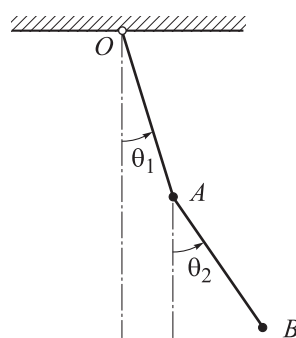


Рис. 1. Нелинейный двойной маятник

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad (7)$$

при этом [15]

$$\tau = -\frac{2}{[-2 + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \{2\gamma \cos \theta_1 [1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \cos(\theta_1 - \theta_2) [2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]\}, \quad (8)$$

$$\Delta = -\frac{\gamma \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) [2\dot{\theta}_1^2 + 2\gamma \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{[-2 + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]^3}. \quad (9)$$

Для траекторий рассматриваемой системы в конфигурационном пространстве доказана следующая теорема [15].

Теорема. В случае, когда длины стержней и массы математических маятников как составных частей двойного маятника равны, условия устойчивости по Якоби двойного маятника определяются неравенствами $-90^\circ < \theta_1 < 90^\circ$ и $-90^\circ < \theta_1 - \theta_2 < 90^\circ$. Траектории, лежащие вне этой области, неустойчивы по Якоби.

Здесь и далее для лучшего восприятия полученных результатов значения углов отклонения маятников приведены в градусах.

На основании (7)–(9) исследовано влияние начальных условий на устойчивость нелинейного двойного маятника по Якоби. Установленная зависимость собственных значений λ_1 и λ_2 тензора P_j^i от начальных условий $\theta_1(0) = \theta_0 = 45^\circ$, $\theta_2(0) = \text{var}$ при $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ в диапазоне $0 \leq \theta_2(0) \leq 180^\circ$ приведена на рис. 2.

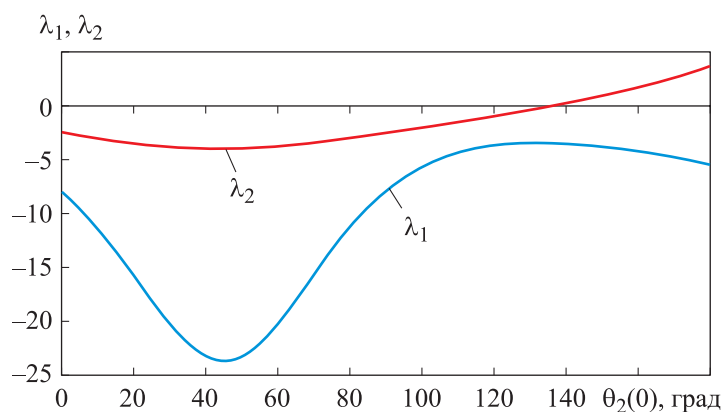


Рис. 2. Зависимость собственных значений λ_1 и λ_2 тензора P_j^i от начальных условий

Этот подход позволяет определить оценку сверху для границы между областями устойчивости и неустойчивости системы по Якоби. Так, если $135^\circ \leq \theta_2(0) \leq 180^\circ$, то $\lambda_2 \geq 0$ и одновременно не выполнены условия теоремы. Таким образом, система гарантированно (согласно определению и на основании теоремы) неустойчива по Якоби и ее движение является хаотическим. Существенно, что указанные условия определены только для одной точки траектории системы, соответствующей рассматриваемым начальным условиям: имеет место неустойчивость по Якоби в указанной точке, следовательно, целая траектория неустойчива по Якоби. Если $0 \leq \theta_2(0) < 135^\circ$, то $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, а также выполнены условия теоремы $-90^\circ < \theta_1(0) < 90^\circ$ и $-90^\circ < \theta_1 - \theta_2 < 90^\circ$: следовательно, для всех траекторий в точках, соответствующих указанным начальным условиям, имеет место устойчивость по Якоби. Однако при эволюции системы во времени в других точках траекторий, не соответствующих рассматриваемым начальным условиям, условия устойчивости по Якоби могут быть нарушены.

Необходимы дополнительные исследования системы, связанные с построением и анализом интегральных кривых в конфигурационном пространстве. Это позволяет уточнить зависящую от начальных условий границу между областями устойчивости и неустойчивости системы по Якоби.

Примеры построения траекторий в конфигурационном пространстве. В рамках решения рассматриваемой задачи при $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \text{var}$ выполнено построение интегральных кривых в конфигурационном пространстве, т. е. определены зависимости вида $\theta_1(\theta_2)$, где исключено время. Именно такой вид отображения решений дает наилучшее представление о поведении двойного маятника при различных начальных условиях в рамках анализа устойчивости по Якоби. Для получения решения системы дифференциальных уравнений (5), (6) методом Рунге — Кутты 4-го порядка использована среда программирования *MATLAB*. Интегрирование реализовано в диапазоне значений времени $0 \dots 50$ с. Шаг интегрирования $h = 5 \cdot 10^{-5}$ с. Метод имеет общую погрешность $O(h^4)$ и локальную погрешность $O(h^5)$.

В расчетах принято $m_1 = m_2 = 1$ кг; $l = 1$ м. В *примере 1* начальные условия заданы в виде $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 15^\circ$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. При таких относительно малых колебаниях интегральная кривая в конфигурационном пространстве показана на рис. 3, а.

Интегральная кривая вписывается в некий близкий к прямоугольнику параллелограмм. Следует отметить, что решение на основе линеаризованной модели для этого случая дает интегральную кривую, лежащую

на отрезке прямой, симметричном относительно начала координат, что соответствует первой форме малых колебаний при одинаковых начальных углах отклонения.

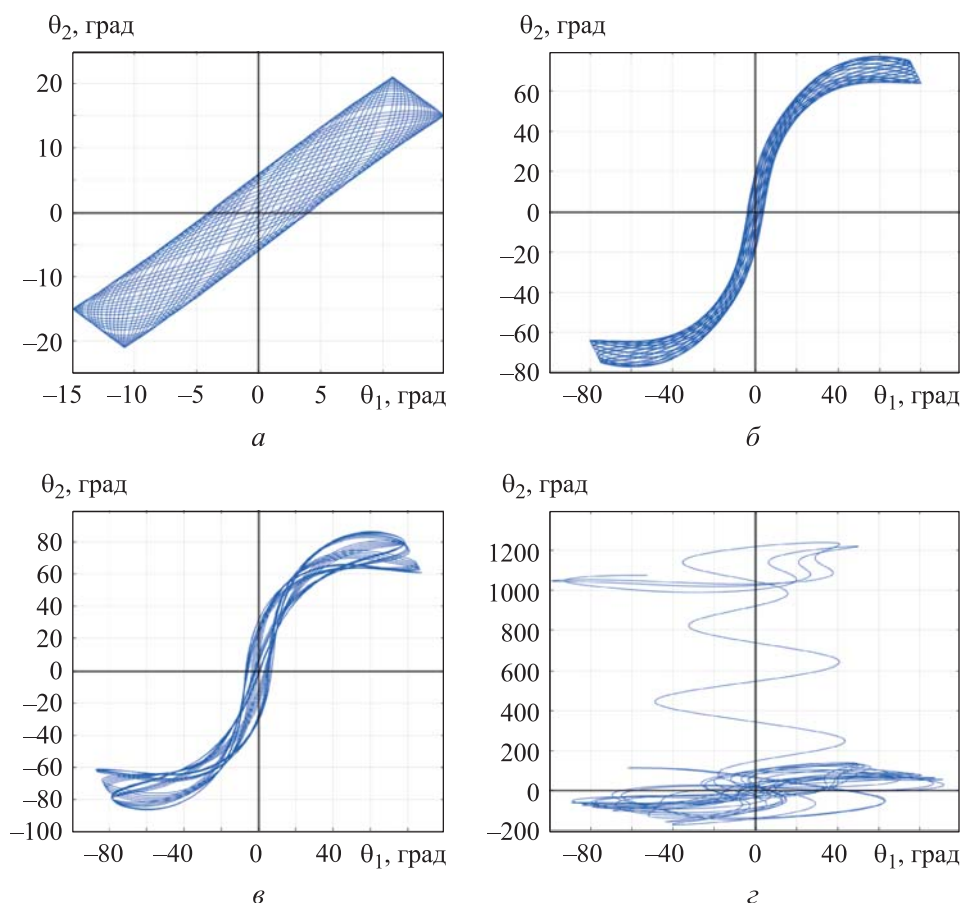


Рис. 3. Интегральные кривые для примеров 1 (а), 2 (б), 3 (в) и 4 (з)

Нелинейная модель при увеличении начальных значений $\theta_1(0)$ и $\theta_2(0)$ приводит к большему искажению области изменения интегральных кривых. Так, на рис. 3, б представлена интегральная кривая для *примера 2*, рассчитанная при $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 75^\circ$.

Сравнение кривых на рис. 3, а и б позволяет отметить существенное искажение области локализации интегральной кривой с увеличением начальных углов отклонения.

Для *примера 3* при начальных значениях $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 79^\circ$ (несколько ближе к границе устойчивости) становится заметно расслоение области локализации интегральной кривой в конфигурационном пространстве (рис. 3, в).

В *примере 4* значения начальных углов отклонения принимаются из области неустойчивости системы по Якоби: $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 80^\circ$ (рис. 3, з). Движение системы соответствует хаотическому поведению, проявляющемуся в нарастании текущих значений обобщенных координат, а также разрушению области локализации интегральной кривой в конфигурационном пространстве.

Последовательно сужая диапазон изменения начальных углов отклонения маятников, можно уточнить результат [15], где для рассматриваемой здесь системы в случае начальных условий $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ и $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ указанная граница заключена между значениями $\theta_0 = 79,1^\circ$ (регулярное движение) и $\theta_0 = 79,2^\circ$ (глобальный хаос).

Выводы. Исследована устойчивость по Якоби динамической системы — нелинейного плоского двойного маятника. Для системы на основе теории ККЧ определены собственные значения тензора кривизны отклонения. Для частного случая системы, составленной из двух одинаковых математических маятников, представлены дифференциальные уравнения движения и установлена зависимость указанных собственных значений от начальных условий. Определена оценка сверху для границы между областями устойчивости и неустойчивости системы по Якоби. Уточнение полученной оценки и, следовательно, определение условий перехода системы от регулярного поведения к хаотическому связаны с интегрированием дифференциальных уравнений движения и анализом траекторий системы в конфигурационном пространстве. Приведенные примеры показывают эффективность реализованного подхода для исследования устойчивости системы по Якоби в зависимости от начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
- [2] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *JDSGT*, 2012, vol. 10, iss. 1, pp. 13–32. DOI: <https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698604>
- [3] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196. DOI: <https://dx.doi.org/10.4310/ATMP.2012.v16.n4.a2>
- [4] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi — Cartan — Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2016, vol. 13, no. 2, art. 1650014. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>

- [5] Lorenz E.I. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [6] Cattani M., Caldas I.L., de Souza S.L., et al. Deterministic chaos theory: basic concepts. *Rev. Bras. de Ensino de Fis.*, 2017, vol. 39, no. 1, art. e1309. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0185>
- [7] Velarde C., Robledo A. Manifestations of the onset of chaos in condensed matter and complex systems. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2018, vol. 227, no. 5-6, pp. 645–660. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-00128-9>
- [8] Wang F., Liu T., Kuznetsov N.V., et al. Jacobi stability analysis and the onset of chaos in a two-degree-of-freedom mechanical system. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2021, vol. 31, no. 5, art. 2150075. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127421500759>
- [9] Levien R.B., Tan S.M. Double pendulum: an experiment in chaos. *Am. J. Phys.*, 1993, vol. 61, iss. 11, pp. 1038–1044. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.17335>
- [10] Liang Y., Feeny B.F. Parametric identification of a chaotic base-excited double pendulum experiment. *Nonlinear Dyn.*, 2008, vol. 52, no. 1-2, pp. 181–197. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-007-9270-x>
- [11] Fuentes M.A., Sato Y., Tsallis C. Sensitivity to initial conditions, entropy production, and escape rate at the onset of chaos. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 33, pp. 2988–2991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.06.039>
- [12] Yao Y. Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1437, art. 012093. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1437/1/012093>
- [13] Watson P.A.G. Applying machine learning to improve simulations of a chaotic dynamical system using empirical error correction. *JAMES*, 2019, vol. 11, iss. 5, pp. 1402–1417. DOI: <https://doi.org/10.1029/2018MS001597>
- [14] D’Alessio S. An analytical, numerical and experimental study of the double pendulum. *Eur. J. Phys.*, 2023, vol. 44, no. 1, art. 015002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac986b>
- [15] Oiwa S., Yajima T. Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2017, vol. 14, no. 12, art. 1750176. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887817501766>
- [16] Monteanu F., Grin A., Musafirov E., et al. About the Jacobi stability of a generalized Hopf — Langford system through the Kosambi — Cartan — Chern geometric theory. *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 3, art. 598. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15030598>
- [17] Ye K., Hu S. Inverse eigenvalue problem for tensors. *Commun. Math. Sci.*, 2017, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1649. DOI: <https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2017.v15.n6.a7>
- [18] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 468, art. 012040. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012040>

[19] Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 40–56.

DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>

[20] Сулимов А.В. Анализ устойчивости по Якоби и восстановление параметров двойного маятника с демпфированием. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, № 7. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2287>

Шкапов Павел Михайлович — д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Теоретическая механика им. проф. Н.Е. Жуковского» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Сулимов Валерий Дмитриевич — старший преподаватель кафедры «Теоретическая механика им. проф. Н.Е. Жуковского» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Данич Максим Алексеевич — аспирант кафедры «Теоретическая механика им. проф. Н.Е. Жуковского» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Шкапов П.М., Сулимов В.Д., Данич М.А. Устойчивость по Якоби нелинейного двойного маятника и его траектории в конфигурационном пространстве. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 4 (115), с. 21–34. EDN: UPBGEX

JACOBI STABILITY OF THE NONLINEAR DOUBLE PENDULUM AND ITS TRAJECTORIES IN THE CONFIGURATION SPACE

P.M. Shkapov

spm@bmstu.ru

V.D. Sulimov

sulimov@bmstu.ru

M.A. Danich

fn3@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers problems of the Jacobi stability analysis in regard to a dynamic system, i.e., the nonlinear double pendulum. Based on the Kosambi — Cartan — Chern theory, it introduces geometric description of the system evolution in time making it possible to determine the five geometric invariants. Eigenvalues of the second invariant called the deviation

Keywords

Dynamical system, Jacobi stability, Kosambi — Cartan — Chern theory, geometric invariant, nonlinear double pendulum, configuration space, global chaos

curvature tensor and provide an estimate of the system Jacobi stability. Such research is relevant in applications, where it is necessary to identify regions with the Lyapunov stability and the Jacobi stability appearing simultaneously. The paper investigates the in-time evolution of a system consisting of two identical mathematical pendulums connected in series. The deviation curvature tensor eigenvalues dependence on the initial conditions is presented. The *MATLAB* computing environment was used in integrating the motion nonlinear differential equations. Dependence of the behavior nature of the regular motion or global chaos system on the initial conditions is determined. The system regular or chaotic behavior is represented in the configuration space and is characterized by alterations in the generalized coordinates and in the deflection curvature tensor eigenvalues. Examples are provided of the system trajectory types in the configuration space depending on the initial conditions. The paper demonstrates effectiveness of the implemented approach in determination of the system Jacobi stability

Received 17.10.2023

Accepted 22.12.2023

© Author(s), 2024

REFERENCES

- [1] Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
- [2] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *JDSGT*, 2012, vol. 10, iss. 1, pp. 13–32. DOI: <https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698604>
- [3] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196. DOI: <https://dx.doi.org/10.4310/ATMP.2012.v16.n4.a2>
- [4] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi — Cartan — Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2016, vol. 13, no. 2, art. 1650014. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>
- [5] Lorenz E.I. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [6] Cattani M., Caldas I.L., de Souza S.L., et al. Deterministic chaos theory: basic concepts. *Rev. Bras. de Ensino de Fis.*, 2017, vol. 39, no. 1, art. e1309. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0185>
- [7] Velarde C., Robledo A. Manifestations of the onset of chaos in condensed matter and complex systems. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2018, vol. 227, no. 5-6, pp. 645–660. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-00128-9>

- [8] Wang F., Liu T., Kuznetsov N.V., et al. Jacobi stability analysis and the onset of chaos in a two-degree-of-freedom mechanical system. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2021, vol. 31, no. 5, art. 2150075. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127421500759>
- [9] Levien R.B., Tan S.M. Double pendulum: an experiment in chaos. *Am. J. Phys.*, 1993, vol. 61, iss. 11, pp. 1038–1044. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.17335>
- [10] Liang Y., Feeny B.F. Parametric identification of a chaotic base-excited double pendulum experiment. *Nonlinear Dyn.*, 2008, vol. 52, no. 1-2, pp. 181–197. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-007-9270-x>
- [11] Fuentes M.A., Sato Y., Tsallis C. Sensitivity to initial conditions, entropy production, and escape rate at the onset of chaos. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 33, pp. 2988–2991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.06.039>
- [12] Yao Y. Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1437, art. 012093. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1437/1/012093>
- [13] Watson P.A.G. Applying machine learning to improve simulations of a chaotic dynamical system using empirical error correction. *JAMES*, 2019, vol. 11, iss. 5, pp. 1402–1417. DOI: <https://doi.org/10.1029/2018MS001597>
- [14] D'Alessio S. An analytical, numerical and experimental study of the double pendulum. *Eur. J. Phys.*, 2023, vol. 44, no. 1, art. 015002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac986b>
- [15] Oiwa S., Yajima T. Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2017, vol. 14, no. 12, art. 1750176. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219887817501766>
- [16] Monteanu F., Grin A., Musafirov E., et al. About the Jacobi stability of a generalized Hopf — Langford system through the Kosambi — Cartan — Chern geometric theory. *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 3, art. 598. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15030598>
- [17] Ye K., Hu S. Inverse eigenvalue problem for tensors. *Commun. Math. Sci.*, 2017, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1649. DOI: <https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2017.v15.n6.a7>
- [18] Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 468, art. 012040. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012040>
- [19] Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D. Computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems with the use of hybrid algorithms of global optimization. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 40–56 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>
- [20] Sulimov A.V. Jacobi stability analysis and restoring parameters of the damped double pendulum. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2023, no. 7 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2287>

Shkapov P.M. — Dr. Sc. (Eng.), Head of the Department of Theoretical Mechanics n. a. Prof. N.E. Zhukovskiy, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Sulimov V.D. — Senior Lecturer, Department of Theoretical Mechanics n. a. Prof. N.E. Zhukovskiy, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Danich M.A. — Post-Graduate Student, Department of Theoretical Mechanics n. a. Prof. N.E. Zhukovskiy, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Shkapov P.M., Sulimov V.D., Danich M.A. Jacobi stability of the nonlinear double pendulum and its trajectories in the configuration space. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 4 (115), pp. 21–34 (in Russ.). EDN: UPBGEX