

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НОВОГО СПОСОБА ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ НОСОВЫХ ЧАСТЕЙ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**В.Ф. Формалев**

formalev38@yandex.ru

**Б.А. Гарибян**

bagarib@yandex.ru

**С.А. Колесник**

sergey@oviont.com

МАИ, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Приведена математическая модель нового способа тепловой защиты наиболее теплонагруженных носовых частей высокоскоростных (гиперзвуковых) летательных аппаратов на основе использования анизотропных теплозащитных материалов с высокой степенью продольной анизотропии (отношение продольного коэффициента теплопроводности к поперечному 100–200). Математическая модель описывает сопряженный теплоперенос между теплогазодинамическим пограничным слоем в переменных Дородницына — Лиза и анизотропным затупленным конусом. За счет высокой степени продольной анизотропии тепловые потоки «канализируются» от окрестности передней критической точки в хвостовую часть затупленного конуса, существенно снижая температуру окрестности передней критической точки и значительно нагревая боковую поверхность, что приводит к уменьшению тепловых потоков к боковой поверхности. В результате теплозащитное покрытие носовой части летательного аппарата функционирует в условиях отсутствия уноса массы, т. е. сохраняет геометрическую форму. Получены приближенно-аналитические решения для конвективных и диффузионных тепловых потоков на поверхности затупленного конуса с учетом коэффициента каталитической рекомбинации, которые использованы в качестве граничных условий при численном решении двумерной нестационарной задачи анизотропной теплопроводности.

### Ключевые слова

*Анизотропия, носовой конус, тепловая защита, диссоциирующий пограничный слой, сопряженный теплоперенос, степень продольной анизотропии, окрестность передней критической точки*

Результаты моделирования подтверждают высокую эффективность предлагаемой системы тепловой защиты

Поступила 16.11.2023

Принята 25.12.2023

© Автор(ы), 2024

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант РФФ № 22-19-00420)*

**Введение.** Особенностью гиперзвукового (числа Маха  $M > 5$ ) полета летательного аппарата (ЛА) является наличие высокой температуры при аэродинамическом нагреве, диссоциации молекул кислорода и азота на атомы с поглощением значительного количества теплоты в ударном слое и рекомбинации на более холодных стенках с выделением того же количества теплоты с каталитической активностью стенки [1–3]. В таких условиях моделирование тепловых потоков и температурных полей является сложной и в то же время актуальной проблемой [4–6].

Любые способы отвода тепловой энергии при аэродинамическом нагреве гиперзвуковых ЛА также являются актуальными [7, 8]. В настоящее время существуют два способа отвода тепловой энергии при пассивной тепловой защите: 1) отвод внутрь корпуса ЛА; 2) излучение [2, 9].

В настоящей работе предложена математическая модель нового способа тепловой защиты носовых частей гиперзвуковых ЛА путем перераспределения тепловых потоков и температур внутри тепловой защиты с использованием анизотропных материалов с высокой степенью продольной анизотропии. К таким материалам относятся некоторые сорта пиролитического графита [10].

Математическое моделирование предполагает формирование сопряженного теплообмена между диссоциирующим пограничным слоем и анизотропным телом с интенсивным отводом тепловой энергии от окрестности передней критической точки (ПКТ) в хвостовую часть носового конуса за счет высокого коэффициента продольной теплопроводности.

Для определения тепловых потоков решена полная система уравнений пограничного слоя в переменных Дородницына — Лиза с учетом диссоциации, диффузии и каталитической рекомбинации. Полученные тепловые потоки использованы в качестве граничных условий в задаче теплопроводности анизотропной тепловой защиты, которая решена численно методом переменных направлений с экстраполяцией по времени (МПНЭ) [11].

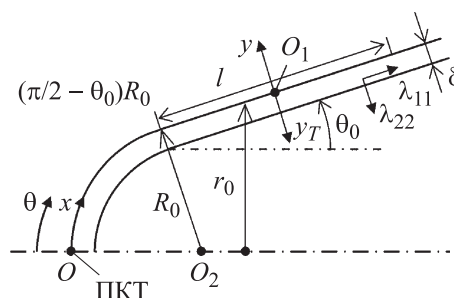
Тепломассообмен в условиях аэродинамического нагрева рассмотрен в [6, 8, 9, 12–14], теплопроводность анизотропных тел — в [5, 11, 15–17], а сопряженный сложный теплообмен в многомерном случае — в [2]. Экспериментально в [18–20] исследованы процессы взаимодействия по-

тока заряженных частиц термически неравновесной низкотемпературной плазмы с поверхностями керамики и металлов.

**Постановка задачи.** Рассмотрен сопряженный тепломассоперенос между диссоциирующим теплогазодинамическим пограничным слоем и затупленным конусом (клином) с анизотропной тепловой защитой толщиной  $\delta$  и компонентами тензора теплопроводности  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ , причем  $\lambda_{11} \gg \lambda_{22}$  (рис. 1).

**Рис. 1.** Затупленный конус (клин):

$R_0$  — радиус затупления;  $\theta_0$  — полуугол конусности;  $r_0$  — расстояние, отсчитываемое от оси тела до наружной границы  $w$



Для газодинамического пограничного слоя локальная ортогональная система координат имеет вид  $Oxy$ , для теплопроводности в теле —  $O_1x_1y_1$ . Компоненты тензора теплопроводности  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$  направлены вдоль осей  $x$  и  $y_1$  соответственно, так что анизотропное тело является ортотропным.

В рассматриваемых системах координат приведена следующая система уравнений динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев в переменных Дородницына — Лиза [11]:

$$\bar{x} = \int_0^x \rho_e u_e \mu_e r_0^s dx, \quad \eta(y) = \frac{\rho_e u_e r_0^s}{\sqrt{2\bar{x}}} y, \quad (1)$$

которая сопряжена на границе  $w$  с задачей анизотропной теплопроводности:

– уравнение сохранения импульса

$$(Df'')' + ff'' + \frac{2\bar{x}}{u_e} \frac{du_e}{d\bar{x}} \left[ \frac{\rho_e}{\rho} - (f')^2 \right] = 0, \quad \bar{x} \geq 0, \quad 0 < \eta < \bar{\delta}_e = \eta(\delta_e); \quad (2)$$

– уравнение концентраций для бинарной смеси воздуха (атомов и молекул кислорода и азота)

$$\left( \frac{D}{Sc} \bar{C}_i' \right)' + f \bar{C}_i' = \frac{2\bar{x} f' \bar{C}_i}{C_{ie}} \frac{d(C_{ie})}{d\bar{x}} - \frac{2\bar{x} w_i}{\rho \rho_e u_e^2 \mu_e r_0^{2s} C_{ie}}, \quad \bar{x} \geq 0, \quad 0 < \eta < \bar{\delta}_e; \quad (3)$$

– уравнение сохранения энергии

$$\left(\frac{D}{Pr}\bar{T}'\right)' + f\bar{T}' = \frac{2\bar{x}f'\bar{T}}{I_e} \frac{dI_e}{d\bar{x}} - \left[\frac{D}{Sc}\left(\frac{1}{Le}-1\right)\sum_i \frac{h_i C_i}{I_e} C_i'\right]' + \frac{u_e^2}{I_e} \left[\left(1-\frac{1}{Pr}\right)f'f''\right]', \quad (4)$$

$$\bar{x} \geq 0, \quad 0 < \bar{\delta}_e;$$

– уравнение анизотропной теплопроводности в тепловой защите

$$c_{TP} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{11}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y_T} \left( \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$x \geq 0, \quad 0 < y_T < \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + l.$$

Граничные условия для системы (1)–(4):

при  $y = 0$  ( $\eta = 0$ ):

$$f'(0) = u(0)/u_e = 0, \quad \bar{C}_i(0) = \bar{C}_{iw} = C_{iw}/C_{ie}, \quad \bar{T}(0) = \bar{T}_w = I_w/I_e; \quad (6)$$

при  $y \rightarrow \infty$  ( $\eta = \bar{\delta}_e$ ):

$$f'(\infty) = f'_e = 1, \quad f(\infty) = f_e = 0, \quad \bar{C}_i(\infty) = \bar{C}_{iw} = 1, \quad \bar{T}(\infty) = \bar{T}_e = 1. \quad (7)$$

Граничные условия для уравнения (5):

– условие сопряжения на границе  $w$

$$\lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{y_T=0+0} = \frac{\lambda}{c_{pw}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0+0} + \rho D_{12} h_A^e \frac{\partial C_A}{\partial y} \Big|_{y=0+0} - \varepsilon \sigma T_w^4, \quad (8)$$

$$T \Big|_{y_T=0+0} = T \Big|_{y=0+0} = T_w, \quad (9)$$

$$\lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y_T} \Big|_{y_T=\delta} = 0, \quad \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=T/2-\theta_0+l} = 0, \quad (10)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 = \text{const}, \quad 0 < x < (\pi/2 - \theta_0)R_0 + l, \quad 0 < y < \delta, \quad t = 0. \quad (11)$$

В соотношениях (1)–(10) приняты следующие обозначения:  $x, y, t$  — пространственные переменные и время;  $c, \rho, \mu, \lambda$  — теплоемкость, плот-

ность, динамическая вязкость, теплопроводность;  $f(\eta)$  ( $f'(\eta) = df/d\eta = u/u_e$ ) — относительная функция тока;  $Pr = c\mu/\lambda$  — число Прандтля;  $Sc = \mu/(\rho D_{12})$  — число Шмидта;  $Le = Pr/Sc$  — число Льюиса;  $D = \rho\mu/(\rho_e\mu_e)$ ;  $D_{12}$  — коэффициент бинарной диффузии;  $\bar{C} = C(\eta)/C_e$ ;  $\bar{I} = I(\eta)/I_e$ ;  $C_i$  — концентрация  $i$ -го компонента,  $i = 1, 2$ ;  $I = h + u_e^2/2$  — полная энтальпия;  $h = \int_0^T c dT + h^0$  — локальная энтальпия,  $h^0$  — энтальпия образования;  $T$  — абсолютная температура;  $\varepsilon$  — степень черноты; индексы:  $w$  — стенка;  $e$  — внешняя граница пограничного слоя;  $i$  — номер компонента бинарной смеси;  $i = A$  — атомарный компонент;  $i = M$  — молекулярный компонент ( $C_A = 1 - C_M$ ).

Для получения конвективных и диффузионных тепловых потоков (первое и второе слагаемые в правой части выражения (8)) необходимо решать систему (1)–(11) относительно  $f(\eta)$ ,  $C_A(\eta)$ ,  $I(\eta)$ , продифференцировать их по  $y$  при  $y=0$  с учетом (1) и подставить их в (8). Решение получим для ПКТ, а затем учтем градиенты давления и скорости для определения конвективно-диффузионных тепловых потоков вдоль оси  $Ox$ .

Для приближенно-аналитического решения системы (1)–(11) в ПКТ обоснуем следующие предположения:

– газодинамический поток химически «замороженный», т. е. скорости химических реакций намного меньше скорости газодинамического потока, поэтому  $w_i \approx 0$  в (3);

– в (2)  $\rho_e/\rho - f'^2 = \rho_e/\rho - (u/u_e)^2 = (\rho_e u_e^2 - \rho u^2)/\rho u_e^2 \approx 0$ , так как в критической точке  $u = u_e = 0$ ;

– для ПКТ  $\frac{x}{C_{ie}} \frac{dC_{ie}}{d\bar{x}} \approx 1$ ,  $\frac{\bar{x}}{I_e} \frac{dI_e}{d\bar{x}} \approx 1$ ;

– для воздуха число Прандтля  $Pr = c\mu/\lambda \approx 0,71$ , поэтому можно принять  $Pr \approx 1$ , кроме того,  $Sc = \mu/(\rho D_{12}) \approx 1$ ,  $Le = Pr/Sc \approx 1$ ;

– в критической точке  $f' = u/u_e = 0$ .

После предположений система (2)–(4) трансформируется в систему:

$$(Df'')' + ff'' = 0, \quad 0 < \eta < \bar{\delta}_e; \quad (12)$$

$$\left( \frac{D}{Sc} \bar{C}_i' \right)' + f\bar{C}_i' = 0, \quad 0 < \eta < \bar{\delta}_e; \quad (13)$$

$$\left(\frac{D}{\text{Pr}} \bar{T}\right) + f\bar{T} = 0, \quad 0 < \eta < \bar{\delta}_e, \quad (14)$$

где  $\bar{\delta}_e = \frac{\rho_e u_e r_0^s}{\sqrt{2x}} \int_0^{\bar{\delta}_e} \frac{\rho}{\rho_e} dy$ .

Решение системы (12)–(14) при  $D \approx 1$ ,  $Sc \approx 1$ ,  $Pr \approx 1$  получается как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами. При  $D \neq 1$ ,  $Pr \neq 1$ ,  $Sc \neq 1$  [1] конвективно-диффузионный тепловой поток с учетом излучения вдоль затупленного тела имеет вид

$$q_w(x) = q_{w0}F(x) - \varepsilon\sigma T_w^4, \quad (15)$$

где  $q_w(x) = \lambda_{22} \left. \frac{\partial T}{\partial y_T} \right|_{y_T=0}$  — тепловой поток, входящий в тело;  $q_{w0}$  —

сумма конвективного и диффузионного тепловых потоков в критической точке,

$$q_{w0} = 0,66 \text{Pr}^{-2/3} \left( \rho_e \mu_e \frac{du_e}{dx} \right)_0^{1/2} \left[ (I_e - h_w) + h_e (\text{Le}^{2/3} \varphi - 1) \right], \quad (16)$$

где

$$\varphi = \left\{ 1 + \frac{0,47 \text{Sc}^{-2/3} [2(du_e/dx)_0 \rho_e \mu_e]^{1/2}}{\rho_w (k_p)_w} \right\}^{-1},$$

а  $F(x)$  учитывает градиент давления  $dp_e/dx$  и скорости  $du_e/dx$ :

$$F(x) = \frac{(p_e(x)/p_0) \mu_e (r_0/\sqrt{2}) u_e(x)/u_\infty}{\left[ \int_0^x (p_e(x)/p_0) \mu_e r_0^2 (u_e(x)/u_\infty) dx \right]^{1/2}}. \quad (17)$$

Давление  $p_e(x)$  на внешней границе пограничного слоя принимается в виде интерполяционной формулы Лунева [17]:

$$p_e(x) = p_0 \left[ 1 - 1,17 \sin^2(x/R_0) + 0,225 \sin^6(x/R_0) \right],$$

а градиент скорости — из уравнения Бернулли

$$\frac{du_e}{dx} = - \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{dp_e}{dx}.$$

**Метод решения.** Задача теплопроводности (5), (8)–(11) в анизотропной тепловой защите с большой степенью продольной анизотропии решается численно с использованием МПНЭ [11]. Схема МПНЭ в двумерном нестационарном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k}{\tau} &= \frac{\lambda_{11}}{h_1^2} \left( \tilde{T}_{i+1,j}^{k+1/2} - 2T_{i,j}^{k+1/2} + T_{i-1,j}^{k+1/2} \right) + \\ &+ \frac{\lambda_{22}}{h_2^2} \left( T_{i,j+1}^{k+1/2} - 2T_{i,j}^{k+1/2} + T_{i,j-1}^{k+1/2} \right) + O\left(\tau + |h|^2\right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\tau} &= \frac{\lambda_{11}}{h_1^2} \left( T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1} \right) + \\ &+ \frac{\lambda_{22}}{h_2^2} \left( \tilde{T}_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1} \right) + O\left(\tau + |h|^2\right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\tau$  — шаги численного интегрирования по пространственным переменным и времени. В подсхеме (18) искомыми значениями сеточной функции являются  $T_{i,j+1}^{k+1/2}$ ,  $T_{i,j}^{k+1/2}$ ,  $T_{i,j-1}^{k+1/2}$ , значение  $T_{i-1,j}^{k+1/2}$  известно из решения в левом от искомого сечения, а  $\tilde{T}_{i+1,j}^{k+1/2}$  — экстраполяционное значение  $\tilde{T}_{i+1,j}^{k+1/2} = 2T_{i+1,j}^k - T_{i+1,j}^{k-1/2} + O(\tau^2)$ . Таким образом, подсхема (18) полностью аппроксимирует уравнение (5), является неявной системой линейных алгебраических уравнений, реализуемых одномерными прогонками вдоль оси  $Oy_T$ . При этом  $T_{i-1,j}^{k+1/2}$ ,  $\tilde{T}_{i+1,j}^{k+1/2}$  как известные на верхнем временном полуслое переносятся в правые части.

В подсхеме (19) искомыми являются значения  $T_{i+1,j}^{k+1}$ ,  $T_{i,j}^{k+1}$ ,  $T_{i-1,j}^{k+1}$ , значение  $T_{i,j-1}^{k+1}$  известно из решения на верхнем  $k+1$  временном слое из решения вдоль верхнего сечения, а значение  $\tilde{T}_{i,j+1}^{k+1}$  определяется линейной экстраполяцией по времени  $\tilde{T}_{i,j+1}^{k+1} = 2T_{i,j+1}^{k+1/2} - T_{i,j+1}^k + O(\tau^2)$ . Подсхема (19) реализуется одномерными прогонками вдоль оси  $Ox$ , при этом значения  $T_{i,j-1}^{k+1}$ ,  $\tilde{T}_{i,j+1}^{k+1}$  переносятся как известные в правые части уравнений с трехдиагональными матрицами.

Сопряжение тепловых потоков и температуры в газе и анизотропном теле осуществляется с помощью граничных условий (8), (9). Для аппроксимации теплового потока, входящего в тело (левая часть в (8)) со вторым порядком относительно шагов  $h_1$ ,  $h_2$ , значение сеточной функции  $T_{i,1}^{k+1/2}$  разложим по степеням  $h_2$  в окрестности узла  $(i, 0)$  до второй производной с использованием второй производной  $\lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y_T^2}$  из (5):

$$\begin{aligned} \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y_T^2} \Big|_{i,0} &= -\frac{\lambda_{22}}{h_2} (T_{i,0}^{k+1/2} - T_{i,1}^{k+1/2}) - \frac{h_2 c_T \rho_T \lambda_{22}}{2\tau} (T_{i,0}^{k+1/2} - T_{i,0}^k) + \\ &+ \frac{h_2 \lambda_{11} \lambda_{22}}{2h_1^2} (T_{i-1,0}^{k+1/2} - 2T_{i,0}^{k+1/2} + \tilde{T}_{i+1,0}^{k+1/2}) + O(\tau + |h|^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (20) в (8) или, что то же самое, в (15)–(17) вместо  $q_w(x)$  с неявной аппроксимацией лучистого потока, получаем алгебраическое уравнение четвертой степени:

$$(T_{i,0}^{k+1/2})^4 - \varphi_{i,0} T_{i,0}^{k+1/2} + \psi_{i,0} = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{i,0} &= \left( K c_p F(x) + \frac{\lambda_{22}}{h_2} + \frac{h_2 c_T \rho_T \lambda_{22}}{2\tau} - \frac{\lambda_{22}}{h_2} A_{i,1} \right) / (\varepsilon \sigma), \\ K &= 0,66 \text{Pr}^{-2/3} (\rho_e \mu_e du_e / dx)_0^{1/2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,0} &= \\ &= \frac{\left[ \frac{\lambda_{22}}{h_2} B_{i,1} + \frac{h_2 c_T \rho_T \lambda_{22}}{2\tau} T_{i,0}^k + \frac{h_2 \lambda_{11} \lambda_{22}}{h_1^2} (T_{i-1,0}^{k+1} + \tilde{T}_{i+1,0}^{k+1}) - K (I_e + h_e (\text{Le}^{2/3} \varphi - 1)) F(x) \right]}{(\varepsilon \sigma)}; \end{aligned}$$

$A_{i,1}$ ,  $B_{i,1}$  — прогоночные коэффициенты в узле  $(i, 1)$  правой прогонки  $T_{i,1}^{k+1} = A_{i,1} T_{i,0}^{k+1} + B_{i,1}$ .

Из четырех корней уравнения (21) его единственный действительный положительный корень в квадратурах можно записать в виде [2]:

$$T_{i,0}^{k+1/2} = -\sqrt{\frac{u-v}{2}} + \sqrt{-\frac{u-v}{2} - \frac{\varphi}{\sqrt{8(u-v)}}}, \quad (22)$$



где

$$u = \sqrt[3]{\left(\frac{\varphi}{4}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\varphi}{4}\right)^4 - \left(\frac{\psi}{3}\right)^3}}; \quad v = \sqrt[3]{-\left(\frac{\varphi}{4}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\varphi}{4}\right)^4 - \left(\frac{\psi}{3}\right)^3}}.$$

Следовательно, неявная аппроксимация лучистого потока устраняет неустойчивость всего решения, если его аппроксимировать по температуре  $T_{i,0}^k$  на нижнем временном слое. При этом правая прогонка в направлении оси  $Oy_T$  предполагает прямой ход от узла  $(i, J)$  к узлу  $(i, 0)$ , в котором получается точное решение  $T_{i,0}^{k+1/2}$ , т. е. линейным оператором прогонки решается нелинейная система алгебраических уравнений.

**Результаты численного моделирования.** По формулам (15)–(17) и (18)–(22) выполнены численные расчеты тепловых потоков и температурных полей в анизотропном теплозащитном материале с высокой степенью продольной анизотропии.

Входные данные для расчетов:

– характеристики набегающего потока: число Маха  $M_\infty = 6$ ,  $p_\infty = 26\,500$  Па,  $c_{p_\infty} = 1,06 \cdot 10^5$  Дж/(кг · К),  $\lambda_\infty = 0,0037$  Вт/(м · К);  $\mu_\infty = 0,246 \cdot 10^{-4}$  кг/(м · с),  $T_\infty = 223,3$  К,  $\rho_\infty = 0,037$  кг/м<sup>3</sup>;

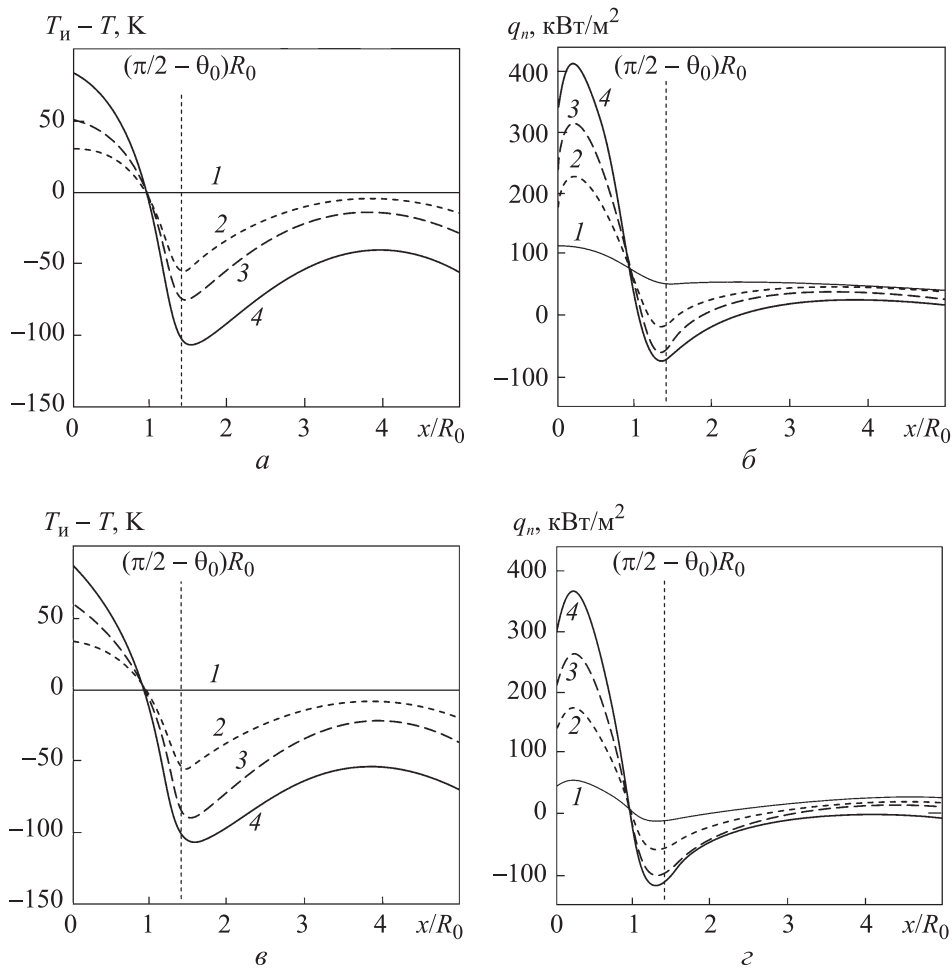
– геометрические характеристики:  $\delta = 0,012$  м,  $R_0 = 0,05$  м,  $\theta_0 = 10^\circ$ ,  $(\pi/2 - \theta_0)R_0 + l = 5R_0$ , начальная температура  $T_0 = 300$  К, конечное время 100 и 250 с;

– теплофизические характеристики тепловой защиты:  $\lambda_{22} = 2$  Вт/(м · К),  $\lambda_{11} = 50, 150, 400$  Вт/(м · К), т. е. степеней продольной анизотропии  $\lambda_{11}/\lambda_{22} = 25, 75, 200$ ,  $c_p = 1\,500$  кДж/(кг · К).

Результаты расчетов разности температуры на границе сопряжения и тепловых потоков к ней для времени полета  $t = 100$  с и степеней анизотропии 1, 50, 100, 200 в зависимости от продольной переменной приведены на рис. 2, а, б. По ординате показана разность изотропной и анизотропной температуры  $T_{и} - T$  границы сопряжения  $w$ .

Аналогичные результаты расчетов разности температуры на границе сопряжения и тепловых потоков к ней приведены на рис. 2, в, г для времени полета  $t = 250$  с.

Разность температуры на границе сопряжения для изотропного случая ( $\lambda_{22} = 2$ ) равна нулю. Для окрестности критической точки ( $x/R_0 < 1$ ) разность температуры тем выше, чем выше продольный коэффициент теплопроводности, поскольку в этом случае продольный отток теплоты



**Рис. 2.** Результаты расчета разности температуры на границе сопряжения в изотропном и анизотропном случаях при  $t = 100$  с (а) и  $t = 200$  с (в) и тепловые потоки к ней (б, г) для  $\lambda_{22} = 2$  Вт/(м · К) при  $\lambda_{11} = 2$  (1), 100 (2), 200 (3), 400 Вт/(м · К) (4)

уменьшает температуру  $T$  и увеличивает разность  $T_{и} - T$ , а тепловые потоки в окрестности критической точки увеличиваются при возрастании  $\lambda_{11}$  (см. рис. 2, б) вследствие уменьшения температуры границы. В хвостовой части затупленного тела ( $x / R_0 > 1$ ) наблюдается обратная картина: с увеличением  $\lambda_{11}$  разность температуры  $T_{и} - T$  снижается и становится отрицательной, т. е. температура боковой поверхности анизотропного тела растет, следовательно, тепловые потоки к ней уменьшаются за счет снижения перепада температуры между газом и телом.

С увеличением времени полета (рис. 2, в, г) этот эффект охлаждения окрестности критической точки усиливается, а тепловые потоки на боко-

вой поверхности находятся в окрестности нуля и даже становятся отрицательными, т. е. тело остывает (см. рис. 2, з).

**Заключение.** Изложено математическое моделирование нового способа тепловой защиты высокоскоростных ЛА в условиях их аэродинамического нагрева путем использования анизотропных теплозащитных материалов с высокой степенью продольной анизотропии. Это позволяет отводить тепловые потоки от окрестности передней критической точки в хвостовую часть носовых затупленных конусов. В результате температура в носовой части не достигает температуры уноса массы и ЛА сохраняет геометрическую форму. При решении задачи сопряженного теплообмена между газодинамическим пограничным слоем и анизотропным телом учтены все виды тепловых потоков: конвективно-кондуктивный, диффузионный, лучистый. Найден способ неявной аппроксимации лучистого теплового потока, включенного в линейный оператор прогонки, что позволило получить абсолютно устойчивый метод численного решения комплексной проблемы сопряженного теплообмена.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., Мир, 1966.
- [2] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование сопряженного теплообмена между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами. М., Ленанд, 2022.
- [3] Кузенов В.В., Рыжков С.В. Численное моделирование взаимодействия мишени магнитно-инерциального термоядерного синтеза с плазменным и лазерным драйверами. *ТВТ*, 2021, т. 59, № 4, с. 492–501. EDN: MSHQPZ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364421040141>
- [4] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 833–839. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.054>
- [5] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 123, pp. 994–998. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.014>
- [6] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 5 (86), с. 35–49. EDN: RQSEAQ. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>
- [7] Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V. Analysis of the ideal gas flow over body of basic geometrical shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2019, vol. 132, pp. 587–592. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.032>

- [8] Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V. New realization method for calculating convective heat transfer near the hypersonic aircraft surface. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2019, vol. 70, no. 2, art. 46. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1095-1>
- [9] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Математическое моделирование теплопереноса при аэродинамическом нагреве носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2022, № 1 (107), с. 107–121.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-107-121>
- [10] Ho C.Y., Powell R.W., Liley R.E. Thermal conductivity of selected materials. Part 2. National Bureau of Standards, 1968.
- [11] Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. М., ФИЗМАТЛИТ, 2015.
- [12] Суржиков С.Т. Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных. М., ИПМех РАН, 2011.
- [13] Зотов А.А., Пашков О.А., Волков А.Н. Концепция системы активной тепловой защиты трехслойной конструктивно-силовой схемы гиперзвукового летательного аппарата с дискретным наполнителем. *Деформация и разрушение материалов*, 2022, № 3, с. 2–9. EDN: DFPZYX
- [14] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Теплоперенос на боковых поверхностях затупленных носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов. *ТВТ*, 2021, т. 59, № 5, с. 797–800. EDN: IAIFSE.  
DOI: <https://doi.org/10.31857/S0040364421050069>
- [15] Зарубин В.С., Зимин В.Н., Леонов В.В. и др. Равновесная температура поверхности затупления баллистической капсулы при возвращении на Землю с параболической скоростью. *Тепловые процессы в технике*, 2021, № 11, с. 482–487. EDN: KIBNFQ. DOI: <https://doi.org/10.34759/tpt-2021-13-11-482-487>
- [16] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние компонентов тензора теплопроводности теплозащитного материала на величину тепловых потоков от газодинамического пограничного слоя. *ТВТ*, 2019, т. 57, № 1, с. 66–71.  
EDN: ZACZCX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040364419010083>
- [17] Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., Машиностроение, 1975.
- [18] Bulychev N.A. Preparation of stable suspensions of ZnO nanoparticles with ultrasonically assisted low-temperature plasma. *Nanosci. Technol.: An Int. J.*, 2021, vol. 12, iss. 3, pp. 91–97. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2021038033>
- [19] Bulychev N.A. Obtaining of gaseous hydrogen and silver nanoparticles by decomposition of hydrocarbons in ultrasonically stimulated low-temperature plasma. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 50, pp. 21323–21328.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.04.288>
- [20] Bulychev N.A. Synthesis of gaseous hydrogen and nanoparticles of silicon and silicon oxide by pyrolysis of tetraethoxysilane in an electric discharge under the action of ultrasound. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 84, pp. 35581–35587.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.08.163>

**Формалев Владимир Федорович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Гарибян Борис Александрович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Колесник Сергей Александрович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Формалев В.Ф., Гарибян Б.А., Колесник С.А. Математическое моделирование нового способа тепловой защиты носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2024, № 4 (115), с. 77–92. EDN: ZNQBZA

**WAVE HEAT TRANSFER IN A NONLINEAR ANISOTROPIC  
PLATE UNDER THE ACTION OF A POINT SOURCE  
OF THERMAL ENERGY**

V.F. Formalev

formalev38@yandex.ru

B.A. Garibyan

bagarib@yandex.ru

S.A. Kolesnik

sergey@oviont.com

**Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The paper presents a mathematical model of a new method of thermal protection of the most heat-loaded nose parts of high-speed (hypersonic) aircraft based on the use of anisotropic heat-protective materials with a high degree of longitudinal anisotropy (the ratio of the longitudinal to transverse thermal conductivity coefficient is 100–200). The mathematical model describes the conjugate heat transfer between a dissociating thermo-gas-dynamic boundary layer in the Dorodnitsyn — Liz variables and an anisotropic blunt cone. Due to the high degree of longitudinal anisotropy, heat flows are “canalized” from the vicinity of the front critical point (FCP) to the tail part of the blunted cone, significantly re-

**Keywords**

*Anisotropy, nose cone, thermal protection, dissociating boundary layer, conjugate heat transfer, degree of longitudinal anisotropy, vicinity of the forward critical point*

ducing the temperature in the vicinity of the FCP and significantly heating the side surface, which leads to a decrease in heat flows to the side surface. As a result, the heat-protective coating of the nose of the aircraft functions in the absence of mass loss, that is, it retains its geometric shape. Approximate analytical solutions for convective and diffusion heat flows on the surface of a blunt cone are obtained taking into account the catalytic recombination coefficient, which are used as boundary conditions in the numerical solution of a two-dimensional non-stationary problem of anisotropic thermal conductivity. The simulation results confirm the high efficiency of the proposed thermal protection system

Received 16.11.2023

Accepted 25.12.2023

© Author(s), 2024

---

*The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 22-19-00420)*

## REFERENCES

- [1] Dorrance W.H. Viscous hypersonic flow. McGraw-Hill, 1962.
- [2] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Matematicheskoe modelirovanie sopryazhennogo teploobmena mezhdru vyazkimi gazodinamicheskimi techeniyami i anizotropnymi telami [Mathematical modeling of conjugate heat exchange between viscous gas-dynamic flows and anisotropic bodies]. Moscow, Lenand Publ., 2022.
- [3] Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical simulation of the interaction of a magneto-inertial fusion target with plasma and laser drivers. *High Temp.*, 2022, vol. 60, suppl. 1, pp. S7–S15. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X21040143>
- [4] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 833–839. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.054>
- [5] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 123, pp. 994–998. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.014>
- [6] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 5 (86), pp. 35–49 (in Russ.). EDN: RQSEAQ. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>
- [7] Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V. Analysis of the ideal gas flow over body of basic geometrical shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2019, vol. 132, pp. 587–592. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.032>

- [8] Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V. New realization method for calculating convective heat transfer near the hypersonic aircraft surface. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2019, vol. 70, no. 2, art. 46. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1095-1>
- [9] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Mathematical modeling of heat and mass transfer during aerodynamic heating of the nose parts of hypersonic aircraft. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2022, no. 1 (107), pp. 107–121 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2022-1-107-121>
- [10] Ho C.Y., Powell R.W., Liley R.E. Thermal conductivity of selected materials. Part 2. National Bureau of Standards, 1968.
- [11] Formalev V.F. *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh* [Heat transfer in anisotropic solids]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2015.
- [12] Surzhikov S.T. Raschetnoe issledovanie aerotermodinamiki giperzvukovogo obtekaniya zatuplennykh tel na primere analiza eksperimentalnykh dannykh [Computational study of aerothermodynamics of hypersonic flow around blunt bodies using an example of an analysis of experimental data]. Moscow, IPMech RAS Publ., 2011.
- [13] Zotov A.A., Pashkov O.A., Volkov A.N. Concept of active thermal protection system for three-layer structural-power scheme of hypersonic aircraft with discrete filler. *Deformatsiya i razrushenie materialov* [Deformation and Fracture of Materials], 2022, no. 3, pp. 2–9 (in Russ.). EDN: DFPZYX
- [14] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Heat and mass transfer on the side surfaces of blunt nose parts of hypersonic aircraft. *High Temp.*, 2022, vol. 60, no. 1, suppl. 2, pp. S288–S291. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X21050060>
- [15] Zarubin V.S., Zimin V.N., Leonov V.V., et al. Equilibrium temperature of ballistic capsule blunt surface when returning to the earth at a parabolic velocity. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2021, no. 11, pp. 482–487 (in Russ.). EDN: KIBNFQ. DOI: <https://doi.org/10.34759/tpt-2021-13-11-482-487>
- [16] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Effect of components of the thermal conductivity tensor of heat-protection material on the value of heat fluxes from the gas-dynamic boundary layer. *High Temp.*, 2019, vol. 57, no. 1, pp. 58–62. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X19010085>
- [17] Lunev V.V. *Giperzvukovaya aerodinamika* [Hypersonic aerodynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975.
- [18] Bulychev N.A. Preparation of stable suspensions of ZnO nanoparticles with ultrasonically assisted low-temperature plasma. *Nanosci. Technol.: An Int. J.*, 2021, vol. 12, iss. 3, pp. 91–97. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2021038033>
- [19] Bulychev N.A. Obtaining of gaseous hydrogen and silver nanoparticles by decomposition of hydrocarbons in ultrasonically stimulated low-temperature plasma. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 50, pp. 21323–21328. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.04.288>

[20] Bulychev N.A. Synthesis of gaseous hydrogen and nanoparticles of silicon and silicon oxide by pyrolysis of tetraethoxysilane in an electric discharge under the action of ultrasound. *Int. J. Hydrog. Energy*, 2022, vol. 47, iss. 84, pp. 35581–35587.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.08.163>

**Formalev V.F.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Garibyan B.A.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Kolesnik S.A.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computational Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A. Wave heat transfer in a nonlinear anisotropic plate under the action of a point source of thermal energy. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2024, no. 4 (115), pp. 77–92 (in Russ.). EDN: ZNQBZA