

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ  
ЧАСТИЧНО КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ПОЛИМЕРА  
ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ  
С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТЯМИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

**В.К. Семенов  
Е.К. Петриков**

semenov.vk@bmstu.ru  
petrikove@bmstu.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

---

**Аннотация**

Представлены результаты испытаний полиэтилена марки 2НТ11-9 (ПЭ-100) на одноосное растяжение для широкого диапазона значений скорости нагружения при сравнительно невысоких деформациях (< 15...20 %). Для изучения процесса кратковременной (неустановившейся) ползучести приведены релаксационные кривые для различных уровней напряжения. Время наблюдения за процессом релаксации при испытаниях 1 ч. Исследована зависимость остаточных деформаций в материале от достигнутых при прямом нагружении полных деформаций. Для описания полученного набора экспериментальных данных предложены определяющие соотношения, учитывающие деформационное размягчение материала и его ползучесть с сохранением гипотезы о малости (линейности) деформаций. Подробно описан способ определения числовых значений параметров предлагаемой модели поведения материала. Значения упругих параметров модели установлены по равновесной кривой растяжения, а вязких — по кривым релаксации. Показано, что построенная модель с найденным таким образом единым набором числовых значений параметров позволяет удовлетворительно описать кривые одноосного растяжения материала при различных значениях скорости деформирования. В общем случае представленная модель поведения материала может быть использована при анализе кратковременной прочности изделий из частично кристаллических полимеров

**Ключевые слова**

*Частично кристаллический полимер, полиэтилен, одноосное растяжение, релаксация, вязкоупругопластическая модель*

Поступила 29.11.2024  
Принята 23.06.2025  
© Автор(ы), 2025

**Введение.** Аморфно-кристаллический полимер представляет собой среду, которая состоит из кристаллической и аморфной фаз. Кристаллическая фаза образована упорядоченными сегментами макромолекул, аморфная — частями макромолекул, не вошедшими в кристаллиты и соединяющими последние между собой. Для полиэтилена высокой плотности доля кристаллической фазы относительно общей массы полимера (степень кристалличности) составляет примерно 60 %, чем объясняется высокий начальный модуль упругости материала по сравнению с резиноподобными средами, состоящими в основном из аморфной фазы. В процессе деформирования аморфно-кристаллического полимера до сравнительно небольших значений деформации (< 15...20 %) связность между соседними кристаллитами легко нарушается, что приводит к сильному размягчению полимера. При этом его модуль становится сопоставимым с модулем упругости аморфной фазы [1–6]. Схожий эффект, эффект Маллинза, наблюдается при деформировании резин [7–11]. Он проявляется в значительном снижении жесткости материала при повторном нагружении до деформаций, меньших максимально достигнутых при первичном нагружении, и в сохранении жесткости при деформациях, превышающих ранее достигнутый максимум. В случае циклического нагружения материала заданным законом изменения напряжения этот эффект приводит к постепенному уменьшению модуля накопления и увеличению амплитуды деформирования материала [11–13].

Еще одной особенностью поведения аморфно-кристаллического полимера является его способность накапливать пластические деформации непрерывно с начала нагружения без заметного снижения степени кристалличности [4, 5]. Экспериментально установлено, что характер роста пластических деформаций не меняется после перехода через предел текучести [1, 2].

Особые трудности при проведении прочностных расчетов изделий из аморфно-кристаллических полимеров вызывает вопрос корректного учета эффектов ползучести, которые у рассматриваемых материалов весьма сильно проявляются во всем рабочем диапазоне значений температуры. В настоящее время не существует единого устоявшегося подхода к решению этой задачи [3].

*Цель работы* — построение одномерной феноменологической модели поведения аморфно-кристаллического полимера, с помощью которой можно одновременно описать как эффект деформационного размягчения материала, так и эффект ползучести.

**Построение математической модели поведения материала и подбор параметров модели.** Схематично модель поведения аморфно-кристаллического полимера под нагрузкой показана на рис. 1. Она включает в себя два звена, соединенных параллельно. Первое звено, равновесное, описывает поведение материала при квазистатическом нагружении, т. е. при нагружении, происходящем с незаметно малой (в пределе нулевой) скоростью деформирования. Физические величины, описывающие поведение этого звена, обозначены индексом «*eq*». Равновесное звено состоит из нелинейного упругого (пружины) и пластического элементов. Второе звено предназначено для описания неравновесного (возмущенного) состояния, которое возникает в случае нагружения материала с некоторой конечной скоростью. Физические величины, относящиеся к этому звену, обозначены индексом «*neq*». Неравновесное звено включает в себя линейный упругий и нелинейный вязкий (демпфер) элементы.

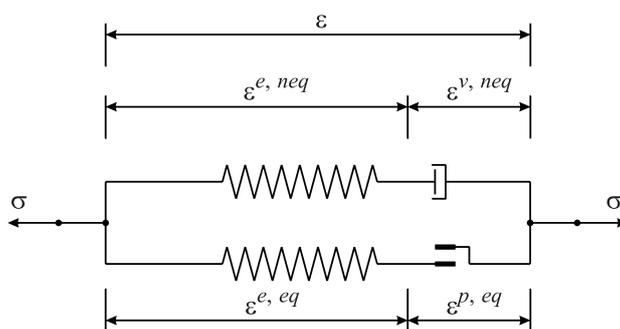


Рис. 1. Модель поведения аморфно-кристаллического полимера

Такое механическое представление основано на следующем экспериментальном наблюдении [1, 2]. При деформировании полимерного образца с разными скоростями до одного уровня деформации и последующей релаксации напряжений образец приходит к одному и тому же конечному равновесному состоянию. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 2. Черным цветом показаны диаграммы растяжения материала для двух скоростей деформирования  $\dot{\epsilon}_1$  и  $\dot{\epsilon}_2$ , причем  $\dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_1$ . Полные напря-

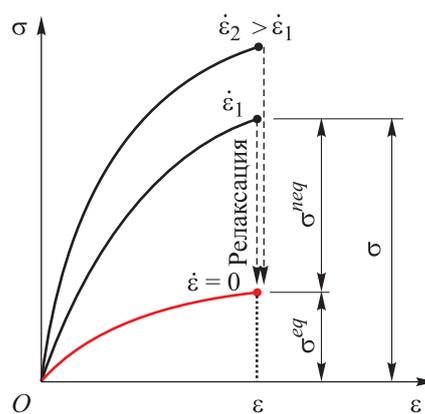


Рис. 2. Диаграммы одноосного растяжения полиэтилена

жения  $\sigma$ , достигаемые при скорости деформирования  $\dot{\varepsilon}_2$ , выше, чем при скорости деформирования  $\dot{\varepsilon}_1$ . Полные деформации  $\varepsilon$  одни и те же. В процессе релаксации достигнутые при прямом нагружении напряжения убывают до одного и того же равновесного значения  $\sigma^{eq}$ . Часть полного напряжения, которая исчезает в процессе релаксации, будем называть неравновесной составляющей  $\sigma^{neq}$  (в зарубежных работах часто используется термин *overstress*, см., например, [14–17]). Таким образом,  $\sigma = \sigma^{eq} + \sigma^{neq}$ , что и предполагает параллельное соединение равновесного и неравновесного звеньев модели (см. рис. 1).

Для определения вида равновесной кривой  $\sigma^{eq}(\varepsilon)$  проведены эксперименты на одноосное растяжение с последующей релаксацией напряжений при различных уровнях деформаций на образцах полиэтилена марки 2НТ11-9. Механические испытания выполнены на универсальной испытательной машине *Zwick Z50*, оснащенной электромеханическим датчиком для контроля продольных деформаций в активной зоне образца. Образцы представляли собой лопатки типа 1 (ГОСТ 11262–2017, толщина 1 мм), полученные вырубкой штампом-просечкой из прессованных пластин. Скорость деформирования образцов  $0,125 \text{ мин}^{-1}$ . Температура испытания поддерживалась постоянной ( $23 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Продолжительность наблюдения за процессом релаксации напряжений составляла 1 ч. Полученные диаграммы релаксации показаны на рис. 3.

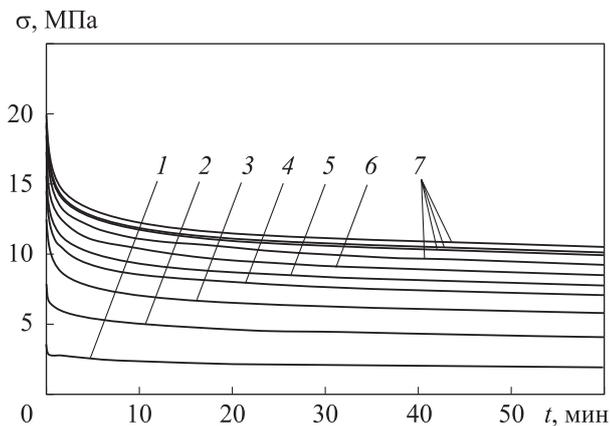


Рис. 3. Кривые релаксации ПЭ 2НТ11-9 при  $\varepsilon = 0,5$  (1), 1,0 (2), 2,0 (3), 4,0 (4), 5,0 (5) 6,0 % (6) и 9,0, 11, 13, 15 % (7)

Значения напряжений, полученные в конце релаксационного процесса, в зависимости от деформаций показаны красными точками (рис. 4). Эти точки принадлежат равновесной кривой.

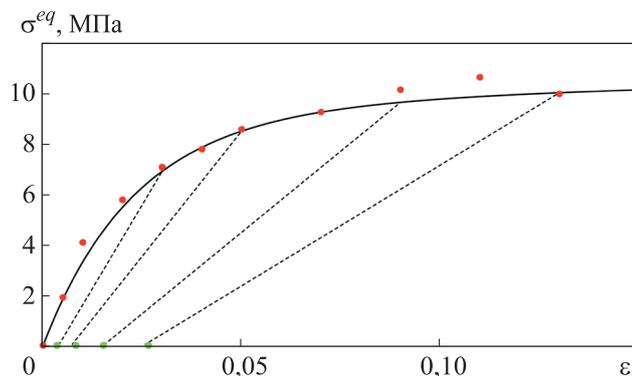


Рис. 4. Равновесная кривая:

- — экспериментальные значения напряжений, снятые после релаксации;
- — экспериментальные значения пластических деформаций, полученных после разгрузки; сплошная линия — теоретическая аппроксимация; штриховая — теоретические кривые разгрузки

Математически полученная кривая хорошо аппроксимируется выражением [18, 19]:

$$\sigma^{eq} = g(q^{e,eq}) E_{0,eq} \varepsilon^{e,eq}, \quad (1)$$

где  $g(q^{e,eq})$  — функция, характеризующая сплошность материала;  $E_{0,eq}$  — модуль упругости неповрежденного материала. Функция  $g(q^{e,eq})$  зависит от максимальной по абсолютной величине упругой деформации  $\varepsilon^{e,eq}$ , которая достигается за время  $s$ , прошедшее от начала нагружения ( $s = -\infty$ ) до текущего момента ( $s = t$ ):  $q^{e,eq} = \max_{s \in (-\infty, t]} (|\varepsilon^{e,eq}(s)|)$ , и изменяется в пределах от 1 (когда сплошность материала не нарушена) до некоторого значения  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha \leq 1$ , характеризующего сплошность сильно деформированного материала. Функцию  $g(q^{e,eq})$  предлагается задавать в виде

$$g(q^{e,eq}) = \alpha_e + (1 - \alpha_e) \frac{[1 - \exp(-\beta_e q^{e,eq})]}{\beta_e q^{e,eq}}, \quad (2)$$

где  $\alpha_e = E_a / E_{0,eq}$  ( $E_a$  — модуль упругости аморфной части полимера);  $\beta_e$  — параметр модели материала.

Соотношения (1), (2) следует дополнить критерием начала накопления повреждений. Поврежденность материала увеличивается только

в том случае, если в текущий момент времени  $t$  выполняется условие равенства по абсолютной величине упругих деформаций параметру  $q^{e,eq}$

$$|\varepsilon^{e,eq}(t)| - q^{e,eq} = 0 \quad (3)$$

и абсолютная величина упругих деформаций продолжает нарастать, т. е.

$$\frac{d\varepsilon^{e,eq}(t)}{dt} \text{sign}(\varepsilon^{e,eq}(t)) > 0, \quad (4)$$

где  $\text{sign}(\cdot)$  — функция, определяющая знак аргумента. В противном случае роста поврежденности не происходит.

Соотношения (1)–(4) описывают нелинейное упругое поведение пружины равновесного звена (см. рис. 1).

Параметры модели  $\alpha_e, \beta_e, E_{0,eq}$  определяются после ответа на вопрос о том, какую долю от полных деформаций составляет пластическая величина  $\varepsilon^{p,eq}$ , и вычисления упругих деформаций

$$\varepsilon^{e,eq} = \varepsilon - \varepsilon^{p,eq}. \quad (5)$$

Для определения  $\varepsilon^{p,eq}$  проведен отдельный эксперимент, подобный описанному в [1, 2]. Образцы материала растягивались до заданной деформации  $\varepsilon$  со скоростью  $0,125 \text{ мин}^{-1}$ , разгружались с той же скоростью и выдерживались при нулевом напряжении в течение длительного времени для исключения деформаций ползучести (до завершения процесса обратной ползучести). Затем остаточная деформация принималась за деформацию пластичности. Результаты эксперимента для  $\varepsilon = 5$  и  $15\%$  показаны на рис. 5.

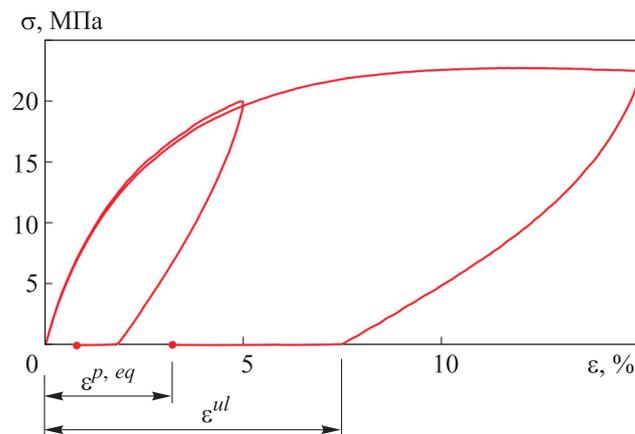
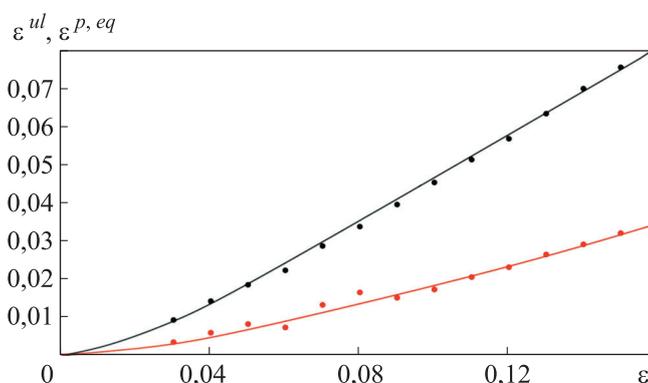


Рис. 5. Результаты эксперимента по определению пластической деформации

Экспериментальные точки, соответствующие деформациям непосредственно после разгрузки  $\varepsilon^{ul}$  и завершения процесса ползучести  $\varepsilon^{p,eq}$ , приведены на рис. 6. При малых значениях полных деформаций существует некоторая нелинейность, но после достижения деформации 4 % экспериментальные точки весьма хорошо укладываются на прямые линии. Полученные результаты отражают тот факт, что предел текучести для аморфно-кристаллических полимеров не является тем напряжением, при котором в образце начинают интенсивно накапливаться пластические деформации, а представляет собой величину, характеризующую интенсивное деформационное размягчение материала.



**Рис. 6.** Зависимость деформации после разгрузки  $\varepsilon^{ul}$  (•) и пластической деформации  $\varepsilon^{p,eq}$  (•) от полной деформации

Для того чтобы учесть начальную нелинейность поведения материала, зависимость пластической деформации от полной можно задать квадратичной функцией

$$\varepsilon^{p,eq} = \chi_1 \varepsilon + \chi_2 \varepsilon^2, \quad (6)$$

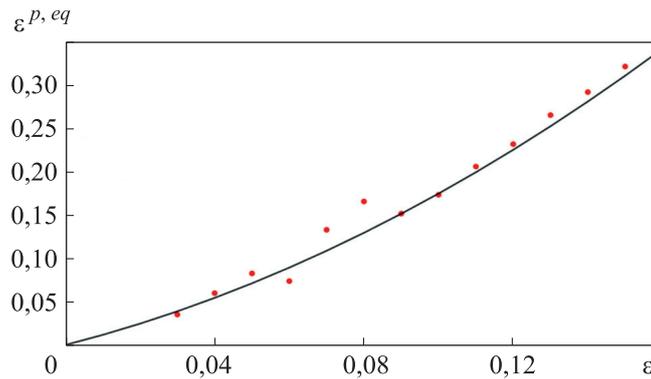
где  $\chi_1, \chi_2$  — параметры материала.

Кривая, построенная по (6) для  $\chi_1 = 0,11$  и  $\chi_2 = 0,65$ , показана на рис. 7. Заметно достаточно близкое соответствие экспериментальным результатам.

Найденные значения пластических деформаций позволяют по (5) вычислить упругие деформации  $\varepsilon^{e,eq}$  и подобрать параметры  $\alpha_e, \beta_e, E_{0,eq}$  для описания равновесной кривой. Подбор параметров можно выполнить следующим образом. Производная равновесного напряжения по полной деформации в начале нагружения определяется как

$$\left. \frac{d\sigma^{eq}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = E_{0,eq} (1 - \chi_1).$$

Эту величину можно получить по первым экспериментальным точкам (см. рис. 4). Она равна 410 МПа. Следовательно,  $E_{0,eq} = 410 \text{ МПа} / (1 - 0,11) \cong \cong 460 \text{ МПа}$ .



**Рис. 7.** Зависимость пластической деформации от полной:

• — результаты эксперимента; сплошная линия — результат аппроксимации

Произведение параметров  $\alpha_e E_{0,eq}$  характеризует угол наклона равновесной кривой к оси абсцисс при больших значениях деформации. Поскольку экспериментальных данных, полученных при деформациях более 10 %, недостаточно для определения этого параметра из наклона равновесной кривой, предложено задавать параметр  $\alpha$ , опираясь на значение модуля упругости аморфной части, которое должно быть близко к модулю упругости резиноподобных материалов. Примем  $E_a = 6 \text{ МПа}$ , тогда  $\alpha_e = = 6 \text{ МПа} / 460 \text{ МПа} = 0,0130$ .

Оставшийся неопределенным параметр  $\beta_e$  подбирается так, чтобы экспериментальная и теоретическая кривые были как можно ближе друг к другу. В результате установлено значение  $\beta_e = 48$ . Результат аппроксимации экспериментальных данных приведен на рис. 4, также показаны кривые разгрузки материала, которые заканчиваются при нулевом напряжении в точках, близких к экспериментально найденным соответствующим пластическим деформациям. Изменение наклона штриховых линий показывает степень размягчения материала.

Для описания изменения неравновесных напряжений  $\sigma^{neq}$ , возникающих в вязкоупругом звене модели (см. рис. 1), используется теория

течения с функцией напряжения Надаи [20, 21]. В стандартном виде это уравнение для скорости изменения вязкой деформации

$$\frac{d\varepsilon^{v, neq}}{dt} = \frac{1}{\xi} \sinh\left(\frac{\sigma^{neq}}{\eta}\right), \quad (7)$$

где  $\xi, \eta$  — параметры материала. Однако такой вид уравнения не позволяет описать все кривые релаксации на рис. 3, задаваясь одним значением параметров  $\xi, \eta$ .

Подбирая параметры так, чтобы описать как можно точнее каждую кривую релаксации в отдельности, можно прийти к выводу, что параметр  $\eta$  зависит от достигнутого в процессе нагружения максимального напряжения, а произведение  $\xi\eta$  остается постоянным. Здесь предположено, что

$$\eta = \eta_0 g\left(|\varepsilon^{v, neq}|\right); \quad \xi = \frac{\xi_0}{g\left(|\varepsilon^{v, neq}|\right)}, \quad (8)$$

где  $\xi_0, \eta_0$  — новые параметры материала;  $g\left(|\varepsilon^{v, neq}|\right)$  — функция,

$$g\left(|\varepsilon^{v, neq}|\right) = \alpha_v |\varepsilon^{v, neq}| + \frac{1 - \alpha_v}{\beta_v} \left[1 - \exp\left(-\beta_v |\varepsilon^{v, neq}|\right)\right], \quad (9)$$

$\alpha_v, \beta_v$  — параметры материала.

В результате подстановки (8) в (7) получено выражение

$$\frac{d\varepsilon^{v, neq}}{dt} = \frac{g\left(|\varepsilon^{v, neq}|\right)}{\xi_0} \sinh\left[\frac{1}{\eta_0} \frac{\sigma^{neq}}{g\left(|\varepsilon^{v, neq}|\right)}\right]. \quad (10)$$

Следует отметить, что при малых деформациях гиперболический синус можно заменить его аргументом и упростить полученную нелинейную зависимость, приведя ее к классическому виду для линейного демпфера

$$\frac{d\varepsilon^{v, neq}}{dt} = \frac{\sigma^{neq}}{\xi_0 \eta_0},$$

где произведение параметров  $\xi_0 \eta_0$  представляет собой динамическую вязкость демпфера.

Упругий элемент вязкого звена предназначен для описания поведения материала при быстром приложении нагрузки, когда демпфер не успевает отреагировать и запирается (не успевают проявиться вязкие деформации). Поведение упругого элемента вязкого звена описывается законом Гука

$$\sigma^{neq} = E_v \varepsilon^{e,neq}, \quad (11)$$

где  $E_v$  — модуль упругости вязкого звена.

Используем (10), (11) для описания процесса релаксации напряжений. Скорость полной деформации материала:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^{e,neq}}{dt} + \frac{d\varepsilon^{v,neq}}{dt}$$

или, учитывая, что рассматривается одноосное растяжение, при котором  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_v} \frac{d\sigma^{neq}}{dt} + \frac{g(\varepsilon^{v,neq})}{\xi_0} \sinh \left[ \frac{1}{\eta_0} \frac{\sigma^{neq}}{g(\varepsilon^{v,neq})} \right].$$

Исключая из полученного уравнения вязкую деформацию  $\varepsilon^{v,neq} = \varepsilon - \varepsilon^{e,neq} = \varepsilon - \sigma^{neq} / E_v$ , получаем уравнение, связывающее полную деформацию и неравновесные напряжения:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_v} \frac{d\sigma^{neq}}{dt} + \frac{g(\varepsilon - \sigma^{neq} / E_v)}{\xi_0} \sinh \left[ \frac{1}{\eta_0} \frac{\sigma^{neq}}{g(\varepsilon - \sigma^{neq} / E_v)} \right].$$

В процессе релаксации полная деформация остается постоянной. Это условие приводит к дифференциальному соотношению

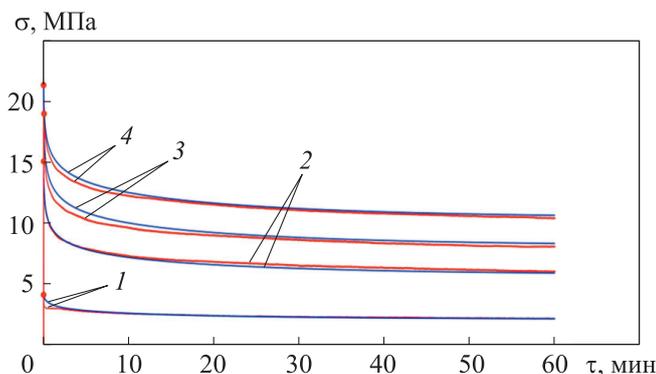
$$\frac{d\sigma^{neq}}{dt} = -E_v \frac{g(\varepsilon - \sigma^{neq} / E_v)}{\xi_0} \sinh \left[ \frac{1}{\eta_0} \frac{\sigma^{neq}}{g(\varepsilon - \sigma^{neq} / E_v)} \right], \quad (12)$$

из которого при заданном значении деформации  $\varepsilon$  определяются неравновесные напряжения. Начальное условие интегрирования соотношения (12) следующее: при  $t = 0$ :  $\sigma^{neq}(0) = \sigma(0) - \sigma^{eq}$ , где  $\sigma(0)$  — напряжение, достигнутое в процессе прямого нагружения с заданной скоростью деформирования.

Подбор численного значения параметра  $\xi_0$  затруднителен, поскольку может достигать довольно больших значений. Чтобы облегчить задачу поиска значения этого параметра, введем новую величину  $\tau = \xi_0 \eta_0 / E_v$ , которая является временем релаксации, характеризующим скорость убывания напряжения.

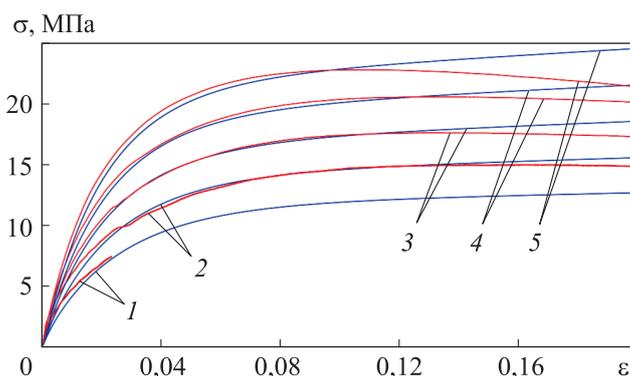
Теоретические и экспериментальные кривые релаксации приведены на рис. 8. Теоретические кривые построены для значений параметров

$\eta_0 = 70$  МПа,  $\tau = 24$  мин,  $E_v = 700$  МПа. Параметры, входящие в (9), принимались равными  $\alpha_v = 0,0143$ ,  $\beta_v = 62$ . Совпадение полученных результатов удовлетворительное.



**Рис. 8.** Теоретические (—) и экспериментальные (—) кривые релаксации напряжений для  $\varepsilon = 0,5$  (1), 2,0 (2), 4,0 (3) и 15 % (4)

**Результат математического описания кривых одноосного растяжения материала.** Экспериментальные кривые одноосного растяжения, полученные для ПЭ 2НТ11-9 при различных значениях скорости деформирования и температуре 23 °С, приведены на рис. 9. На рисунке также представлены теоретические зависимости, построенные для найденных параметров модели поведения материала. При деформациях более 10 % теоретические кривые расходятся с экспериментальными. Убывание экспериментальных кривых объясняется тем, что после достижения максимального напряжения (предела текучести) образцы материала начинают



**Рис. 9.** Теоретические (—) и экспериментальные (—) кривые деформирования ПЭ 2НТ11-9 при  $\dot{\varepsilon} = 0,000125$  (1), 0,00125 (2), 0,0125 (3), 0,125 (4), 1,25 мин<sup>-1</sup> (5)

сильно утоняться с последующим образованием шейки. Это состояние соответствует началу перестройки микроструктуры материала, которая не описывается представленными в работе соотношениями. При проектировании деталей из аморфно-кристаллических полимеров не допускают появления таких высоких деформаций, поскольку они приводят к весьма быстрому разрушению материала при работе изделия в условиях заданных напряжений.

Отметим, что мгновенный модуль материала по представленной модели равен сумме вязкого модуля (700 МПа) и начального модуля равновесного звена (460 МПа) до деформационного размягчения:  $E_0 = E_v + E_{0,eq} = 700 + 460 = 1160$  МПа. Это значение нельзя отождествлять с модулем, который получается при измерении по ГОСТ 34370–2017, поскольку последний определяется при конечной скорости деформирования. Если стандартный образец нагружать со скоростью  $0,01 \text{ мин}^{-1}$  и определять модуль упругости в диапазоне значений деформации  $0,05 \dots 0,25 \%$  по углу наклона секущей, тогда по модели имеем 808 МПа. Экспериментальное среднее значение, полученное в работе, составляет 845 МПа, что весьма близко к вычисленному значению.

**Заключение.** Сформулированы определяющие соотношения, описывающие поведение аморфно-кристаллического полимера при прямом нагружении. Показано, что, используя единый набор значений параметров представленной вязкоупругопластической модели материала, можно с достаточной для инженерной практики точностью описать кривые одноосного растяжения аморфно-кристаллического полимера при разных значениях скорости деформирования и кривые релаксации, полученные при различных деформациях материала.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hong K., Rastogi A., Strobl G. A model treating tensile deformation of semicrystalline polymers: quasi-static stress-strain relationship and viscous stress determined for a sample of polyethylene. *Macromolecules*, 2004, vol. 37, iss. 26, pp. 10165–10173. DOI: <https://doi.org/10.1021/ma049174h>
- [2] Hong K., Strobl G. Моделирование растяжения полиэтилена: влияние температуры и степени кристалличности. *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, 2008, т. 50, № 5, с. 760–772. EDN: IJUULB
- [3] Oshmyan V., Patlazhan S., Remond Y. Simulation of small-strain deformations of semi-crystalline polymer: coupling of structural transformations with stress-strain response. *J. Mater. Sci.*, 2004, vol. 39, no. 11, pp. 3577–3586. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JMISC.0000030709.19754.28>

- [4] Ошмян В.Г., Патлажан С.А. Влияние структурных изменений и нелинейности пластического течения на малые деформации частично кристаллических полимеров. *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, 2005, т. 47, № 4, с. 600–607. EDN: HSAGGH
- [5] Ошмян В.Г., Патлажан С.А. Принципы структурно-механического моделирования полимеров и композитов. *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, 2006, т. 48, № 9, с. 1691–1702. EDN: HVDYXL
- [6] Патлажан С.А. Деформационное поведение полиэтилена высокой плотности ниже предела текучести: влияние скорости разгрузки. *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, 2008, т. 50, № 5, с. 789–796. EDN: IJUULV
- [7] Mullins L. Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chemistry & Technology*, 1948, vol. 21, iss. 2, pp. 281–300. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3546914>
- [8] Mullins L., Tobin N.R. Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1965, vol. 9, iss. 9, pp. 2993–3009. DOI: <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090906>
- [9] Harwood J.A.C., Mullins L., Payne A.R. Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part II. Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1965, vol. 9, iss. 9, pp. 3011–3021. DOI: <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090907>
- [10] Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect. *Eur. Polym. J.*, 2009, vol. 45, iss. 3, pp. 601–612. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017>
- [11] Govindjee S., Simo J.C. Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, iss. 14-15, pp. 1737–1751. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90167-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90167-R)
- [12] Hassan T., Çolak O.U., Clayton P.M. Uniaxial strain and stress-controlled cyclic responses of ultrahigh molecular weight polyethylene: experiments and model simulations. *J. Eng. Mater. Technol.*, 2011, vol. 133, iss. 2, art. 021010. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003109>
- [13] Avanzini A., Gallina D. Effect of cyclic strain on the mechanical behavior of a thermoplastic polyurethane. *J. Eng. Mater. Technol.*, 2011, vol. 133, no. 2, art. 021005. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003101>
- [14] Kitagawa M., Mori T., Matsutani T. Rate-dependent nonlinear constitutive equation of polypropylene. *J. Polym. Sci. B*, 1989, vol. 27, iss. 1, pp. 85–95. DOI: <https://doi.org/10.1002/polb.1989.090270106>
- [15] Kitagawa M., Takagi H. Nonlinear constitutive equation for polyethylene under combined tension and torsion. *J. Polym. Sci. B*, 1990, vol. 28, iss. 11, pp. 1943–1953. DOI: <https://doi.org/10.1002/polb.1990.090281105>
- [16] Liu M., Krempl E. A uniaxial viscoplastic model based on total strain and overstress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1979, vol. 27, iss. 5-6, pp. 377–391. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(79\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(79)90021-8)

[17] Krempl E. Models of viscoplasticity. Some comments on equilibrium (back) stress and drag stress. *Acta Mech.*, 1987, vol. 69, no. 1, pp. 25–42.

DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01175712>

[18] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. *Известия АН СССР. Отделение технических наук*, 1958, № 8, с. 26–31.

[19] Simo J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *CMAME*, 1987, vol. 60, iss. 2, pp. 153–173.

DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(87\)90107-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90107-1)

[20] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. В 2 т. М., ИИЛ, 1954–1969.

[21] Миненков Б.В., Стасенко И.В. Прочность деталей из пластмасс. М., Машиностроение, 1977.

**Семенов Владимир Константинович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Петриков Евгений Константинович** — ассистент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Семенов В.К., Петриков Е.К. Математическая модель поведения частично кристаллического полимера при одноосном растяжении с различными скоростями деформирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2025, № 6 (123), с. 21–37. EDN: WWTKHL

**MATHEMATICAL MODEL OF THE SEMICRYSTALLINE  
POLYMER BEHAVIOR EXPOSED TO UNIAXIAL TENSION  
WITH THE DIFFERENT STRAIN RATES**

V.K. Semenov

semenov.vk@bmstu.ru

E.K. Petrikov

petrikove@bmstu.ru

**BMSTU, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

The article presents results of uniaxial tensile testing the 2NT11-9 polyethylene (PE-100) for a wide range of the loading rates at the relatively low strain (< 15–20 %). It provides relaxation curves for various stress levels to analyze the short-term (transient) creep processes. The relaxation observation time during testing was

**Keywords**

*Semicrystalline polymer, polyethylene, uniaxial tension, relaxation, viscoelastoplastic model*

1 hour. The paper studies dependence of the residual strains in the material on the total strains obtained under direct loading. To describe the obtained experimental data, it proposes the constitutive relations that take into account the material strain-induced softening and its creep while maintaining a hypothesis of the small (linear) strains. A method for determining numerical values of the material proposed model behavior parameters is described in detail. The model elastic parameter values are determined from the equilibrium tensile curve, and the viscous parameters are determined from the relaxation curves. The paper shows that the constructed model uses a single set of the numerical parameter values determined in this way, and makes it possible to describe satisfactorily the material uniaxial stress-strain curves at the various strain rates. In general, the presented material model behavior could be applied to analyze short-term strength of the products made from the semicrystalline polymers

Received 29.11.2024

Accepted 23.06.2025

© Author(s), 2025

---

## REFERENCES

- [1] Hong K., Rastogi A., Strobl G. A model treating tensile deformation of semicrystalline polymers: quasi-static stress-strain relationship and viscous stress determined for a sample of polyethylene. *Macromolecules*, 2004, vol. 37, iss. 26, pp. 10165–10173. DOI: <https://doi.org/10.1021/ma049174h>
- [2] Hong K., Strobl G. Characterizing and modeling the tensile deformation of polyethylene: The temperature and crystallinity dependences. *Polym. Sci. Ser. A*, 2008, vol. 50, no. 5, pp. 483–493. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965545X08050027>
- [3] Oshmyan V., Patlazhan S., Remond Y. Simulation of small-strain deformations of semi-crystalline polymer: coupling of structural transformations with stress-strain response. *J. Mater. Sci.*, 2004, vol. 39, no. 11, pp. 3577–3586. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JMSC.0000030709.19754.28>
- [4] Oshmyan V.G., Patlazhan S.A. The effect of structural changes and nonlinear character of plastic flow on low strains in semicrystalline polymers. *Polym. Sci. Ser. A*, 2005, vol. 47, no. 4, pp. 346–351.
- [5] Oshmyan V.G., Patlazhan S.A. Principles of structural-mechanical modeling of polymers and composites. *Polym. Sci. Ser. A*, 2006, vol. 48, no. 9, pp. 1004–1013. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965545X06090173>
- [6] Patlazhan S.A. Stress-strain behavior of high-density polyethylene below the yield point: effect of unloading rate. *Polym. Sci. Ser. A*, 2008, vol. 50, no. 5, pp. 507–513. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965545X08050040>

- [7] Mullins L. Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chemistry & Technology*, 1948, vol. 21, iss. 2, pp. 281–300. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3546914>
- [8] Mullins L., Tobin N.R. Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1965, vol. 9, iss. 9, pp. 2993–3009. DOI: <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090906>
- [9] Harwood J.A.C., Mullins L., Payne A.R. Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part II. Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1965, vol. 9, iss. 9, pp. 3011–3021. DOI: <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090907>
- [10] Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect. *Eur. Polym. J.*, 2009, vol. 45, iss. 3, pp. 601–612. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017>
- [11] Govindjee S., Simo J.C. Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, iss. 14-15, pp. 1737–1751. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90167-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90167-R)
- [12] Hassan T., Çolak O.U., Clayton P.M. Uniaxial strain and stress-controlled cyclic responses of ultrahigh molecular weight polyethylene: experiments and model simulations. *J. Eng. Mater. Technol.*, 2011, vol. 133, iss. 2, art. 021010. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003109>
- [13] Avanzini A., Gallina D. Effect of cyclic strain on the mechanical behavior of a thermoplastic polyurethane. *J. Eng. Mater. Technol.*, 2011, vol. 133, no. 2, art. 021005. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4003101>
- [14] Kitagawa M., Mori T., Matsutani T. Rate-dependent nonlinear constitutive equation of polypropylene. *J. Polym. Sci. B*, 1989, vol. 27, iss. 1, pp. 85–95. DOI: <https://doi.org/10.1002/polb.1989.090270106>
- [15] Kitagawa M., Takagi H. Nonlinear constitutive equation for polyethylene under combined tension and torsion. *J. Polym. Sci. B*, 1990, vol. 28, iss. 11, pp. 1943–1953. DOI: <https://doi.org/10.1002/polb.1990.090281105>
- [16] Liu M., Krempl E. A uniaxial viscoplastic model based on total strain and overstress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1979, vol. 27, iss. 5-6, pp. 377–391. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(79\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(79)90021-8)
- [17] Krempl E. Models of viscoplasticity. Some comments on equilibrium (back) stress and drag stress. *Acta Mech.*, 1987, vol. 69, no. 1, pp. 25–42. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01175712>
- [18] Kachanov L.M. On failure time under creep conditions. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–31 (in Russ.).
- [19] Simo J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *CMAME*, 1987, vol. 60, iss. 2, pp. 153–173. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(87\)90107-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90107-1)

[20] Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. Vol. 1. McGraw Hill, 1950.

[21] Minenkov B.V., Stasenko I.V. Prochnost detaley iz plastmass [Strength of plastic parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977.

**Semenov V.K.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Petrikov E.K.** — Assistant, Department of Applied Mechanics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Semenov V.K., Petrikov E.K. Mathematical model of the semicrystalline polymer behavior exposed to uniaxial tension with the different strain rates. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2025, no. 6 (123), pp. 21–37 (in Russ.). EDN: WWTKHL