

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ В ОБЛАСТИ ПЕРЕХОДА ОТ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ

М.Э. Мадалиев^{1,2}

m.e.madaliyev@ferpi.uz

Ж.Т. Орзиматов²

Э.М. Юнусалиев²

Н.А. Насирова¹

Х.Э. Мухаммадёкубов²

¹ИМСС им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан

²ФерГТУ, Фергана, Республика Узбекистан

Аннотация

Представлено численное моделирование перехода от ламинарного течения к турбулентному, что является одной из важнейших и сложных задач современной вычислительной гидродинамики (CFD). Используются различные подходы к моделированию переходных течений, включая модели турбулентности $k-k_l-\omega$, Transition SST, модель напряжений Рейнольдса (RSM $S-\omega$) и двухжидкостную модель турбулентности Маликова. Перечисленные модели описывают переходные процессы с учетом специфики турбулентного течения. Проведено сравнение численных результатов с экспериментальными данными при различных уровнях интенсивности турбулентности, что позволило оценить точность и применимость этих моделей. Результаты анализа показали, что двухжидкостная модель Маликова без дополнительных коррекций дает результаты, сопоставимые с другими моделями турбулентности, которые используют дополнительные коррекции для описания перехода от ламинарного течения к турбулентному. Полученные результаты могут быть использованы для совершенствования численных методов моделирования в аэродинамике, теплообменных процессах и в других инженерных приложениях, где важно точное описание переходных турбулентных режимов

Ключевые слова

Уравнения Навье — Стокса, модель SST, модель $k-k_l-\omega$, модель напряжений Рейнольдса, ANSYS, двухжидкостная модель

Поступила 06.02.2025

Принята 01.07.2025

© Автор(ы), 2025

Введение. Процесс перехода от ламинарного течения к турбулентному представляет собой один из наиболее сложных и интересных аспектов гидродинамических и аэродинамических исследований. Этот переход, характеризующийся резким изменением структуры потока, значительно влияет на поведение различных физических систем, от аэродинамики летательных аппаратов и двигателей до систем теплообмена и промышленных процессов. Понимание механизмов такого перехода и разработка методов его численного моделирования имеют огромное значение для решения широкого круга задач в области инженерии и науки. Ламинарное течение, при котором линии тока следуют строго упорядоченной траектории, отличается высокой устойчивостью при определенных условиях. В этом режиме потери на трение минимальны, а сопротивление движущихся тел или поверхностей относительно невелико. Турбулентное течение характеризуется хаотическим движением частиц, значительными флуктуациями скорости и давления, что приводит к более интенсивным процессам перемешивания, увеличению потерь энергии и, следовательно, к повышенному сопротивлению. Переход от ламинарного режима к турбулентному происходит под действием таких факторов, как увеличение числа Рейнольдса, наличие внешних возмущений, шероховатость поверхности и др. [1–5].

Особенность задачи моделирования процессов перехода заключается в том, что стандартные модели турбулентности, которые эффективно описывают полностью развитое турбулентное течение, неприменимы в зонах перехода. Это связано с тем, что уравнения Рейнольдса основаны на осреднении по времени, позволяющему отфильтровать случайные турбулентные пульсации. Однако переход от ламинарного течения к турбулентному (ламинарно-турбулентный) при обтекании тел связан с ростом собственных колебаний пограничного слоя: волн Толмина — Шлихтинга [6, 7]. Собственные колебания носят упорядоченный и нелокальный характер. Это волны, характерная высота которых сопоставима с толщиной пограничного слоя, а характерная длина составляет несколько толщин пограничного слоя. Все модели турбулентности должны описать вклад от случайных турбулентных пульсаций с непрерывным спектром, имеющих существенно меньшие характерные линейные масштабы. Совместить описание волн Толмина — Шлихтинга и случайных турбулентных пульсаций в рамках одного осреднения по времени невозможно. Поэтому модели перехода от ламинарного течения к турбулентному, которые используются вместе с уравнениями Рейнольдса, неизбежно носят глубоко эмпирический и не-универсальный характер, а область их применения гораздо уже области

применения моделей турбулентности. Такие модели, как k - ε и k - ω , хорошо работают в условиях, когда турбулентность полностью развита, однако в зонах перехода с их помощью невозможно точно описать начало перехода и динамику процесса. Это связано с тем, что физические механизмы, управляющие переходом, включают в себя сложные взаимодействия между неустойчивостями ламинарного слоя, возмущениями и турбулентными флуктуациями, которые невозможно предсказать с помощью традиционных моделей. За последние несколько десятилетий предложены эмпирические модели ламинарно-турбулентного перехода, предназначенные для использования в рамках уравнений Рейнольдса в сочетании с обычными моделями турбулентности. Такие модели ламинарно-турбулентного перехода входят, в частности, в модели k - kl - ω [8, 9] и Transition SST [10–12], которые включают в себя дополнительные уравнения и параметры, позволяющие более точно предсказать моменты начала турбулентности и ее развитие. Эти модели учитывают как ламинарную, так и турбулентную фазы течения, что делает их более универсальными и применимыми к широкому классу задач. Однако их эффективность в конкретных ситуациях требует детальной проверки и сопоставления с экспериментальными данными, что является особенно актуальным для исследователей в области вычислительной гидродинамики. Новый подход к описанию турбулентных течений предложен З. Маликовым. Это двухжидкостная модель, которая представляет собой метод, аналогичный методам RANS. Этот подход впервые представлен в [13], где подробно рассмотрены принципы его построения и применения. Особенность модели Маликова — наличие уравнений для амплитуды возмущений скорости. Поскольку основную роль в зарождении и дальнейшем развитии турбулентности играют наиболее интенсивные возмущения скорости, модель Маликова потенциально способна описать переход от ламинарного течения к турбулентному. Основная научная новизна работы — оценка способности модели Маликова отображать переходные процессы и их динамику. Для сравнения с перечисленными выше моделями в [13] также представлены данные, полученные с использованием обычной модели турбулентности RSM S - ω [14–16]. Это модель с дополнительными дифференциальными уравнениями для напряжений Рейнольдса, не основанная на гипотезе Буссинеска, более точно описывает анизотропию турбулентного течения и взаимодействия в пограничных слоях. Такие модели, хотя и более вычислительно затратные, предлагают более детализированные прогнозы поведения турбулентного течения, особенно в условиях, когда стандартные изотропные модели турбулентности оказываются недостаточно точными.

Расчеты на основе модели RSM $S-\omega$ покажут, что даже такие продвинутое модели турбулентности не способны описать процессы перехода от ламинарного течения к турбулентному.

Цель работы — проведение сравнительного анализа различных моделей турбулентности и их способности предсказывать переходные процессы в задаче обтекания плоской пластины. В рамках исследования численно решены задачи с применением моделей $k-kl-\omega$, Transition SST и RSM $S-\omega$ с использованием ПО *Ansys Fluent*. Примеры применения *Ansys Fluent* в инженерных задачах аналогичного класса приведены в [17–19]. Двухжидкостная модель турбулентности Маликова получена с использованием авторских кодов. Для каждой модели выполнено моделирование при различных уровнях интенсивности турбулентности. Это позволяет не только оценить возможности моделей к описанию реальных физических процессов, но и сопоставить результаты численных расчетов с доступными экспериментальными данными. Такой подход дает возможность выявить преимущества и недостатки каждой модели, а также определить направления дальнейшего совершенствования методов численного моделирования переходных процессов.

Одной из ключевых задач настоящего исследования является понимание того, какие модели более точно предсказывают момент перехода и его динамику в зависимости от начальных условий и геометрии обтекаемой поверхности. В работе проанализированы различные подходы к улучшению предсказательной способности моделей турбулентности. Результаты работы направлены на развитие более точных подходов к моделированию перехода от ламинарного течения к турбулентному и могут иметь важное значение для различных инженерных приложений, где понимание и предсказание переходных течений играет ключевую роль.

Физическая и математическая постановки задачи. Тестовые случаи турбулентного обтекания плоской пластины, применяемые для настройки эмпирических корреляций [5]: *эксперимент 1* — тест при высоком уровне турбулентности (ТЗА); *эксперимент 2* — тест при среднем уровне турбулентности (ТЗВ); *эксперимент 3* — тест при низком уровне турбулентности (ТЗА-); *эксперимент 4* — тест при очень низком уровне турбулентности (S&K). Входные параметры для этих тестов при $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ приведены ниже:

Эксперимент:	$U_{\text{вход}}$, м/с	Ti , %	μ_t / μ
1	9,4	6,5	100,0
2	5,4	3,5	13,0

3	19,8	0,874	8,72
4	50,1	0,18	5,0

Плоская пластина имеет длину 2,0 м, граница входящего потока расположена на расстоянии 0,22 м от пластины, граница дальнего поля — на расстоянии 0,22 м в нормальном направлении. Указанные расстояния составляют 11 % длины пластины. Предварительный анализ показал, что увеличение расчетной области существенно не влияет на распределение основных аэродинамических характеристик вблизи поверхности пластины, что позволяет полагать выбранные границы обоснованными. Использованная для калибровки сетка (рис. 1) — H-образная сетка с шагом в нормальном направлении $1,0 \cdot 10^{-6}$ м для первой ячейки от стенки и с шагом в продольном направлении $1,5 \cdot 10^{-3}$ м для первой ячейки перед пластиной. Сетка состоит из 425 узлов вдоль продольной оси, 392 узлов на стенке и 129 узлов в нормальном направлении.

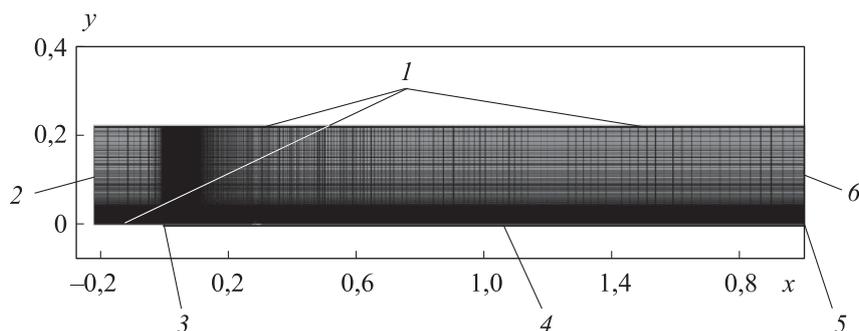


Рис. 1. Геометрия обтекания плоской пластины и расчетной сетки:
 1 — условия симметрии; 2 — вход; 3 — начало пластины ($x = 0$); 4 — стенка;
 5 — конец пластины; 6 — выход

На правой (выходной) границе расчетной области задано граничное условие *outlet with zero-gradient condition*. Такой выбор обеспечивает минимальное влияние выходной границы на внутреннюю область течения и исключает отражение возмущений в расчетную зону. Уточнение добавлено как в текст, так и в обозначение на рис. 1.

Математическая модель. Для анализа обтекания плоской пластины использованы осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса. Эти уравнения являются математической основой для описания турбулентного движения несжимаемой жидкости и представляют собой систему дифференциальных уравнений, которые описывают изменения скорости и давления в жидкости с учетом времени и координат. Осред-

нение по Рейнольдсу позволяет учесть влияние турбулентности на поток, значительно упрощая решение задачи и снижая вычислительные затраты [19]. В осредненной форме уравнения Навье — Стокса эффективно описывают турбулентные потоки и включают в себя уравнение сохранения массы (уравнение непрерывности), которое описывает закон сохранения массы внутри расчетной области $\partial \bar{u}_i / \partial x_i = 0$, и уравнение сохранения импульса, описывающее изменение скорости жидкости под воздействием внешних и внутренних сил

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

где \bar{u}_i — компоненты среднего скоростного поля; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; \bar{p} — среднее давление; τ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Модели турбулентности. Модель k - kl - ω — одна из современных моделей турбулентности, разработанных для более точного описания переходных процессов в потоке. Она сочетает элементы традиционных моделей, таких как k - ϵ , и адаптивные компоненты, позволяющие учитывать ламинарные и турбулентные режимы течения. Модель основана на гипотезе Буссинеска и включает в себя уравнения переноса для турбулентной (k_T) и ламинарной (k_L) кинетической энергии, характерной частоты турбулентных пульсаций (ω). Основные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k_T}{\partial x_j} &= P_{K_T} + R + R_{NAT} - \omega k_T - D_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\alpha_T}{\alpha_K} \right) \frac{\partial k_T}{\partial x_j} \right], \\ \frac{\partial k_L}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k_L}{\partial x_j} &= P_{K_T} - R - R_{NAT} - D_L + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k_L}{\partial x_j} \right], \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} &= C_{\omega 1} \frac{\omega}{k_T} P_{K_T} + \left(\frac{C_{\omega R}}{f_W} - 1 \right) \frac{\omega}{k_T} (R + R_{NAT}) + C_{\omega 2} \omega^2 + \\ &+ C_{\omega 3} f \omega^2 \alpha_T f_W^2 \frac{\sqrt{k_T}}{d^3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\alpha_T}{\alpha_K} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Остальные параметры модели (коэффициенты турбулентности и эмпирические константы) приведены в [8, 9].

Модель k - kl - ω применяют в различных областях, например, в аэро- и гидродинамике, а также в задачах, связанных с теплообменом и массопереносом. Вследствие гибкости и точности она стала важным инструментом в численном моделировании турбулентных потоков.

Модель Transition SST (или модель γ - Re_{θ} -SST) использует уравнения для γ и Re_{θ} в дополнение к уравнениям SST k и ω . Эта модель предложена для решения проблем, возникающих при использовании стандартных моделей, особенно в сложных потоковых условиях (некорректное предсказание переходных процессов, завышенные или заниженные коэффициенты трения и недостаточная точность моделирования турбулентности):

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_k v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \gamma P - \max(\gamma, 0, 1) \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_{\omega} v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\gamma_{\omega}}{v_t} P - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] + P_{\gamma} - E_{\gamma}, \\ \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{\theta t} (v + v_t) \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} \right] + P_{\theta t}. \end{aligned}$$

Остальные параметры модели (коэффициенты турбулентности и эмпирические константы) приведены в [10–12].

Модель Transition SST широко применяется для описания процессов аэро- и гидродинамики, теплообмена, особенно, где требуется высокая точность моделирования переходных потоков. Модель также используется при численном моделировании сложных потоков для научных исследований и инженерных разработок, предоставляя точные и надежные результаты.

Модель турбулентности RSM (Reynolds Stress Model) $S-\omega$ является одной из самых продвинутых моделей турбулентных течений. В отличие от более простых моделей, таких как $k-\epsilon$ или $k-\omega$, которые используют два уравнения для моделирования характеристик турбулентности, RSM решает уравнения для всех независимых компонентов напряжений Рейнольдса, что делает ее более точной при описании сложных потоков. Уравнения напряжений Рейнольдса:

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} = P_{ij} - \epsilon_{ij} + D_{ij} + \Pi_{ij} + \Phi_{ij}.$$

Здесь R_{ij} — компоненты тензора напряжений Рейнольдса; P_{ij} — производство турбулентных напряжений; ϵ_{ij} — диссипация; D_{ij} — диффузия; Π_{ij} — корреляция давления и скорости деформации; Φ_{ij} — источник

термических напряжений. Остальные параметры модели (коэффициенты турбулентности и эмпирические константы) приведены в [16].

Уравнение для относительной скорости диссипации турбулентности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2$$

описывает характерную частоту турбулентности $\omega = \varepsilon / (0,09k)$, ε — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности k ; P_k — производство кинетической энергии турбулентности.

Модель RSM S - ω применяют в задачах, требующих учета сложных анизотропных эффектов и точного описания турбулентных напряжений. Она широко используется в аэродинамике, энергетике, гидравлике для моделирования потоков вокруг сложных геометрических объектов (лопаток турбин, крыльев самолетов, сложных трубопроводов и других конструкций), особенно полезна, когда простые двухпараметрические модели не могут обеспечить адекватную точность.

Двухжидкостная модель турбулентности Маликова описана в [20, 21]. Основными уравнениями для исследования поставленных задач являются гидродинамические уравнения двухжидкостной модели для несжимаемой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_j V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\rho \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \mathfrak{G}_j \mathfrak{G}_i \right], \\ \frac{\partial \mathfrak{G}_i}{\partial t} + \frac{\partial V_j \mathfrak{G}_i}{\partial x_j} &= -\mathfrak{G}_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{v}_{ji} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] + F_{si} + F_{fi}, \\ \tilde{v}_{ji} &= 3\nu + 2 \left| \frac{\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j}{\text{def}(\vec{V})} \right|, i \neq j, \quad \tilde{v}_{ii} = 3\nu + \frac{1}{|\text{div}(\vec{\mathfrak{G}})|} \frac{\sum_{k=1}^3 \mathfrak{G}_k \mathfrak{G}_k \left| \frac{\partial \mathfrak{G}_k}{\partial x_k} \right|}{\text{def}(\vec{V})}, \\ \vec{F}_f &= -K_f \vec{\mathfrak{G}}, \quad \vec{F}_s = C_s \text{rot} \vec{V} \times \vec{\mathfrak{G}}. \end{aligned}$$

Здесь V_i — компонента осредненной скорости потока; \mathfrak{G}_i — компонента относительной скорости потока; \tilde{v}_{ji} — тензор молярной вязкости; p — давление; ρ — плотность среды; ν — молекулярная вязкость; K_f — коэффициент трения,

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|d \cdot \vartheta|}{d^2};$$

C_s — коэффициент при силе Сеффмена; $\text{def}(\vec{V})$ — скорость деформации, $\text{def}(\vec{V}) = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $S_{ij} = (1/2)(\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i)$. В формуле для коэффициента трения d — ближайшее расстояние до твердой стенки, λ_{\max} — вещественная часть наибольшего корня характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, A — матрица,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + C_s \zeta_2 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

$$\zeta = \text{rot } \vec{V}, C_s = 0,2, C_1 = 0,7825, C_2 = 0,306.$$

Метод решения. Для рассмотренных моделей численного моделирования применена схема SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), обеспечивающая эффективное и стабильное решение уравнений движения жидкости. Для дискретизации уравнения давления использована схема второго порядка точности (Second Order), что позволяет достичь более высокой точности решения по сравнению со схемами первого порядка. В то же время для уравнений момента применена схема (Second Order Upwind), которая обеспечивает точное моделирование потоков с учетом направленности течения и уменьшает численную дисперсию. Для обеспечения точности и контроля сходимости расчетов использован мониторинг остаточной невязки (Residual Monitor), установленной на уровне $1 \cdot 10^{-5}$, что обеспечивает высокую степень точности результатов. Кроме того, заданы оптимальные факторы релаксации, способствующие стабильности и быстрой сходимости решения. Для уравнения давления и момента значение релаксационного фактора составило 0,5, что обеспечивает баланс между точностью и устойчивостью решения. Для турбулентных моделей: релаксационный фактор равен 0,75, что позволяет корректно учитывать влияние турбулентных эффектов и ускорять процесс сходимости. Таким образом, принятая методика численного решения обеспечивает надежные результаты и является широко применяемым подходом в области вычислительной гидродинамики (CFD),

позволяя корректно моделировать процессы перехода от ламинарного течения к турбулентному.

Результаты и их обсуждение. Изменение коэффициента трения верхней части пластин показано на рис. 2. Коэффициент поверхностного трения определяется как отношение силы трения, действующей на поверхность пластины, к динамическому давлению свободного потока: $C_f = F / (0,5\rho U_0^2 S)$, где F — сила трения, действующая на поверхность пластины; S — площадь поверхности пластины, ориентированная вдоль потока.

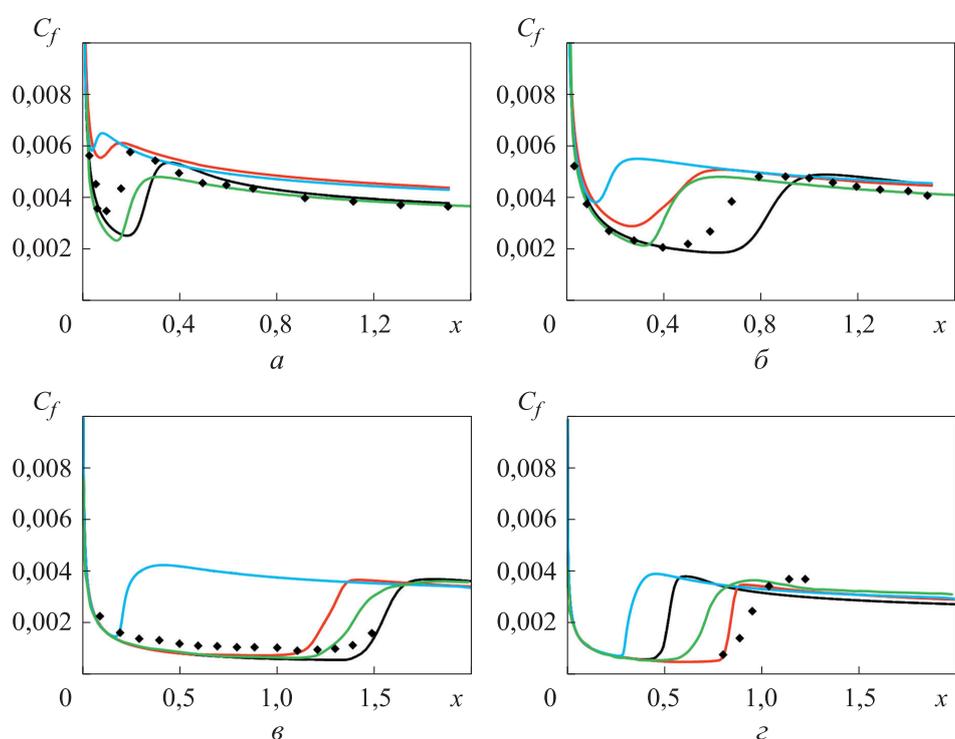


Рис. 2. Изменение коэффициента трения поверхности пластины для экспериментов 1 (а), 2 (б), 3 (в) и 4 (з) для моделей Transition $k-kl-\omega$ (—), Transition SST (—), RSM $S-\omega$ (—) и двухжидкостной модели Маликова (—), \blacklozenge — экспериментальные данные

Сравнение численных и экспериментальных данных по коэффициенту трения C_f вдоль плоской пластины при $Tu = 6,5\%$ показано на рис. 2, а. Модель Transition $k-kl-\omega$ хорошо совпадает с экспериментом на начальном участке ($x \approx 0-0,3$), но переоценивает C_f в зоне $x \approx 0,3-0,6$ и дает почти правильные (чуть завышенные) значения при больших значениях $x > 0,6$. Модель Transition SST завышает коэффициент трения во всем диапазоне,

особенно, при $x \approx 0-0,8$, предсказывая более ранний и интенсивный процесс перехода. Модель RSM $S-\omega$ предсказывает слишком ранний переход (при $x < 0,05$), а при $x > 0,5$ завышает значения коэффициента трения. Двухжидкостная модель Маликова завышает значение координаты точки начала перехода примерно в 2 раза, но в области развитого турбулентного течения (при $x > 0,6$) дает правильные значения C_f .

Сравнение численных и экспериментальных данных по коэффициенту трения C_f вдоль плоской пластины при $Tu = 3,5$ % показано на рис. 2, б. Модель Transition $k-kl-\omega$ хорошо согласуется с экспериментом на начальном участке ($x \approx 0-0,4$), но затягивает начало перехода примерно в 1,5 раза. В области развитой турбулентности коэффициент трения завышен. Модель Transition SST переоценивает коэффициент трения на всем диапазоне, предсказывая более ранний, но менее интенсивный переход, чем в эксперименте. Модель RSM $S-\omega$, как и в эксперименте 1, предсказывает слишком ранний переход ($x \approx 0,1-0,3$), а при $x > 1,1$ завышает коэффициент трения. Двухжидкостная модель Маликова предсказывает более ранний (примерно в 1,5 раза) и более интенсивный переход по сравнению с экспериментом, но дает точное значение коэффициента трения на участке развитой турбулентности.

Сравнение численных и экспериментальных данных по коэффициенту трения C_f вдоль плоской пластины при $Tu = 0,874$ % показано на рис. 2, в. Модель Transition $k-kl-\omega$ показывает удовлетворительное соответствие эксперименту на начальном участке ($x \approx 0-1,0$), но предсказывает немного более поздний и более интенсивный переход в турбулентный режим по сравнению с экспериментом. Модель Transition SST демонстрирует немного ускоренный ($x \approx 1,1$) и явно более интенсивный переход. Модель RSM $S-\omega$ дает слишком ранний и очень быстрый переход ($x \approx 0,2$). Двухжидкостная модель Маликова показывает немного более ранний переход ($x \approx 1,2$), но с правильным темпом нарастания трения.

Сравнение численных и экспериментальных данных по коэффициенту трения C_f вдоль плоской пластины при $Tu = 0,18$ % показано на рис. 2, г. Все модели занижают значение коэффициента трения в области развитой турбулентности. Модель Transition $k-kl-\omega$ показывает удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными в начальной зоне, но предсказывает более ранний переход в турбулентный режим ($x \approx 0,45-0,6$). Модель Transition SST демонстрирует правильное положение начала перехода ($x \approx 0,8$), но более быстрый переход. Модель RSM $S-\omega$ предсказывает слишком ранний переход ($x \approx 0,3-0,45$), двухжидкостная модель Маликова — более ранний переход с несколько замедленным темпом ($x \approx 0,5-1,0$).

Заключение. Проведено численное исследование перехода от ламинарного течения к турбулентному вдоль плоской пластины с использованием моделей Transition $k-kl-\omega$, Transition SST, RSM $S-\omega$ и двухжидкостной модели Маликова. Рассмотренные модели дают ошибки при описании ламинарно-турбулентного перехода. Наибольшие ошибки дает модель турбулентности RSM $S-\omega$, которая не содержит коррекций для описания перехода и может быть использована только для полностью развитых турбулентных течений. Модель Transition $k-kl-\omega$ затягивает переход при высоком уровне турбулентности внешнего потока и ускоряет его при низком уровне внешней турбулентности. При низких значениях Ti эта модель имеет тенденцию к недооценке коэффициента трения в развитой турбулентной зоне. Как правило, модель Transition SST предсказывает более ранний переходный процесс, а в условиях низкой турбулентности — слишком короткий участок перехода. Значения коэффициента трения в области развитой турбулентности завышены при большом значении Ti и занижены при низких значениях Ti . Двухжидкостная модель Маликова показала небольшое затягивание перехода при высоком уровне турбулентности потока, а в остальных тестах несколько ускорила начало перехода к турбулентности. В двух первых экспериментах она дала точные значения коэффициента трения на развитом турбулентном участке, но при низких значениях турбулентности входного потока дала заниженное значение коэффициента трения. Следует отметить, что эти результаты получены с использованием модели Маликова без включения в нее специальной модели ламинарно-турбулентного перехода. Результаты исследования могут быть полезны для оптимизации инженерных решений в области аэродинамики и теплообменных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rumsey C.L., Ying S.X. Prediction of high lift: review of present CFD capability. *Prog. Aerosp. Sci.*, 2002, vol. 38, iss. 2, pp. 145–180.
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0376-0421\(02\)00003-9](https://doi.org/10.1016/S0376-0421(02)00003-9)
- [2] Rudnik R., Frhr. v. Geyr H. The European high lift project EUROLIFT II-objectives, approach, and structure. *25th AIAA Applied Aerodynamics Conf.*, 2007, paper AIAA-2007-4296. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2007-4296>
- [3] Slotnick J.P., Hannon J.A., Chaffin M. Overview of the first AIAA CFD high lift prediction workshop. *25th AIAA Applied Aerodynamics Conf.*, 2011, paper AIAA-2011-862. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2011-862>
- [4] Fu S., Wang L. Progress in turbulence/transition modeling. *Advances in Mechanics*, 2007, vol. 37, no. 3, pp. 409–416.
DOI: <http://dx.doi.org/10.6052/1000-0992-2007-3-J2006-159>

- [5] Wang Y., Zhang Y., Li S., et al. Calibration of a γ - Re_θ transition model and its validation in low-speed flows with high-order numerical method. *Chin. J. Aeronaut.*, 2015, vol. 28, iss. 3, pp. 704–711. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2015.03.002>
- [6] Schlichting H., Gersten K. *Boundary-layer theory*. Springer, 2016.
- [7] Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., et al. Über die Entstehung der Turbulenz. In: *Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik*. Springer, 1961, pp. 812–816. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8_66
- [8] Abdol-Hamid K.S., Carlson J.-R., Rumsey C.L. Verification and validation of the k - k_L turbulence model in FUN3D and CFL3D codes. NASA/TM-2015-218968. Langley Research Center, 2015.
- [9] Salimipour E. A modification of the k - k_L - ω turbulence model for simulation of short and long separation bubbles. *Comput. Fluids*, 2019, vol. 181, pp. 67–76. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.01.003>
- [10] Langtry R.B., Menter F.R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. *AIAA J.*, 2009, vol. 47, no. 12, pp. 2894–2906. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.42362>
- [11] Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., et al. A correlation-based transition model using local variables — part I: model formulation. *J. Turbomach.*, 2006, vol. 128, no. 3, pp. 413–422. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2184352>
- [12] Menter F.R., Langtry R.B., Völker S. Transition modelling for general purpose CFD codes. *Flow Turbulence Combust.*, 2006, vol. 77, iss. 1-4, pp. 277–303. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10494-006-9047-1>
- [13] Malikov Z. Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Appl. Math. Model.*, 2020, vol. 82, pp. 409–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.047>
- [14] Speziale C.G. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 107–157. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543>
- [15] Eisfeld B., Rumsey C., Togiti V. Verification and validation of a second-moment-closure model. *AIAA J.*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 1524–1541. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J054718>
- [16] Eisfeld B., Rumsey C., Togiti V. Erratum: verification and validation of a second-moment-closure model. *AIAA J.*, 2016, vol. 54, no. 9, pp. 2927–2928. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J055336>
- [17] Александров А.А., Девисилов В.А., Шарай Е.Ю. и др. Влияние геометрических параметров рабочего канала гидродинамического фильтра с защитной перегородкой на структуру течения среды. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 2 (77), с. 23–38. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-2-23-38>

[18] Носатов В.В., Семенёв П.А. Расчетно-экспериментальное исследование сверхзвукового турбулентного отрывного течения и локальной теплоотдачи в плоском канале с внезапным расширением. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 1 (52), с. 66–77. EDN: RXKULN

[19] Аксенов А.Н., Шабаров А.Б. Демпфирование коэффициента турбулентной вязкости при расчете течений в осевых трансзвуковых компрессорах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2010, № 2 (37), с. 31–39. EDN: MOTLLH

[20] Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двухжидкостной модели турбулентности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 24–39. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-24-39>

[21] Мадалиев М.Э., Маликов З.М. Численное моделирование турбулентных потоков на основе современных моделей турбулентности. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2022, т. 62, № 10, с. 1723–1739. EDN: SXUUDY. DOI: <https://doi.org/10.31857/S004446692210009X>

Мадалиев Муродил Эркинжон Угли — докторант ИМСС им. М.Т. Уразбаева АН РУз (Республика Узбекистан, 100007, Ташкент, ул. Дурман, д. 40); доцент кафедры «Строительство инженерных коммуникаций» ФерГТУ (Республика Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Фергана, д. 86).

Орзиматов Жахонгир Тажалиевич — заведующий кафедрой «Строительство инженерных коммуникаций» ФерГТУ (Республика Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Фергана, д. 86).

Юнусалиев Элмурод Мухаммадюкубович — д-р техн. наук, доцент кафедры «Строительства зданий и сооружений» ФерГТУ (Республика Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Фергана, д. 86).

Насирова Намунабону Азамат Кизи — докторант лаборатории «Механика жидкости и газа» ИМСС им. М.Т. Уразбаева АН РУз (Республика Узбекистан, 100007, Ташкент, ул. Дурман, д. 40).

Мухаммадёкубов Хусанбой Элмурод Угли — докторант кафедры «Электроника и приборостроение» ФерГТУ (Республика Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Фергана, д. 86).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мадалиев М.Э., Орзиматов Ж.Т., Юнусалиев Э.М. и др. Сравнение моделей турбулентности для задачи обтекания плоской пластины в области перехода от ламинарного течения к турбулентному. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 6 (123), с. 4–20. EDN: WRNQQR

**COMPARING TURBULENCE MODELS FOR THE PROBLEM
OF A FLOW PAST A FLAT PLATE IN THE REGION
OF TRANSITION FROM LAMINAR TO THE TURBULENT FLOW**

M.E. Madaliev^{1,2}

m.e.madaliyev@ferpi.uz

Zh.T. Orzimatov²

E.M. Yunusaliev²

N.A. Nasirova¹

Kh.E. Mukhammadekubov²

¹ IMSSS n.a. M.T. Urazbaeva AS RUz, Tashkent, Republic of Uzbekistan

² FerSTU, Fergana, Republic of Uzbekistan

Abstract

The article presents numerical simulation of transition from laminar to the turbulent flow; it is one of the most important and challenging problems in the modern computational fluid dynamics (CFD). It applies various approaches to simulating transitional flows, including the $k\text{-}kl\text{-}\omega$ turbulence model, Transition SST, Reynolds stress model (RSM $S\text{-}\omega$), and the Malikov two-fluid turbulence model. These models describe transient processes, and take into account specific features of the turbulent flow. Numerical results are compared with the experimental data at various turbulence intensity levels to assess these models accuracy and applicability. Analysis demonstrates that the Malikov two-fluid model without additional corrections provides results comparable to the other turbulence models that use additional corrections to describe transition from laminar to the turbulent flow. The obtained results could be introduced to improve the numerical simulation methods in aerodynamics, heat transfer processes, and other engineering applications, where an accurate description of the transient turbulent regimes is important

Keywords

Navier — Stokes equations, SST model, $k\text{-}kl\text{-}\omega$, Reynolds stress model, ANSYS, two-fluid model

Received 06.02.2025

Accepted 01.07.2025

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Rumsey C.L., Ying S.X. Prediction of high lift: review of present CFD capability. *Prog. Aerosp. Sci.*, 2002, vol. 38, iss. 2, pp. 145–180. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0376-0421\(02\)00003-9](https://doi.org/10.1016/S0376-0421(02)00003-9)
- [2] Rudnik R., Frhr. v. Geyr H. The European high lift project EUROLIFT II-objectives, approach, and structure. *25th AIAA Applied Aerodynamics Conf.*, 2007, paper AIAA-2007-4296. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2007-4296>

- [3] Slotnick J.P., Hannon J.A., Chaffin M. Overview of the first AIAA CFD high lift prediction workshop. *25th AIAA Applied Aerodynamics Conf.*, 2011, paper AIAA-2011-862. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2011-862>
- [4] Fu S., Wang L. Progress in turbulence/transition modeling. *Advances in Mechanics*, 2007, vol. 37, no. 3, pp. 409–416.
DOI: <http://dx.doi.org/10.6052/1000-0992-2007-3-J2006-159>
- [5] Wang Y., Zhang Y., Li S., et al. Calibration of a γ - Re_θ transition model and its validation in low-speed flows with high-order numerical method. *Chin. J. Aeronaut.*, 2015, vol. 28, iss. 3, pp. 704–711. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2015.03.002>
- [6] Schlichting H., Gersten K. *Boundary-layer theory*. Springer, 2016.
- [7] Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., et al. Über die Entstehung der Turbulenz. In: *Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik*. Springer, 1961, pp. 812–816.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8_66
- [8] Abdol-Hamid K.S., Carlson J.-R., Rumsey C.L. Verification and validation of the k - k_L turbulence model in FUN3D and CFL3D codes. NASA/TM-2015-218968. Langley Research Center, 2015.
- [9] Salimipour E. A modification of the k - k_L - ω turbulence model for simulation of short and long separation bubbles. *Comput. Fluids*, 2019, vol. 181, pp. 67–76.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.01.003>
- [10] Langtry R.B., Menter F.R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. *AIAA J.*, 2009, vol. 47, no. 12, pp. 2894–2906. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.42362>
- [11] Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., et al. A correlation-based transition model using local variables — part I: model formulation. *J. Turbomach.*, 2006, vol. 128, no. 3, pp. 413–422. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2184352>
- [12] Menter F.R., Langtry R.B., Völker S. Transition modelling for general purpose CFD codes. *Flow Turbulence Combust.*, 2006, vol. 77, iss. 1-4, pp. 277–303.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10494-006-9047-1>
- [13] Malikov Z. Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Appl. Math. Model.*, 2020, vol. 82, pp. 409–436.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.047>
- [14] Speziale C.G. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 107–157.
DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.23.010191.000543>
- [15] Eisfeld B., Rumsey C., Togiti V. Verification and validation of a second-moment-closure model. *AIAA J.*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 1524–1541.
DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J054718>
- [16] Eisfeld B., Rumsey C., Togiti V. Erratum: verification and validation of a second-moment-closure model. *AIAA J.*, 2016, vol. 54, no. 9, pp. 2927–2928.
DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J055336>

[17] Aleksandrov A.A., Devisilov V.A., Sharay E.Yu., et al. Effect of geometric parameters of working channel of hydrodynamic filter with protective baffle on medium flow structure. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 2 (77), pp. 23–38 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-2-23-38>

[18] Nosatov V.V., Semenyov P.A. Computational and experimental study of the supersonic turbulent detached flow and local heat emission in a flat duct with a sudden expansion. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2014, no. 1 (52), pp. 66–77 (in Russ.). EDN: RXKULN

[19] Aksenov A.N., Shabarov A.B. Damping of turbulent viscosity factor in calculation of flows in axial transonic compressors. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2010, no. 2 (37), pp. 31–39 (in Russ.).

EDN: MOTLLH

[20] Malikov Z.M., Madaliev M.E. New two-fluid turbulence model based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 24–39 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-24-39>

[21] Madaliev M.E., Malikov Z.M. Numerical simulation of turbulent flows based on modern turbulence models. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 10, pp. 1707–1722. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542522100098>

Madaliev M.E. — Doctoral, IMSSS n.a. M.T. Urazbaeva AS RUz (Durman ul. 40, Tashkent, 100007 Republic of Uzbekistan); Assoc. Professor, Department of Construction of Engineering Communications, FerSTU (Fergana ul. 86, Fergana, 150100 Republic of Uzbekistan).

Orzimатов Zh.T. — Head of the Department of Construction of Engineering Communications, FerSTU (Fergana ul. 86, Fergana, 150100 Republic of Uzbekistan).

Yunusaliev E.M. — Dr. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Construction of Buildings and Structures, FerSTU (Fergana ul. 86, Fergana, 150100 Republic of Uzbekistan).

Nasirova N.A. — Doctoral, Laboratory of Mechanics of Fluid and Gas, IMSSS n.a. M.T. Urazbaeva AS RUz (Durman ul. 40, Tashkent, 100007 Republic of Uzbekistan).

Mukhammadekubov Kh.E. — Doctoral, Department of Electronics and Instrumentation, FerSTU (Fergana ul. 86, Fergana, 150100 Republic of Uzbekistan).

Please cite this article in English as:

Madaliev M.E., Orzimатов Zh.T., Yunusaliev E.M., et al. Comparing turbulence models for the problem of a flow past a flat plate in the region of transition from laminar to the turbulent flow. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 6 (123), pp. 4–20 (in Russ.). EDN: WRNQQR